

新北市專任輔導員市級公開授課課例研討會

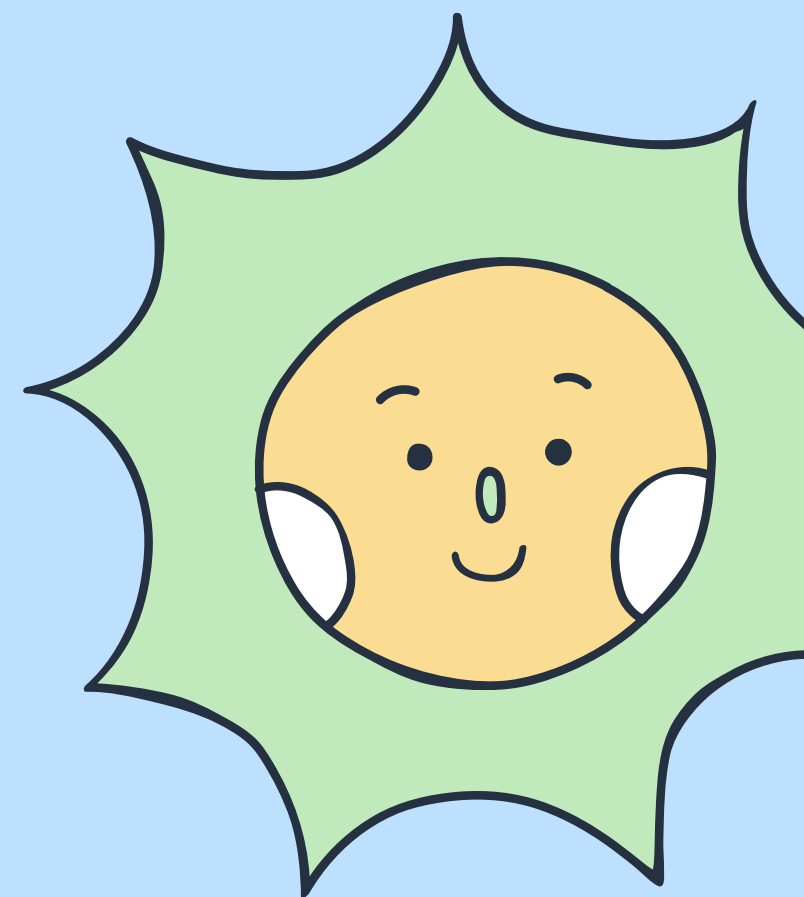
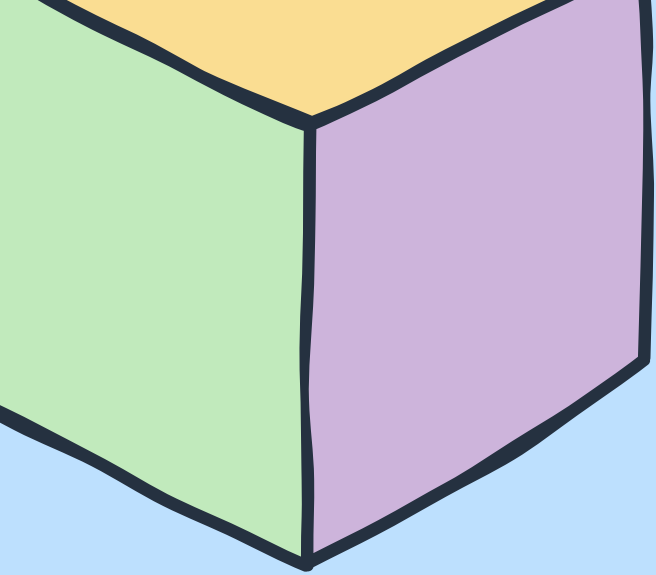
# 認識體積公式

新北市國小數學輔導團

專任輔導員 林心怡



來看課綱！



# 十二年課綱數學領綱學習內容

S-5-5 正方體和長方體：計算正方體和長方體的體積與表面積。正方體與長方體的體積公式。

# 十二年課綱數學領綱課程手冊說明

在 N-4-12 中，學生已理解如何點數積木來計算體積。本條目則開始學習常見立體形體的體積，先從最簡單的正方體與長方體開始，在整數邊長的情況，巧妙利用堆疊的過程，學習如何以乘法快速計算體積，並得到如下公式，若有圖形約定，也可用符號表示公式

