

# 新北市 108 學年度國小數學檢測非選擇題學生解題分析及教學建議報告

## 一、試題內容及評閱規準：

分年細目	5-s-07 能理解長方體和正方體積的計算公式，並能求出長方體和正方體的表面積	知識向度	量與實測		
評量內涵	理解長方體體積公式	認知層次	程序執行		
試題內容	<p>黑板上畫了一個長方體，並標示了三個邊長的長度，如右圖。老師問學生可以算出長方體的體積嗎？</p> <p><u>小威</u>的做法：</p> <p>長方體有三個邊長就可以算體積</p> <p><math>6 \times 10 \times 10 = 600</math>      答：長方體的體積是 600 立方公分。</p> <p>你認為<u>小威</u>的做法正確嗎？請寫出你的理由。</p> <p>作答欄：</p>				
	<table><tr><td>(1) <u>小威</u>的做法正確嗎？</td><td>(2) 我的理由：</td></tr></table>			(1) <u>小威</u> 的做法正確嗎？	(2) 我的理由：
	(1) <u>小威</u> 的做法正確嗎？	(2) 我的理由：			
評閱類別及規準	類別	評閱規準	評閱說明		
	2A	判斷 <u>小威</u> 的做法不正確。能指出題目本身條件不足（缺少長、寬、高其中一個條件），並利用體積公式說明 <u>小威</u> 的做法錯誤。	<u>小威</u> 的做法不正確。因為題目沒有說明寬幾公分，只有提供長和高，體積公式是「長×寬×高」， <u>小威</u> 的做法是「長×長×高」，所以答案是錯的。		
	2B	判斷 <u>小威</u> 的做法不正確。只指出題目本身條件不足來說明 <u>小威</u> 的做法錯誤。	<u>小威</u> 的做法不正確。因為題目少寫了其中一個邊的長度，因此 <u>小威</u> 不可能算得出來。 <u>小威</u> 的做法不正確。因為題目少寫了一個寬（或長、或高），所以 <u>小威</u> 算不出來。		

	2C	判斷 <u>小威</u> 的做法不正確。 從體積公式中指出小威的算式有兩個數字都是代表同一組邊長，說明 <u>小威</u> 的做法錯誤。	不正確。因為兩個 10 公分都是長， <u>小威</u> 的算式是「長×長×高」，應該要是「長×寬×高」才對。
		不正確，因為 <u>小威</u> 的算式中兩個 10 公分指的都是同樣的邊長。	
	2X	答題正確，但不屬於上述 2A、2B 或 2C 類型	
	1A	判斷 <u>小威</u> 的做法不正確。 透過自行假設圖中未提供的一個邊長數字，進行體積的計算來說明 <u>小威</u> 的做法不正確。	<u>小威</u> 的做法不正確。不正確。 應該是 $6 \times 2 \times 10 = 120$ 才對。
	1B	判斷 <u>小威</u> 的做法不正確，只利用體積公式的口訣而沒有清楚說明長寬高與圖示的關係，理由不完整。	<u>小威</u> 的做法不正確。 因為「長×寬×高」。
	1C	判斷小威的做法不正確，以計算表面積的方式進行體積的計算，理由錯誤。	
	1D	判斷 <u>小威</u> 的做法不正確。但理由錯誤或空白。	(略)
	1X	能正確判斷，但不屬於上述 1A、1B 或 1C 類型	
	0A	判斷 <u>小威</u> 的做法是正確的。 認為直接利用題目提供的三個數字相乘就是體積。	正確。 $6 \times 10 \times 10 = 600$ 他算對了！
	0B	判斷 <u>小威</u> 的做法是正確的。 認為題目提供的三個數字就是長、寬、高。	正確。因為 <u>小威</u> 的算式就是「長×寬×高」。
	0C	判斷 <u>小威</u> 的做法是正確的。 但理由錯誤或無法寫出理由。	(略)
	0X	其他錯誤類型，但不屬於上述類型	
	99	空白	

## 二、評閱結果：

### (一)本題學生作答情形

類 型	2			1					0					合計
	2A	2B	2C	1A	1B	1C	1D	1X	0A	0B	0C	0X	99	
人 數	339	931	334	24	276	79	244	4	128	393	84	58	54	2948 人
百 分 比 (%)	11.5	31.6	11.3	0.8	9.4	2.7	8.3	0.1	4.4	13.3	2.8	2	1.8	
人 數	1604			627					717					
百 分 比 (%)	54.4			21.3					24.3					

依上表可看出有五成四的學生得分為 2 分，約二成的學生得 1 分，約二成四的學生得 0 分。得分 2 分的學生佔 54.4%，其中有二成一的學生能同時指出題目本身條件不足，並且能利用體積公式說明做法錯誤的原因；有五成八的學生能指出題目本身條件不足，有二成的學生能看出算式中的兩個數字其實是代表同一組邊長。得 1 分的學生佔 21.3%，其中四成四的學生說理不完整，雖知道公式，但無法清楚說明公式與題目中「小威」做法的關係；有五成的學生雖知道「小威」的做法不正確，但說理錯誤或空白。至於得 0 分的學生佔 24.3%，其中近二成的學生，認為只要 3 個數字相乘就是體積；而另外五成五的學生認為題目提供的三個數字就是長、寬、高，無法連結算式與題目的關係。

### (二) 學生答題類型分析

類型	學生作答舉隅(照片)	作答舉隅分析
2A		學生能看出題目中少了一組邊長，也了解欲求體積，需要長方體的長寬高。
2B		學生能從題目中的長方體給定條件中看出了少了寬。

