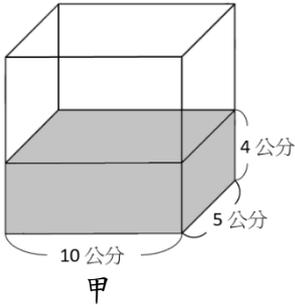
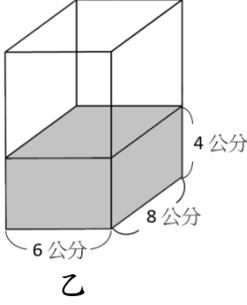


# 新北市 108 學年度國小數學檢測非選擇題學生解題分析及教學建議報告

## 一、試題內容及評閱規準：

分年細目	5-n-21 能理解容量、容積和體積間的關係。		知識向度	量與實測
評量內涵	能利用容積與體積的關係進行相關的解題活動。		認知層次	程序執行
試題內容	<p>甲、乙二個容器裝了相同高度的水(如下圖甲、乙)。小美說:「我把乙容器的水全部倒入甲容器,因為二個容器原本的水高都是 4 公分,所以甲容器的水面就會上升 4 公分。」你認為小美的說法正確嗎?請說明你的理由。</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;">   </div> <p>(1)小美的說法正確嗎? (2)我的理由:</p>			
評閱類別及規準	類別	評閱規準	評閱說明	
	2A	回答小美的說法不正確,以甲、乙容器底面內部的長度×寬度的結果(底面積)來判斷上升高度不會是 4 公分。	<p>小美不正確,因為乙容器底面內部的(長度×寬度)是 48 平方公分,甲是 50 平方公分,所以乙容器的水倒入甲容器,甲容器的上升高度不會是 4 公分。</p>	
2B	回答小美的說法不正確,利用體積公式計算出水的體積,來判斷上升高度不會是 4 公分。	<p>(1)算出乙的水量再算出甲實際上升的高度。                  小美的說法不正確,                  因為 <math>8 \times 6 \times 4 = 192</math>  <math>192 \div (10 \times 5) = 3.84</math>                  所以上升高度是 3.84 公分,所以小美的說法不正確。</p>		
		<p>(2)利用甲、乙的總水量算出甲的新高度,再求得甲實際上升的高度。                  小美的說法不正確,                  因為甲的水量是 <math>10 \times 5 \times 4 = 200</math>                  乙的水量是 <math>8 \times 6 \times 4 = 192</math>  <math>200 + 192 = 392</math>  <math>392 \div (10 \times 5) = 7.84</math></p>		

		<p><math>7.84 - 4 = 3.84</math> 所以上升高度是3.84公分，所以<u>小美</u>的說法不正確。</p> <p>(3)算出甲和乙容器內水的體積 <u>小美</u>的說法不正確， 因為甲的水量是 <math>10 \times 5 \times 4 = 200</math> 乙的水量是 <math>8 \times 6 \times 4 = 192</math> <math>200 \neq 192</math> 因為在甲容器中水量 200 立方公分(毫升)水高會是 4 公分，所以若要讓甲容器的上升高度為 4 公分就必須倒入 200 立方公分(毫升)的水，而乙容器內的水量是 192 立方公分(毫升)，所以<u>小美</u>的說法不正確。</p>
2X	答題正確，但不屬於上述 AB 類型	
1A	回答 <u>小美</u> 的說法不正確，但說明不完整，僅回答容器不同之處，未說明清楚原因。	<u>小美</u> 的說法不正確，因為甲、乙容器的長度和寬度不同，所以上升高度也會不一樣。
		<u>小美</u> 的說法不正確，因為容積(容量)不同，所以上升高度也會不一樣。
		<u>小美</u> 的說法不正確，因為甲、乙容器不同(大小不同)，所以上升高度也會不同。
1B	回答 <u>小美</u> 的說法不正確，但說明錯誤或空白。	<u>小美</u> 的說法不正確，甲、乙容器的高度各是 4 公分，所以將乙容器的水倒入甲容器，甲容器的水面上升高度是 8 公分，不是 4 公分。
		<u>小美</u> 的說法不正確，因為甲、乙容器的面積和表面積都不同。
		<u>小美</u> 的說法不正確，因為甲、乙容器形狀不同，所以上升高度也會不同。
1C	誤答 <u>小美</u> 的說法是正確的，但說明理由完整。	<u>小美</u> 的說法正確，因為甲和乙容器的底面大小不同，乙的底面面積是甲底面面積的 $48/50$ 倍，所以將乙容器的水倒入甲容器，甲容器的水面上升的高度是 $4 \times (6 \times 8) \div (10 \times 5) = 3.84$ (公分)。
1X	答題正確，但不屬於上述 ABC 類型	