( R-5-3 )。

正方體體積 = 邊長  $\times$  邊長  $\times$  邊長

長方體體積 = 長  $\times$  寬  $\times$  高

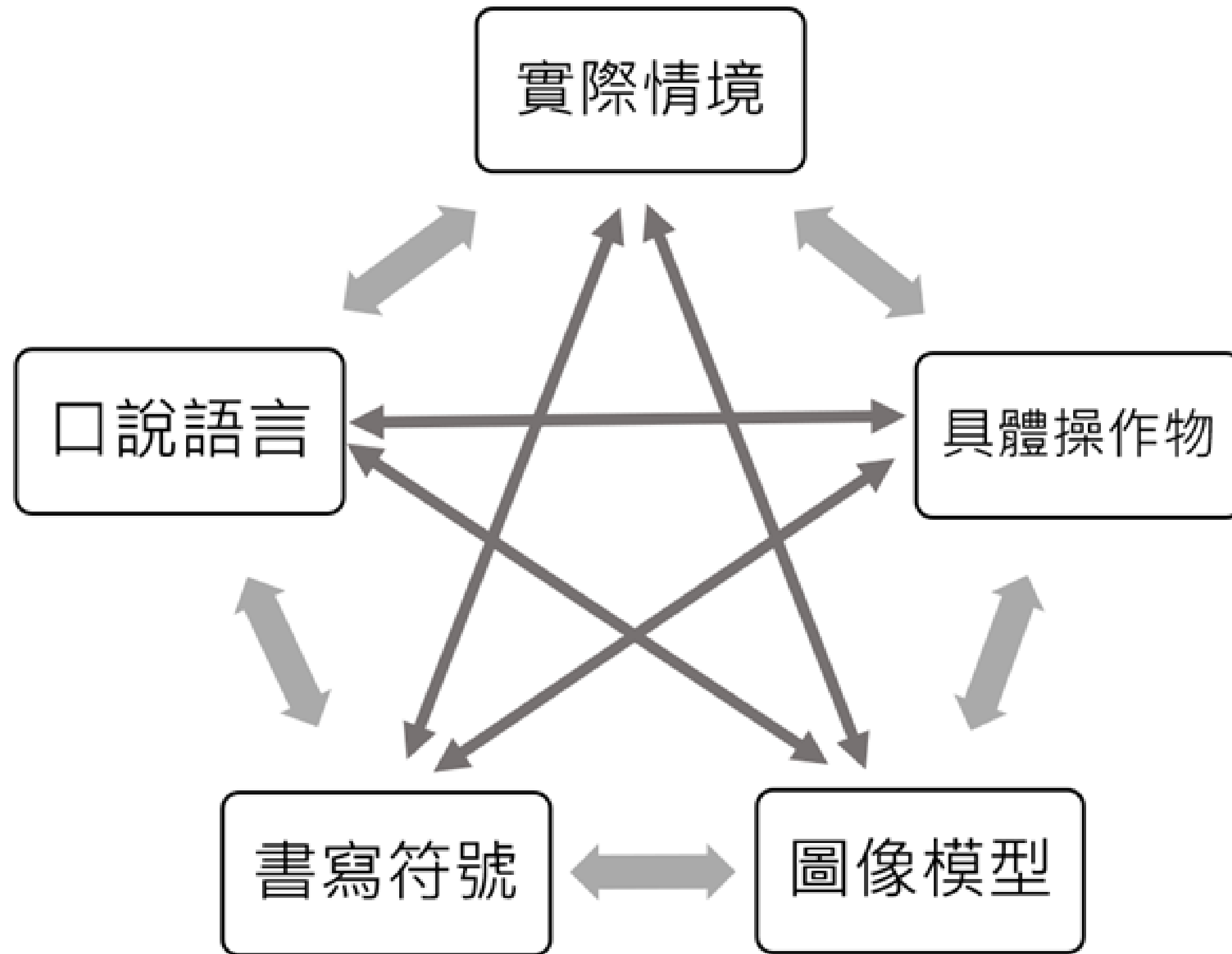
# 長、寬、高的意涵

所謂某條邊是長(寬、高)的說法，並不是指長方體上某條特定的邊被定義為長(寬、高)，也不是在固定某一個底面的情況下，某條特定的邊被定義為長(寬、高)。

**長(寬、高)只是我們用來溝通長方體相互垂直三邊的約定用詞。長方體體積公式其實就是其相互垂直三邊的長度相乘而已，只要能分辨出這三段長度即可，「長、寬、高在哪裡？」並不影響面積與體積的計算。**

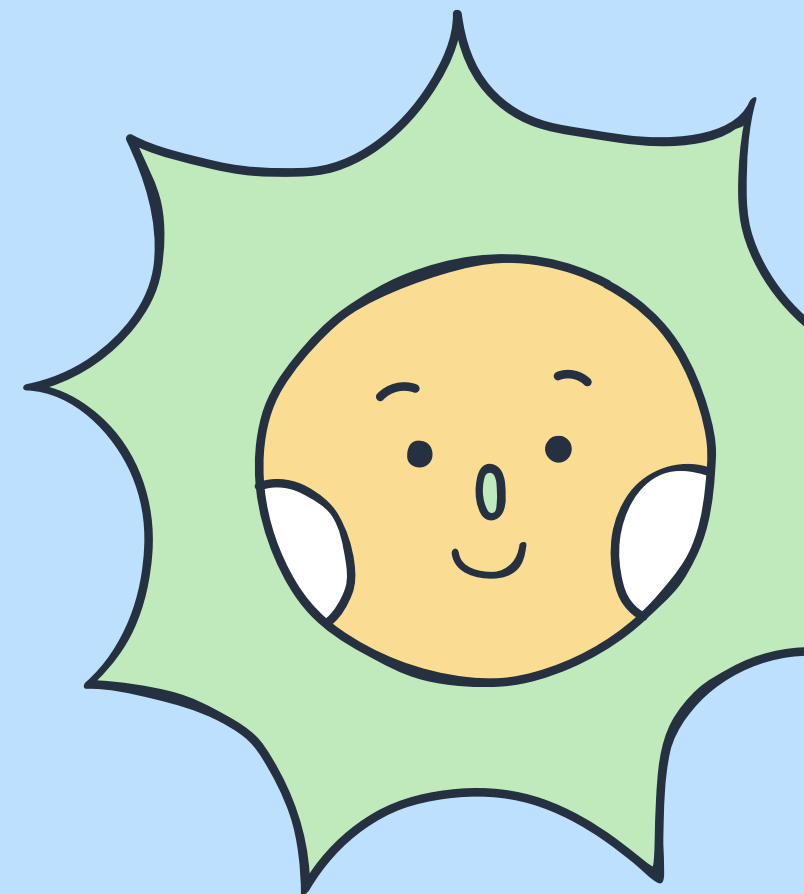
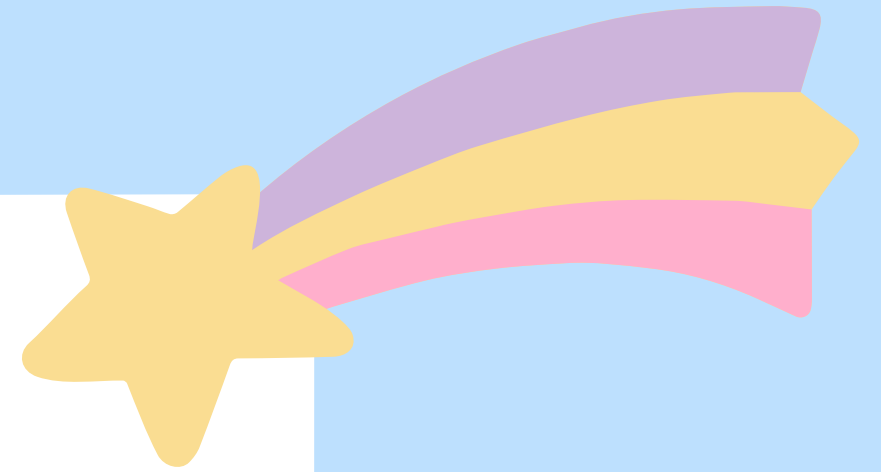
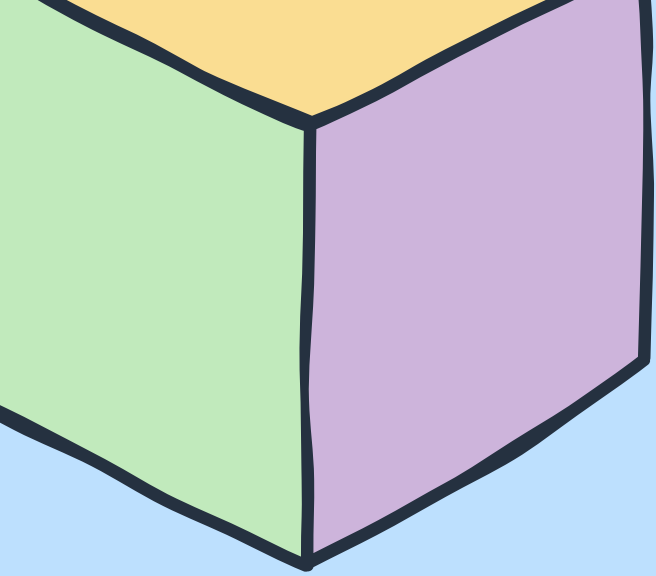
長、寬、高的位置也會因擺放方式或視線方向不同而有所改變，因此也沒有定義的必要，也沒有數學意義。(引自康軒版教冊)

# 數學表徵的 五種型態 (教學與學習)



數學表徵的五種型態(資料來源：Lesh, Post, & Behr, 1987)

# 教材内容!



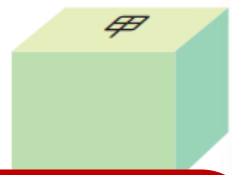



圖像、口語表徵

1-1 長方體與正方體的體積

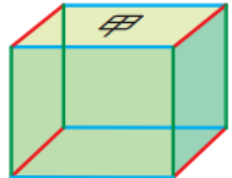
1 有一個裝方糖的盒子，說說看，它有什麼特別的地方呢？

拿出附件做成甲長方體。附件 1

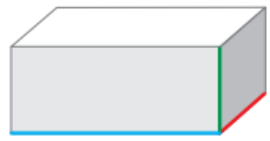





它有 6 個面，都是長方形。




這 4 條綠色邊都一樣長，還有……



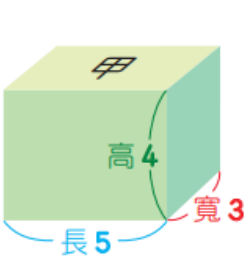
左圖的長方體中，我們可以稱藍色的邊是長方體的長，紅色的邊是長方體的寬，綠色的邊是長方體的高。