0A	回答 <u>小美</u> 的說法是正確的，且說明錯誤或空白。	<u>小美</u> 的說法正確，因為兩個容器高度一樣。
0B	未回答 <u>小美</u> 的說法是正確的或不確定是否正確，說明錯誤或空白。	<u>小美</u> 的說法不一定正確，要看長、寬、高。
0X	其他錯誤類型，但不屬於上述 AB 類型	
99	空白	

## 二、評閱結果：

### (一)本題學生作答情形

類型	2		1			0			合計
	2A	2B	1A	1B	1C	0A	0B	99	
人數	42	38	225	124	2	38	4	4	477 人
百分比(%)	8.8	8.0	47.2	26.0	0.4	8.0	0.8	0.8	
人數	80		351			46			
百分比(%)	16.8		73.6			9.6			

依上表可看出有一成七的學生得分 2 分，七成三的學生得 1 分，一成的學生得 0 分。得分 2 分的學生佔 16.8%，其中五成三的學生會以容器內部的長×寬的結果(底面積)進行比較來判斷答案，近五成的學生則利用體積公式計算容器內的水量體積，其中部分學生會直接以甲容器內的水量的體積及水量高度作為判別基準，部分的學生則會計算出甲容器水面實際上升的高度來確認答案，顯示他們都能掌握容積與體積(水量)的關係並正確回答問題。

得 1 分的學生占 73.6%，其中超過六成的學生不能完整敘述理由，如以底面內部的長度和寬度不同或容器不同或容積(容量)不同來作為判斷的依據；剩下三成五的學生中大部分會以容器表面積(面積)來判別，少部分則是利用甲、乙二容器的水面高度來判斷答案，顯示他們可能因為錯誤的概念導致無法掌握容積與體積(水量)的關係。至於得 0 分的學生佔 9.6%，其中超過九成以上的學生以水面高度來判斷答案，顯示學生不具有容積的概念。

(二) 學生答題類型分析

類型	學生作答舉隅(照片)	作答舉隅分析
2A		<p>回答小美的說法不正確；計算出甲、乙容器的底部面積進行比較，並說明底部面積不同倒入相同水量時，水高會不同。</p>
2B		<p>回答小美的說法不正確；透過體積公式的計算出乙容器內的水量的體積，再算出甲容器水面實際上升的高度。</p> $6 \times 8 \times 4 = 192$ $192 \div (10 \times 5) = 3.84$
		<p>回答小美的說法不正確；透過體積公式的計算出甲、乙容器內的水量的體積，把二容器的水量的體積相加，再算出甲、乙容器總水量在甲容器內的水面高度，再算出甲容器水面實際上升的高度。</p> $10 \times 5 \times 4 = 200$ $6 \times 8 \times 4 = 192$ $200 + 192 = 392$ $392 \div (10 \times 5) = 7.84$ $7.84 - 4 = 3.84$
		<p>回答小美的說法不正確；透過體積公式的計算出甲、乙容器內的水量的體積，因為體積(水量)不一樣。</p> $10 \times 5 \times 4 = 200$ $6 \times 8 \times 4 = 192$ $200 \neq 192$
1A		<p>回答小美的說法不正確；容器的長、寬不同，水量也會不一樣。</p>
		<p>回答小美的說法不正確；雖然水深都是4公分，但底面積不一樣，所以不會上升4公分。</p>

	<p>(1) 小美的說法正確嗎? 不對</p>	<p>(2) 我的理由: 兩個容器的尺寸不同</p>	<p>回答小美的說法不正確; 兩個容器大小不同。</p>
	<p>(1) 小美的說法正確嗎? 正確</p>	<p>(2) 我的理由: 因為容積不一樣</p>	<p>回答小美的說法不正確; 因為容積不一樣。</p>
1B	<p>(1) 小美的說法正確嗎? 不正確</p>	<p>(2) 我的理由: 因為甲和乙的長、寬、高不同,所以甲和乙的容積也會不一樣</p>	<p>回答小美的說法不正確; 因為甲和乙的長和寬、高不同,所以甲和乙的容積也會不一樣。</p>
	<p>(1) 小美的說法正確嗎? 正確</p>	<p>(2) 我的理由: 因為這兩個容器的面積和表面積都不同</p>	<p>回答小美的說法不正確; 因為這兩個容器的面積和表面積都不一樣。</p>
	<p>(1) 小美的說法正確嗎? 正確</p>	<p>(2) 我的理由:</p>	<p>回答小美的說法不正確; 理由空白</p>
0A	<p>(1) 小美的說法正確嗎? 正確</p>	<p>(2) 我的理由: 因為甲和乙的水升都是4公分,把乙的水倒入甲水升就會變成8公分</p>	<p>回答小美的說法正確; 因為甲和乙的水升(深)都是4公分,把乙的水倒入甲,但底面積不一樣,所以不會上升4公分。水升(深)就會變成8公分</p>
	<p>(1) 小美的說法正確嗎? 正確</p>	<p>(2) 我的理由: 因為甲容器本來就是4公分,乙的高也是4公分,所以把乙容器的水倒入甲容器,甲容器的水面就會上升4公分。</p>	<p>回答小美的說法正確; 因為甲容器本來就是4公分,乙的高也是4公分,所以把乙容器的水倒入甲容器,甲容器的水面就會上升4公分。</p>
	<p>(1) 小美的說法正確嗎? 正確</p>	<p>(2) 我的理由: 因為倒入就是加起來</p>	<p>回答小美的說法正確; 因為倒入就是加起來。</p>
0B	<p>(1) 小美的說法正確嗎? 不一定</p>	<p>(2) 我的理由: 有可能是長、寬或高</p>	<p>回答小美的說法正確; 有可能是長、寬或高</p>

(1) 小美的說法正確嗎? 否	(2) 我的理由:	回答有；理由空白
(1) 小美的說法正確嗎?	(2) 我的理由: 因為他的高是4cm	回答空白；因為他的高是4公分

### 1. 學生正確的多元解題策略

從學生 2 分類型的解題策略中, 可看出學生在判斷甲容器水面高度上升的方法大致可分為二種:

#### (1) 透過容器底面內部的長×寬的結果(底面積)來判斷

就本題來看, 將乙容器內的水倒入甲容器後會使甲容器水面高度上升, 而其上升部份水的體積就是原本在乙容器內水的體積, 所以學生要知道容器內的水量可以透過計算此容器內水所佔的體積得知, 再透過水量體積的計算來進行相關的解題。若學生能透過水量體積相等的條件, 就會發現「相同的水量在不同的容器中, 其的水面的高度會因容器的底面內部的長×寬的結果(底面積)而不同」, 說明如下:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{甲容器上升部分水的體積} & = & \text{原本乙容器內水的體積} \\
 (\text{長} \times \text{寬}) \times \text{甲水面上升高} & = & (\text{長} \times \text{寬}) \times \text{乙原本水面高} \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \text{甲容器底面內部的面積} & & \text{乙容器底面內部的面積}
 \end{array}$$

觀察上面的算式, 可以發現當甲容器水面上升高度和乙容器原本水面高度一樣時, 則甲、乙容器底面內部的長×寬的結果就要一樣; 換句話說就是「將相同水量倒入不同容器內, 其水面的高度會與容器內部底面的長×寬的結果(底面積)有關。」

從此類型學生作答的表現(如下表), 可以看到他們會利用容器內部底面的長×寬的結果(底面積)來判斷答案, 顯示學生知道「相同水量倒入不同容器內, 其水面的高度會與容器內部底面長×寬的結果(底面積)有關。」。