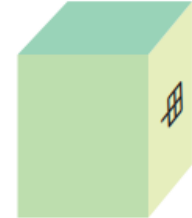


量量看，甲長方體的長、寬、高各是多少公分？




長 5 公分、寬 3 公分、高 4 公分。



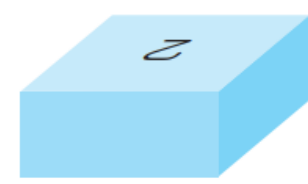


如果擺成這樣，長、寬、高各是幾公分呢？

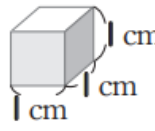


2 拿出附件做成乙長方體。附件 2


量量看，乙長方體的長、寬、高各是多少公分？



3 說說看，下圖白色積木的體積有多大呢？

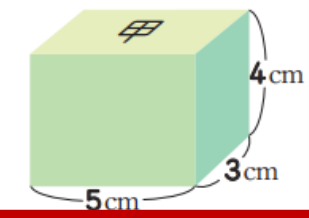


它的體積是 1 立方公分，也可以寫成  $1\text{cm}^3$ 。



4 甲長方體的體積有多大呢？

用 1 立方公分的積木，排成和它一樣大的長方體，再算算看，共用了多少個積木？附件 1





先排第一排，長是 5 公分，要排 5 個積木。



寬是 3 公分，要排 3 排，第一層有 15 個積木。



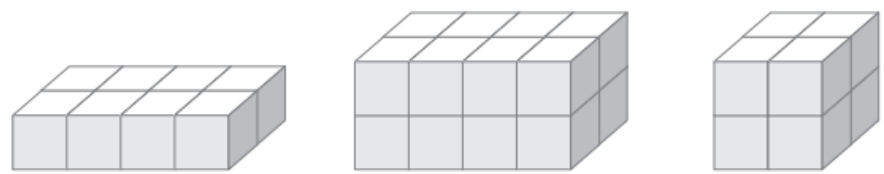
高是 4 公分，要排 4 層，所以有 60 個積木。

甲長方體的體積是多少立方公分？用算式記記看。

$5 \times 3 = 15$   
 $15 \times 4 = 60$   
60 個 1 立方公分，合起來是 60 立方公分。

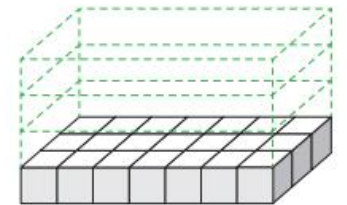
5 下圖都是用 1 立方公分的積木所堆成。

- ① 它們各是什麼形體？
- ② 體積各是多少立方公分？



6 右圖長方體的體積是多少立方公分？

用乘法算式把做法記下來。



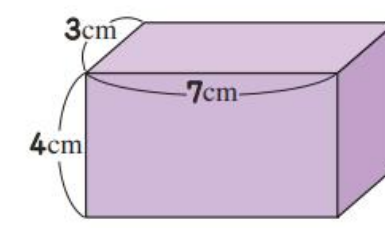
$7 \times 3 = 21$   
 $21 \times 4 = 84$

用一個乘法算式把做法記下來。

說說看，算式中的數字各代表什麼？

$7 \times 3 \times 4 = 84$

7 代表長是 7 公分，可以排 7 個積木。  
3 代表寬是 3 公分，可以排 3 排。  
4 代表高是 4 公分，可以排 4 層。



答：84 立方公分

長方體體積 = 長  $\times$  寬  $\times$  高

體積公式導出

長、寬、高命名

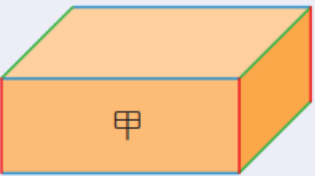


3-1 長方體與正方體的體積

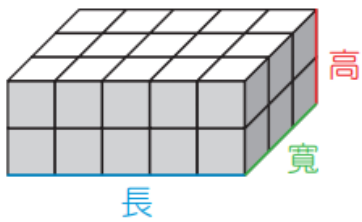
本節配合習作第24~25頁

1 認識長方體的長、寬、高  
拿出附件做一做，回答問題。 配合附件4

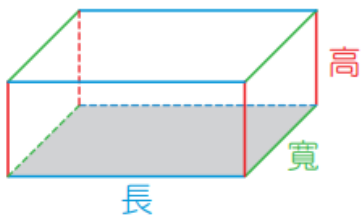
① 甲是一個長方體，量一量，  
甲有哪些邊一樣長？



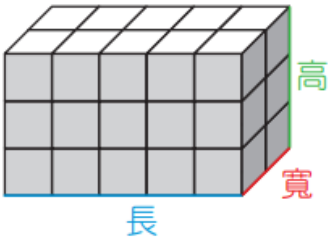
② 把長方體甲用不同的方向擺放，再觀察。



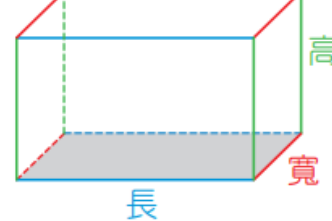
藍邊是底面長方形的長，  
綠邊是底面長方形的寬。



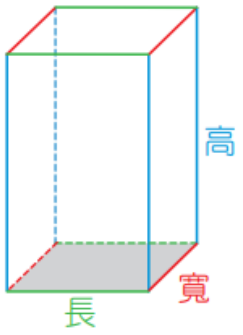
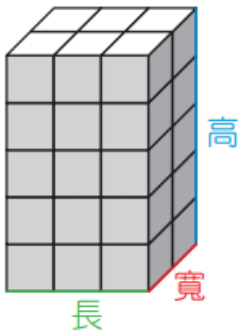
藍邊都是長方體的長，  
綠邊都是長方體的寬，  
紅邊都是長方體的高。



藍邊都是長方體的長，  
紅邊都是長方體的寬，  
綠邊要怎麼稱呼呢？



藍邊都是長方體的長，  
紅邊都是長方體的寬，  
綠邊要怎麼稱呼呢？



綠邊都是長方體的長，  
紅邊都是長方體的寬，  
藍邊要怎麼稱呼呢？

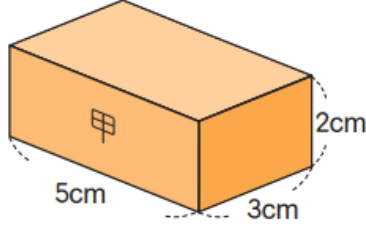


長、寬、高  
命名

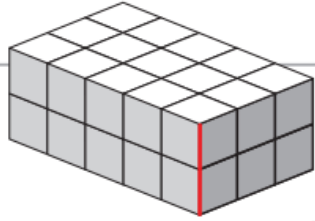
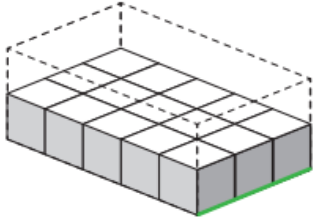
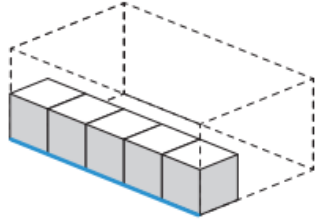