甲容器的底面積： $10 \times 5 = 50$   
 乙容器的底面積： $6 \times 8 = 48$   
 $50 \neq 48$   
 甲、乙二個容器的底面面積大小不同, 所以甲水面上升的高度不會是 4 公分, 因此小美的說法不正確。

## (2) 透過體積公式來確認

從 2 分類型的學生作答表現看，我們發現會利用體積公式來確認或判斷答案的學生，他們知道「甲容器上升部分水的體積為原本乙容器內水的體積」，所以利用體積公式來進行解題。

這些學生中，他們大部分會利用體積公式來算出乙容器內原本的水量，再使用體積公式的逆運算求出甲容器水面上升的高度來確認答案(如下表)。

方法一	方法二
$6 \times 8 \times 4 = 192$	甲： $10 \times 5 \times 4 = 200$
$192 \div (10 \times 5) = 3.84$	乙： $6 \times 8 \times 4 = 192$
	$200 + 192 = 392$
	$392 \div (10 \times 5) = 7.84$
	$7.84 - 4 = 3.84$
答：上升高度是3.84公分	答：上升高度是3.84公分

少部分的學生會利用體積公式算出甲、乙容器內原本的水量，再以甲、乙二個容器的水量不同，來推論甲容器水面上升的高度不會是 4 公分(如下表)。雖然學生未能以完整的語句清楚的敘明「水量不同，所以上升高度不同。」的理由，但依本題的評量內涵來看，學生已經能掌握「液量與體積的關係」，故仍將其歸入 2 分類型。

從上述 2 分類型的二種解題策略來看，「透過容器底面內部的長×寬的結果(底面積)來判斷」是較優的策略，因為此策略既不需要繁複的計算，也可以快速的判斷答案。因此，建議教師在課堂中可多讓學生發表不同的解題想法，分享其解題策略，學生就可以從他人的分享中發現及感受不同策略的優異，促使學生學習更優的解題策略並提升自身的解題能力。

甲容器的水量： $10 \times 5 \times 4 = 200$
乙容器的水量： $6 \times 8 \times 4 = 192$
$200 \neq 192$

## 2. 學生常見的錯誤解題想法

由 1 分及 0 分類型的作答表現來看，發現學生常見的錯誤解題的想法可分為四種類型，說明如下：

### (1) 利用容器的大小、容積、體積、容量來判斷

從學生的作答表現來看，我們可以發現此錯誤類型的學生能理解題意，他們可能知道「甲容器內水面上升部份的水量就是乙容器內原本水量」，但卻不會利用容器內的水量(液量)及其體積來解題；或許是受到之前容量學習的經驗影響，不知道容器內

部空間的液量(水量)也可以利用水量的體積來表示，所以液量(水量)與容器的大小有關，與其形狀無關；也或許是學生不能清楚分辨容積、體積、容量的定義，造成意義和名稱的混淆。

就本題的題目來看，學生無法掌握本題的評量內涵，不清楚容積與體積的關係，應該是因為對與容積相關的概念(液量、體積、容量等)不清楚或有錯誤的認知所造成的。

### (2) 利用容器底面的長、寬不同來判斷

由學生的作答表現來看，此錯誤類型學生知道「相同水量在不同容器內的水面高度與容器的底面內部的長度 $\times$ 寬度的結果(底面積)有關」，學生可能不清楚長 $\times$ 寬與長度、寬度是不同的，因為長、寬不同並不代表長 $\times$ 寬的結果(底面積)會不同，如在等積異形的情形，舉例來說，二個容器底面內部的長度、寬度分別為12公分和4公分，8公分和6公分，很明顯的，這二個容器底面內部的長、寬都不同，但他們底面內部的長 $\times$ 寬的結果(底面積)卻都是48平方公分(12 $\times$ 4=48、8 $\times$ 6=48)，顯然這個結果跟此錯誤類型學生的想法不同。因此，學生若能正確的掌握「相同水量在不同容器內的水面高度與容器的底面內部的長 $\times$ 寬的結果(底面積)有關」重點是與長 $\times$ 寬的結果(底面積)有關，就可以避免出現疏忽「等積異形」的錯誤。