不論長方體怎麼擺，底面長方形的長就是長方體的長，底面長方形的寬就是長方體的寬，另一種顏色的邊就是長方體的高。

2 複製長方體並列出一個算式計算長方體體積  
先用1立方公分的積木排出和甲一樣大的長方體，再算一算長方體甲的體積是多少立方公分？ 配合附件4



一排排5個，長是5公分。 → 排3排，寬是3公分。 → 排2層，高是2公分。

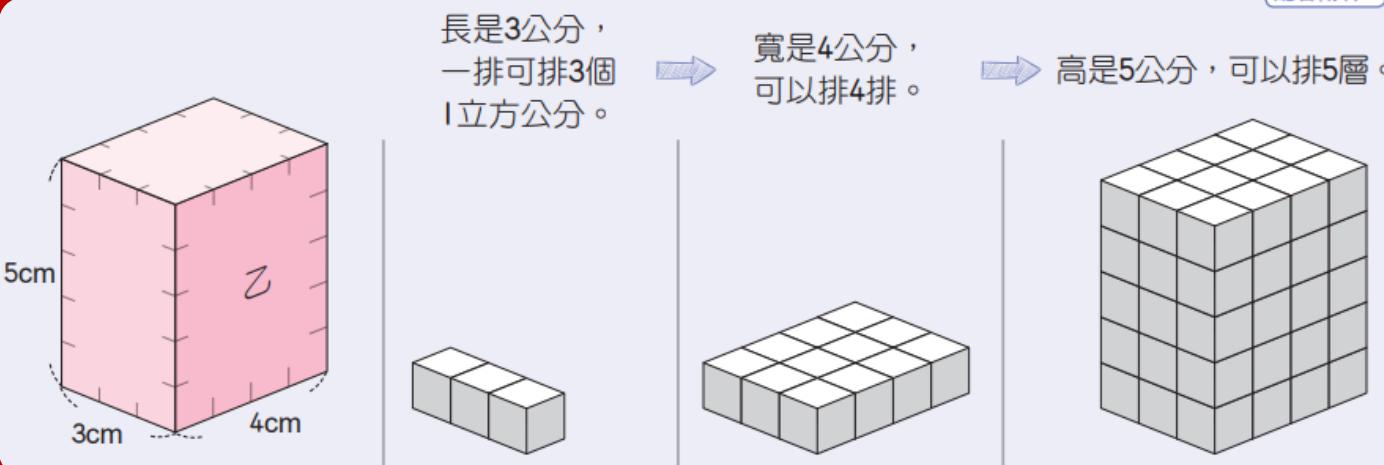


一排有5個，有3排： $5 \times 3 = \underline{\hspace{2cm}}$   
一層有15個，有2層： $15 \times 2 = \underline{\hspace{2cm}}$   
有30個1立方公分，是30立方公分。  
用一個算式記成： $5 \times 3 \times 2 = \underline{\hspace{2cm}}$

排出來的長方體的長、寬、高和甲一樣。

答：

3 認識長方體的體積公式  
長方體乙的體積是多少立方公分？用一個算式把做法記下來。



$3 \times 4 \times 5 = 60$   
60個1立方公分，是60立方公分。


答：

長方體體積 = 長 × 寬 × 高

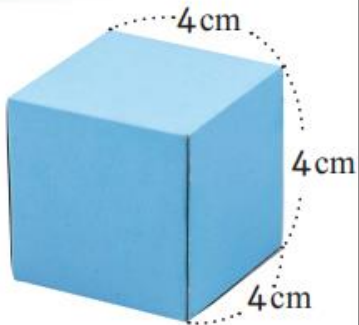
體積公式  
導出

4-1 體積的公式

1 右圖正方體的體積是幾立方公分？

用  排排看。

附件 7



▲邊長 4 公分，可以排 4 個積木。

▲邊長 4 公分，可以排 4 排積木。

▲邊長 4 公分，可以排 4 層積木。

把做法用乘法算式記下來：

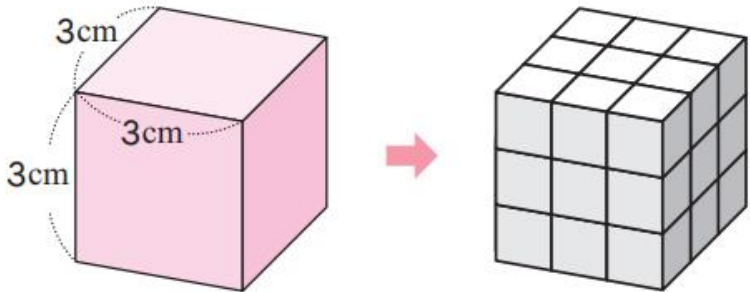
$$4 \times 4 \times 4 = 64$$

$4 \times 4 = 16$ ，1 層可以排 16 個積木，有 4 層， $4 \times 4 \times 4 = 64$ ，共有 64 個積木，是 64 立方公分。



答：64 立方公分

2 下圖正方體的體積是幾立方公分？



正方體的體積 = 邊長  $\times$  邊長  $\times$  邊長

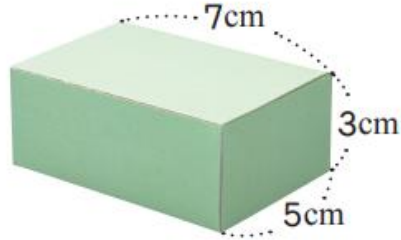


體積公式  
導出

3 右圖長方體的體積是幾立方公分？

用  排排看。

附件 8



長、寬、高命名



▲長 7 公分，可以排 7 個積木。

▲寬 5 公分，可以排 5 排積木。

▲高 3 公分，可以排 3 層積木。

把做法用乘法算式記下來：

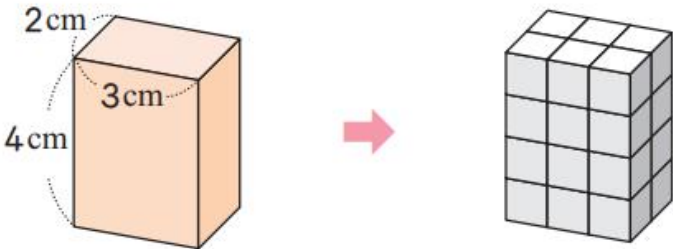
$$7 \times 5 \times 3 = 105$$

$7 \times 5 = 35$ ，1 層可以排 35 個積木，有 3 層， $7 \times 5 \times 3 = 105$ ，共有 105 個積木，是 105 立方公分。



答：105 立方公分

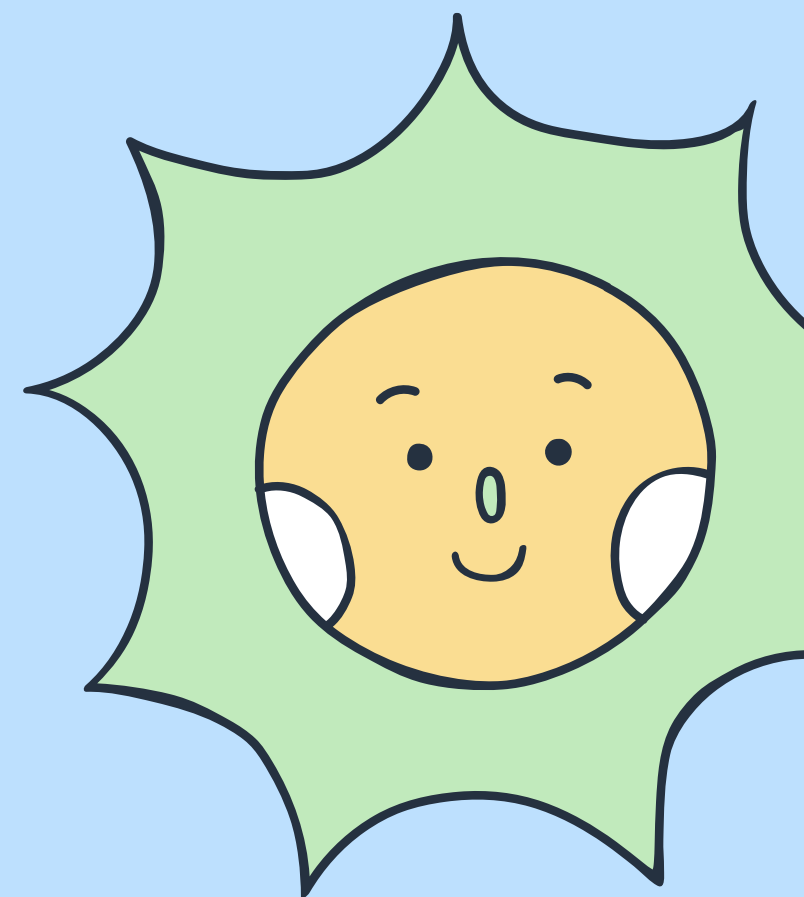
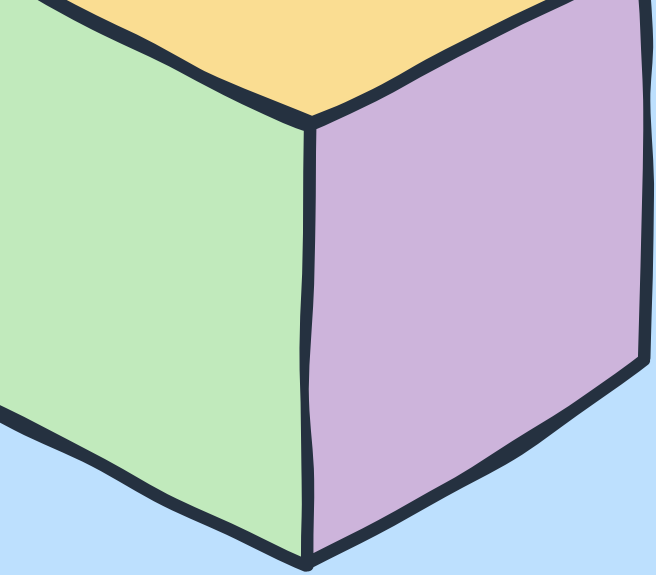
4 下圖長方體的體積是幾立方公分？



長方體的體積 = 長  $\times$  寬  $\times$  高



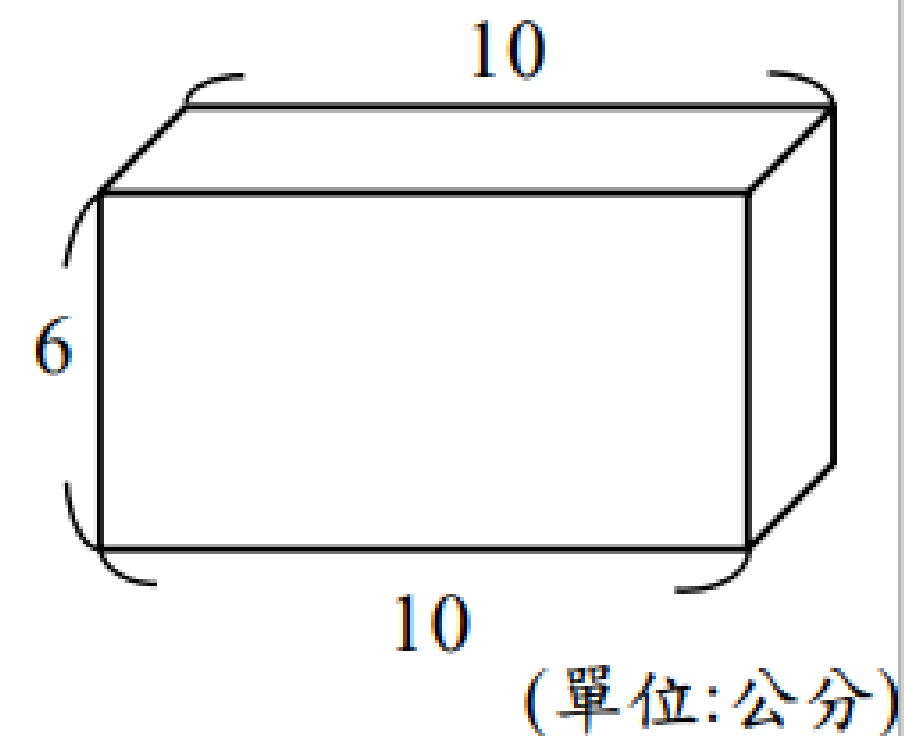
學生困難！





# 108 學年度新北市國小數學能力檢測非選擇題普測題

黑板上畫了一個長方體，並標示了三個邊長的長度，如右圖。老師問學生可以算出長方體的體積嗎？



小威的做法：

長方體有三個邊長就可以算體積

$6 \times 10 \times 10 = 600$       答：長方體的體積是 600 立方公分。

你認為小威的做法正確嗎？請寫出你的理由。

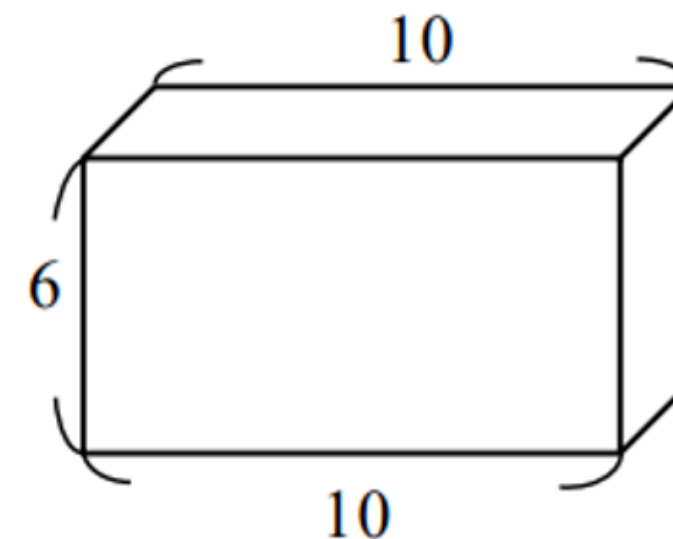
作答欄：

類型	2分	1分	0分
百分比	54.4%	21.3%	24.3%

(1) <u>小威</u> 的做法正確嗎？	(2) 我的理由：
-----------------------	-----------

DA  
(2) 我的理由：

因為長體的公式是長 $\times$ 寬 $\times$ 高，如果數字放不一樣沒關係，只要三個數字相乘就可以了。  