### (3) 以容器的水面高度來判斷

由此錯誤類型學生的作答表現發現，多數的學生會認為甲容器水面上升的高度是乙容器原本的高度，他們可能是受到低年級學習容量單元時錯誤概念的影響(如利用量筒測量水量的經驗)，以為容器內的高度就是水量；少數的學生認為是二容器高度相加後的高度，他們除了可能受到前述學習經驗的影響外，也可能未理解題意，又看到題目中「倒入」語詞而認為要把甲、乙容器的高度相加。此錯誤類型的學生明顯沒有容積概念，對於液量的概念也是模糊不清。

## 三、 評量內涵及本題的教學建議：

本題的評量內涵為理解容積與水量(液量)體積的關係來判斷本題甲容器水面上升的高度是否正確。學生要知道「甲容器內水面上升部份的水量就是乙容器內原本水量」，就可以利用體積公式來解題，學生可以算出甲容器水面上升的高度來確認，或利用「相同水量在不同容器內的水面高度與容器的底面內部的長 $\times$ 寬的結果(底面積)有關」來計算結果來判別，亦或是計算出二容器的水量(液量)進行比較與判斷。然而，本題中要判斷答案是否正確，需要透過體積公式去連結容積與水量(液量)間的關係，並進行計算，來檢驗答案的正確性。因此，本題之教學建議如下：

### (一) 釐清容積與水量的體積、容量、液量的概念

因為容積與容量對學生而言是較抽象的概念，所以教學時應避免以直接宣告的方

式進行。就本題的學生作答的表現來看，也發現多數的學生無法正確掌握容積的概念，又常與容量、液量混淆，因此建議教師在進行教學時，可以從具體物操作開始，再讓學生進行圖像的學習，才到抽象概念的學習，以建構正確的概念。

學生在低年級時透過倒水活動來觀察討論水量(液量)的增減進而了解容器可以裝水的空間(或能盛裝的最大水量)，三年級時會進行報讀液量及檢驗容量的活動，以分公升為刻度單位的方形量杯來進行操作並學習如何正確觀察量杯刻度並報讀液量，再透過量杯來測量容器的容量；在這個活動中，學生要能理解量筒刻度與容量間的關聯，才能發展出正確的容量概念，但從本題的學生的作答表現中，發現部分學生會把水面的高度視為容量，所以教師可以讓學生再次確認容量的意義(容器可以裝水的空間或能盛裝的最大水量)，透過觀察及描述量杯的水位與刻度的變化說明水在量杯內的佔有空間的改變與量杯刻度的關係，由此學生就能知道量杯內的水量與量杯的長、寬、高是有關的，並非只與量杯的高有關。

學生在五年級時開始學習容積的概念前已具備容量的概念，教師可以讓學生由容器內部的形狀和大小開始討論，利用1立方公分積木來填滿容器，並引導學生思考「在容器內緊密堆疊積木並填滿容器的目的?」、「須多少個1立方公分積木才能填滿容器?」，再透過命名活動讓學生認識「容積就是容器內部空間的體積」。從本題的學生的作答表現中，發現部分學生不能掌握容積與容器內部空間的體積的測量物的關係，所以教師可以在學生認識容積之後，更進一步討論容器外部的長、寬、高和內部長、寬、高的差異(即容器的厚度)，要如何算出容積等，讓學生能由「容積就是容器內部空間的體積」知道用內部的長 $\times$ 寬 $\times$ 高可以計算出容器的容積，以補足學生容積概念不足，建立正確容積的概念。

針對學生在本題中所呈現的錯誤想法，教師可透過上述的具體物的操作活動來釐清學生在容積與水量的體積、容量、液量的概念。

## (二) 理解體積、容積與容量間的關係

以本題評量內涵來看，解題活動中需要理解容積和水量的體積的關係，以進行解題並才能判別答案的是否正確；從本題學生作答表現來看，也發現多數的學生的問題是無法掌握體積、容積與容量間的關係，也有不能利用正確的概念來清楚說明解題的想法，或是名稱混用的情形發生，顯示他們不清楚體積、容積與容量間的關係。因此教師在進行相教學時，可以在認識容積與容量概念後，讓學生進一步探討容積與容量的關係。以學生學習歷程來看，學生是由液量來認識容量，透過量杯測量容量的操作中知道容量是三維的概念與容器的長、寬、高有關；學生是透過操作1立方公分積木填滿(緊密堆疊)來認識容積，所以容積是體積的概念來學習的。