位置



長方體有三個邊長就可以算體積

$$6 \times 10 \times 10 = 600$$

(2) 我的理由：

因為長方形的體積公式是長 $\times$ 寬 $\times$ 高，所以小威的方法是正確的

(2) 我的理由：

有用邊長 $\times$ 邊長 $\times$ 邊長

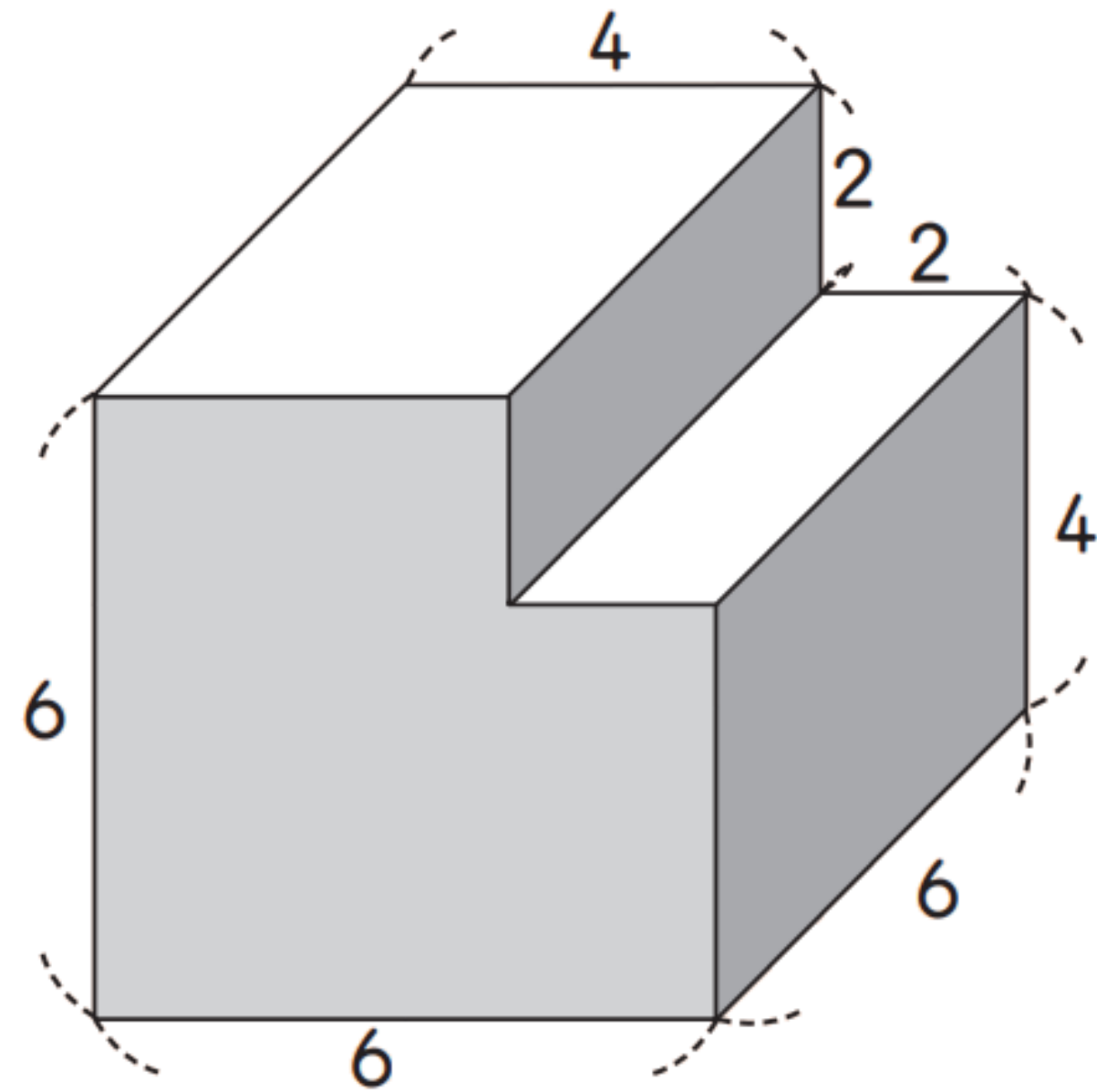
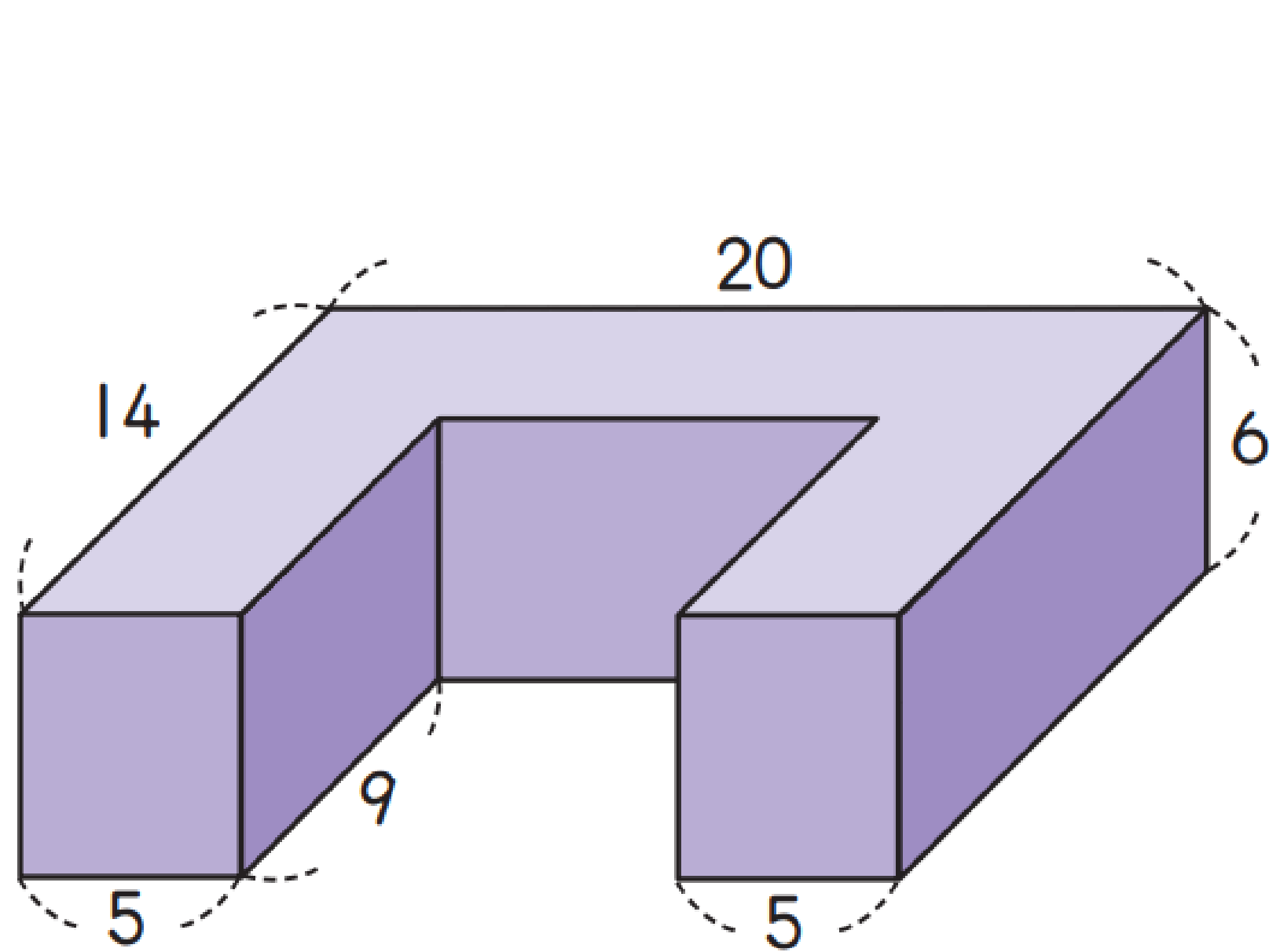
(2) 我的理由：

因為長方形體積是長 $\times$ 寬 $\times$ 高，提高 $\times$ 長 $\times$ 寬。

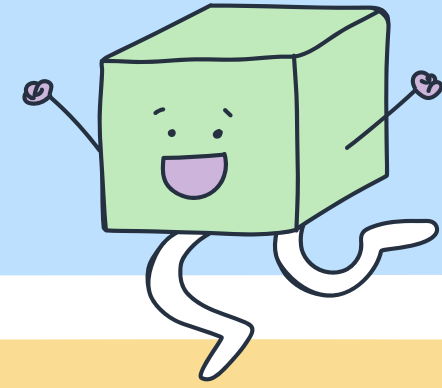
因為我的老師是這樣子教我的  
就

學生的錯誤概念

## 錯誤概念對後續解決複合形體體積的影響



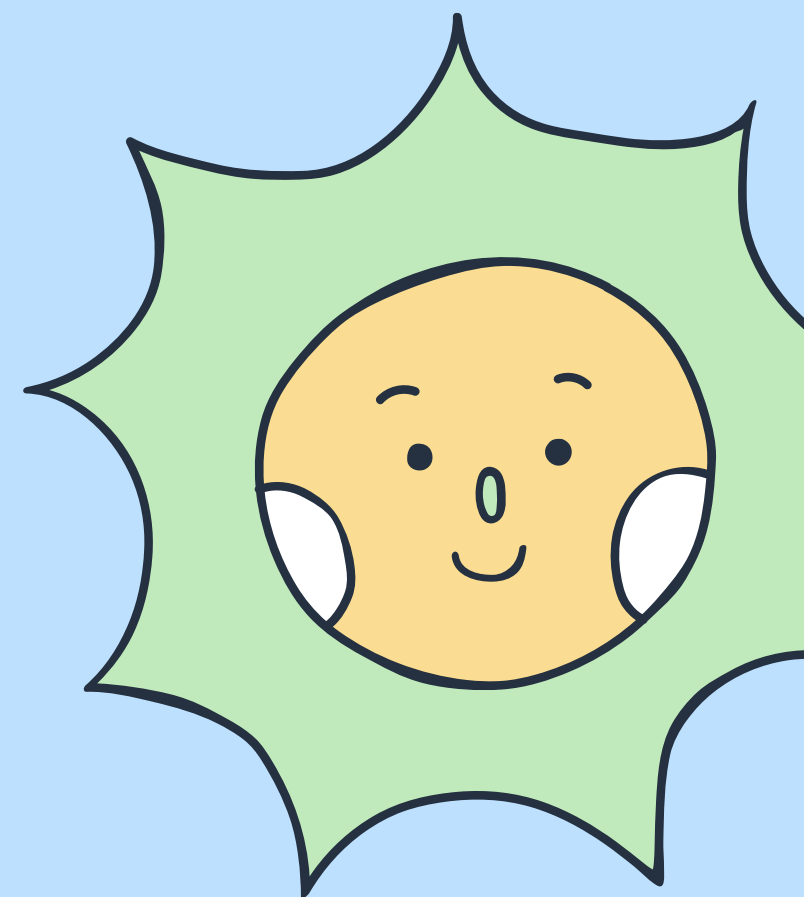
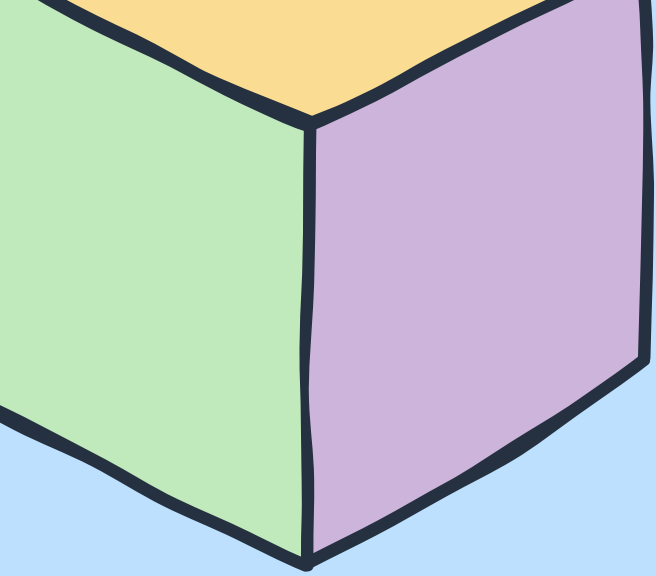
# 教材分析後問題思考

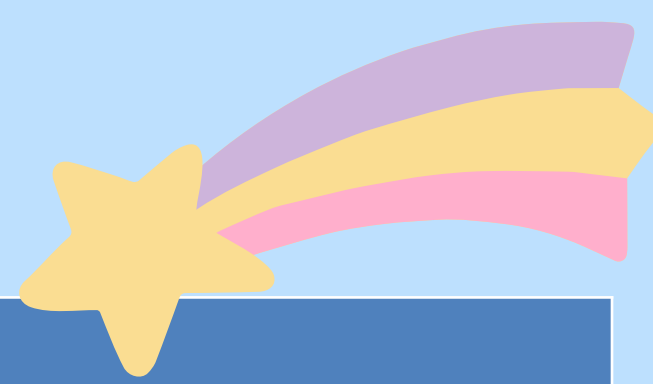
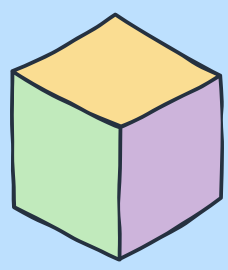


1. 如何透過情境設計及提問，讓學生產生對長方體「長、寬、高」這三邊命名的需求感，且更能理解此三邊對計算體積的意涵？
2. 如何表徵幫助學生從不同點數策略中，建立堆疊過程與長方體體積公式之間的心像連結？



# 教學設計！

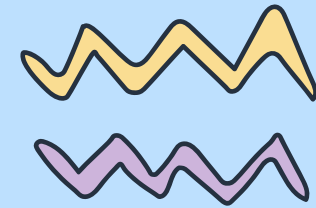




# 各節次學習活動安排

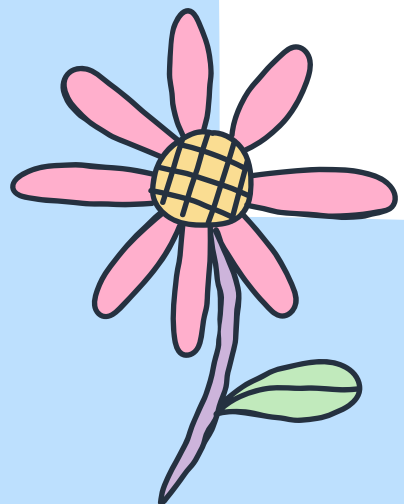
節次	學習目標	活動目標
一 ★	認識長方體的體積	1-1透過操作，理解長方體中其中三邊長度對計算體積的重要性。 1-2認識長方體的「長、寬、高」名詞及體積公式。 1-3應用長方體的體積公式。
二	認識正方體的體積	2-1 透過操作，理解正方體中只需要三個邊長相乘即可計算體積。 2-2 透過長方體的體積公式擴展類推至正方體體積公式的認識。 2-3 解決題幹或圖示中，長方體或正方體某一邊的邊長單位與其他邊不同的體積問題。
三	認識 1 立方公尺	3-1 認識體積單位「立方公尺」。 3-2 以立方公尺為單位做相關的實測與估測。 3-3 認識1立方公尺 = 1000000立方公分。 3-4 透過正方體或長方體的體積，進行立方公尺和立方公分的換算活動。
四	簡單複合形體的體積(一)	4-1 能將複合形體看成是幾個正方體或長方體的「切割」或「填補」關係。 4-2 透過操作，幾何推理出複合形體中求算體積所需的邊長。
五	簡單複合形體的體積(二)	5-1 透過切割或填補，計算簡單長方體和正方體複合形體的體積。 5-2 欣賞解決複合形體體積多元的方法，並能應用運算律簡化計算。