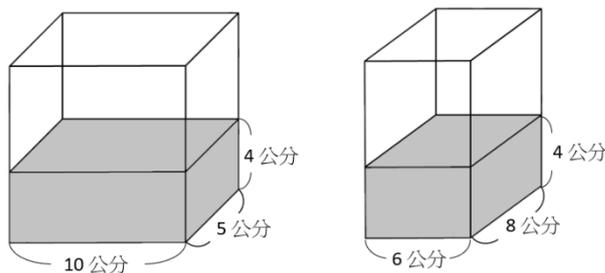
如何讓學生能察覺體積、容積與容量間的關係，教師可以利用學生之前具體物操

作活動的經驗及結果，讓學生再進一步探究，發現體積、容積和容量它們之間有什麼關聯，找出之間的相關性就能知道它們的關係。如教師可以讓學生由其舊經驗中思考，擷取相關的知識概念連結體積概念，如下：

1. 容量是容器可以裝水的空間
2. 容量是能盛裝的最大水量
3. 容量是三維的概念與容器的長、寬、高有關
4. 容器內部積木的體積代表容積
5. 容積就是容器內部空間的體積
6. 用容器內部的長 $\times$ 寬 $\times$ 高可以計算出容器的容積

讓學生從中發現容積和容量都和體積有關，透過體積可以串聯容積和容量；利用體積公式可以算出水量的體積就可以知道容量，若將水取代積木倒滿容器中，水量的體積就是積木的體積，也是容積，也是容量；教師亦可讓學生以容器內部空間的體積大小來描述容積和容量，讓學生覺察透過體積可以串聯容積和容量的關係。因此，學生就能理解體積、容積與容量間的關係。

回到本題來看，教師可以讓學生進一步去思考「把乙容器的水全部倒入甲容器，甲容器的水面會上升多少？」(如下圖)，



以問題來看，甲容器的水面會上升的高度與乙容器的水量和甲容器內部空間的長、寬、高有關，觀察圖示，透過體積、容積與容量間的關係來看，乙容器的水量的體積會等於甲容器的水面會上升的高度的體積，學生可由等式二邊察覺當二邊的高一樣時，二邊的長 $\times$ 寬的結果也要一樣。透過這樣的發現，學生可以將體積、容積與容量間的關係運用的更廣，提升學生的解題思考的能力。

### (三) 加強使用完整語句來陳述數學概念並說明判斷的理由

從本題學生答題的表現來看，學生會以算式做法來說明理由，我們可以清楚知道學生解題的想法是否正確，但若學生是以文字來去敘明理由時，如學生回答「容器的長、寬不同」、「容器的容積不同」、「容器的大小不同」、「容器的體積不同」等，我們無法真正了解他們所要表達的意思或擁有怎樣的觀念，或許學生知道「將相同水量倒入不同容器內，其水面的高會與容器內部底面的長 $\times$ 寬的結果(底面積)有

關。」但卻以「容器的長、寬不同」來說明，但長、寬不同不代表長度×寬度的結果會不同，所以從他們的回答中教師不能確認學生的想法是否正確。以本題為例，教師在教學時，發現學生回答的答案不夠清楚或不完整時，可以透過提問讓學生說出他知道的數學的概念及想法，再請學生以完整語句來陳述數學概念並說明判斷的理由，舉例如下；

甲容器長 10cm，寬 5cm，底部面積是  $50\text{cm}^2$

乙容器長 8cm，寬 6cm，底部面積是  $48\text{cm}^2$

兩者底部面積不同，所以倒入相同水量時，水高不可能一樣。

透過這樣的練習，學生就能漸漸掌握以完整語句來陳述數學概念，說明理由及表達想法，不僅可以提升學生說理的能力，也可以幫助他們的概念學習，甚至可能提高學生學習的動機及興趣。