# 核心素養導向教學活動設計



## 轉

T1情境問題轉化  
T2新舊經驗銜接  
T3數學概念聯結



## 做

D1概念操作理解  
D2解題策略探究  
D3數學語言溝通

## 得

G1思考能力提升  
G2解題態度培養  
G3共同學習增能

## 導入活動

轉

做

複習體積的舊經驗，引出有規則的形體(長方體)可以簡單直接用乘法點數體積。

## 本節課 教學流程



### 開展活動一

做

得

利用動態表徵連結堆疊過程及乘法算式紀錄之間的關係，以利後續建構長方體邊長與積木堆疊之間的心像轉換。

### 開展活動二

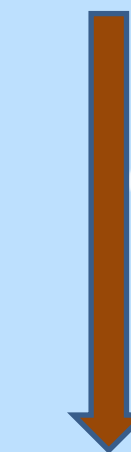
轉

做

得

透過無法點數的體積探究問題引出認識長方體中長、寬、高的需求，歸納出長方體體積的一般化公式。

具體



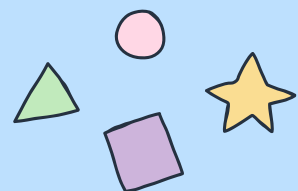
抽象

## 深化活動

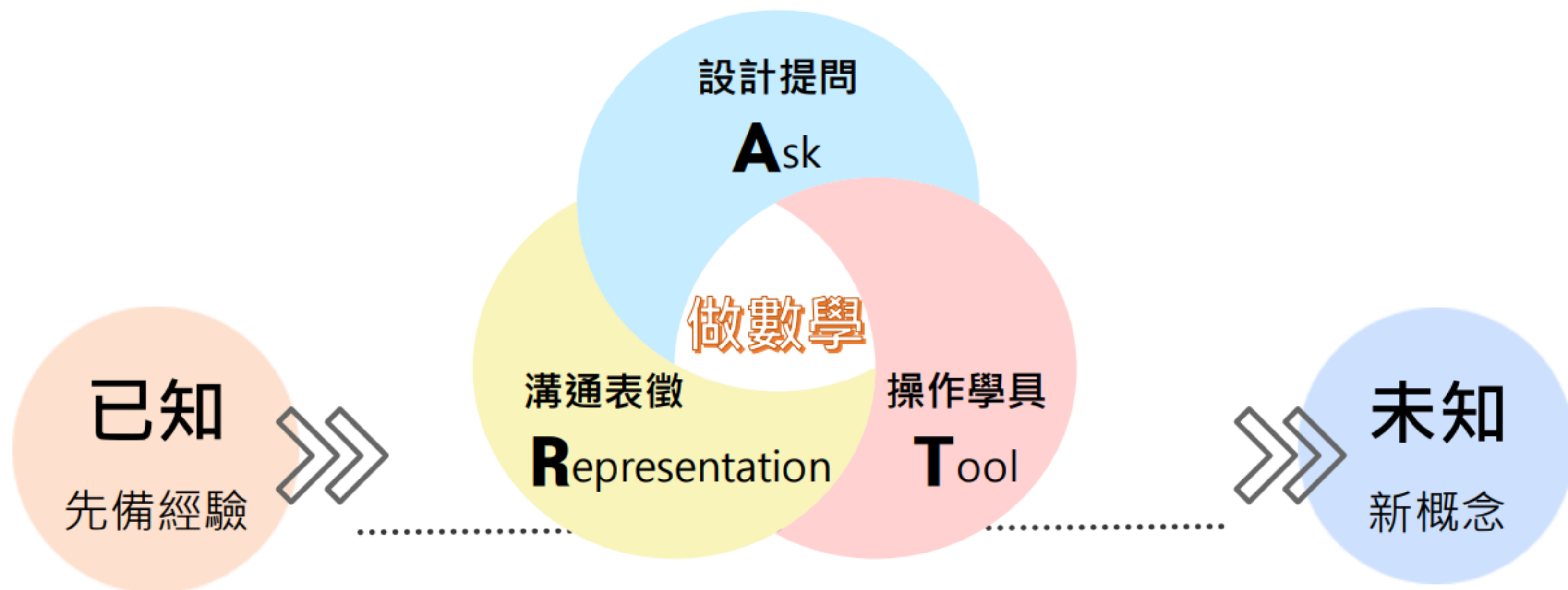
做

得

形成性評量(建構反應題)：  
評量學生是否理解長方體體積公式的意義



# 轉做得 數學好好「做」！



探究的歷程：具象→心像→抽象

由事實或多重經驗得出觀點



MATH CLASS



## Ask 設計提問

### 展開探究思考的提問設計

A1

#### 呈現事實的提問

針對數學主題在生活現象、直觀事實中提出問題，目的是引發疑惑或興趣。

A2

#### 引發探究的提問

針對學生的疑惑或興趣提出主題相關的數學問題，目的是引發深入探究的起點。

A3

#### 分析推論的提問

數學主題探究過程中，為了協助釐清不同的想法，引導學生觀察、比較、分析、推論所提出的問題。

A4

#### 延伸連結的提問

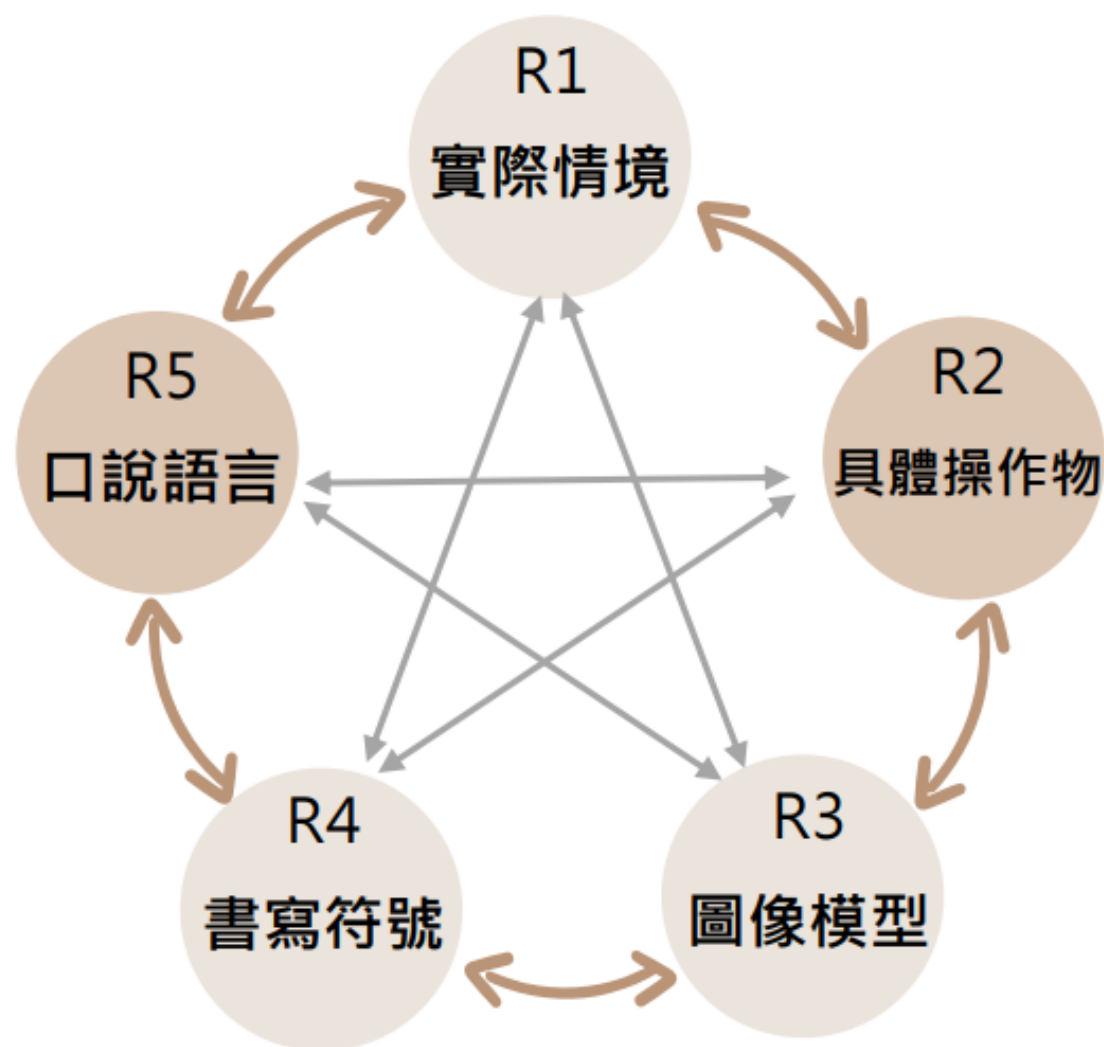
幫助學生連結數學主題的舊經驗與新概念，以及與其他主題或生活關聯，所提出的延伸性問題。

A5

#### 歸納統整的提問

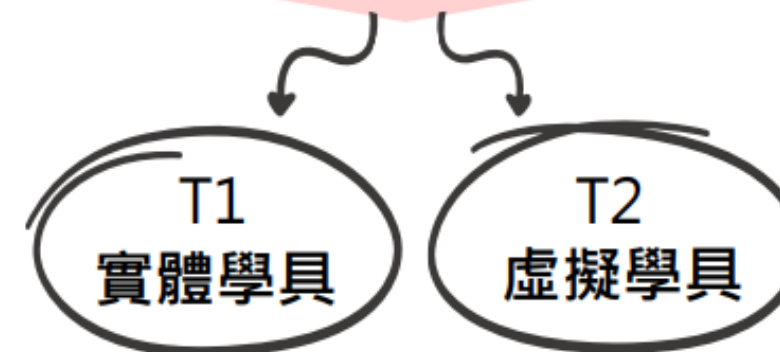
幫助學生歸納統整主題概念的問題，目的是讓學生從具體活動抽象化到該主題的新概念，用數學語言說明新概念的內涵。

## Representation 溝通表徵



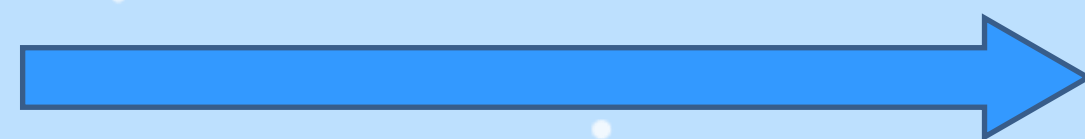
引自 Lesh 的表徵理論

## Tool 操作學具



# 具體活動

積木堆疊  
具體操作



動態表徵建立心像

A 、 R 、 T  
提問 表徵 學具

# 抽象思考

用邊長計算體積  
長方體體積公式