2C	<p>(2) 我的理由：</p> <p>因為長方體的體積是長<math>\times</math>寬<math>\times</math>高，不過那兩個10都是長，所以就變成了長<math>\times</math>長<math>\times</math>高了，所以不正確。</p>	學生能發現題目中的10公分是代表同一組邊長。
1A	<p>(2) 我的理由：寬：<math>10-6=4</math></p> <p><math>10 \times 4 \times 6 = 40 \times 6 = 240</math> A: 240 cm</p> <p>因該要先長<math>\times</math>寬<math>\times</math>高</p>	學生自行假設一數字，代表缺少的邊長，再進行體積公式計算。
1B	<p>(2) 我的理由：</p> <p>因為體積的算法是長乘以寬乘以高。</p>	學生僅背誦公式，但無法清楚說理。
1C	<p>(2) 我的理由：</p> <p>長方體不能只有三個邊長計算，要先算上下然後左右及前後，每個算完後再加起來。</p>	學生混淆長方體體積與長方體表面積的計算方式。
1D	<p>(2) 我的理由：</p> <p>因為長方形體積是長<math>\times</math>寬<math>\times</math>高，提高<math>\times</math>長<math>\times</math>寬。</p>	不理解長方體體積公式的真正意涵。
0A	<p>(2) 我的理由：</p> <p>因為長體的公式是長<math>\times</math>寬<math>\times</math>高，如果數字放不一樣沒關係，只要三個數字相乘就可以了。</p> <p>位置</p>	學生認為僅需三個數字相乘即代表長方體體積
0B	<p>(2) 我的理由：因為長方形的體積公式是長<math>\times</math>寬<math>\times</math>高，所以小威的方法是正確的</p>	學生認為小威的做法是正確的，無法區辨長寬高。
0C	<p>(2) 我的理由：</p> <p>有用邊長<math>\times</math>邊長<math>\times</math>邊長</p>	學生對各種公式產生混淆
0X	<p>因為我的老師是這樣子教我的</p> <p>就</p>	學生無法說明理由

## 1. 學生正確的多元解題策略

從學生的 2 分類型中，發現學生的作答類型可分為兩大類：

### (1) 學生能察覺題目本身條件不足，缺少一組邊長無法求體積

本題中，黑板上的題目雖標示了三個邊的長度，但其實其中兩個邊的長度是指同一組邊長，在此 2 分類型的學生中能清楚指出缺少長、寬、高其中一個條件，亦即此 2 分類型的學生不僅看出題目中兩個邊的長度是指同一組邊長，且能清楚說出題目本身條件不足，對於長方體的長、寬、高能清楚辨識及活用，知道少了其中一個條件就無法求體積。

### (2) 學生能發現題目的做法中，有兩個數字都代表同一組邊長

此兩分類型的學生能從小威的算式中，察覺兩個 10 公分指的都是同樣一組邊長，並透過公式「長 $\times$ 寬 $\times$ 高」，說明小威的算式其實是「長 $\times$ 長 $\times$ 高」，因此判斷小威的做法不正確。此類型的學生亦能清楚指認長方體的長、寬、高。

由以上學生的 2 分類型中，可看出學生對於求解長方體體積必要條件的認識，其中有二成一的學生論述相當完整，不僅能發現小威的做法中有兩個數字代表同一組邊長，更能透過體積公式加以說明題目本身條件不足，更是 2 分例中的優例。

## 2. 學生常見的錯誤解題想法

從學生的 1 分類型及 0 分類型中，可歸納出學生常見的錯誤想法如下：

### (1) 無法指認長方體的長、寬、高

本題中小威求解長方體的體積做法中，一樣有三個數字相乘，學生無法區辨何者為長、何者為寬、何者為高，認為直接利用題目提供的三個數字相乘就是長方體體積。

### (2) 死記體積公式，無法活用體積公式

此類學生雖能背誦長方體體積公式是「長 $\times$ 寬 $\times$ 高」，但卻並非真正理解，對公式的解讀是要先乘長，再乘寬，再乘高，因此認為小威的做法中，先乘高，再乘長，再乘寬，是不正確的。此類學生認為小威的做法錯誤，6 是高，不能寫在算式的前面，要寫成「 $10\times 10\times 6$ 」才正確！

### (3) 學生對各種公式產生混淆

此類學生對各類公式所代表意義不清楚，因此以長方形面積公式、長方體表面積公式、…進行計算，更有甚者自創公式，加以乘 2 或除 2，不知道自己所求為何。

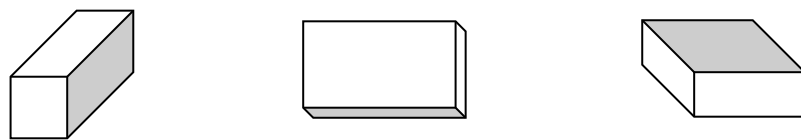
## 三、評量內涵及本題的教學建議：

本題評量重點在於學生能否掌握「長方體體積」概念，進而解決生活問題。學生在本題小威的做法中，是否能「指認長方體的長、寬、高」和「理解體積公式」，是本題的評量重點。本題之教學建議如下：

### (一) 建立長方體概念與長、寬、高的心象及關係，並區分體積與面積的差異

長方體有三組邊長，分別為長、寬、高，長邊、寬邊、高的指認與邊長的長短、

方向無關，能順利溝通即可。以本題為例，10 公分的邊，可為長邊，亦可稱寬邊，亦可稱高，同一個長方體，若由不同的學生來指認長、寬、高，每個學生指認的長、寬、高可以是不同的。因此，教師在教學時應以動態表徵的方式，讓學生上台指認長、寬、高，透過動態表徵，能將同一個長方體的三組邊長以長、寬、高的語言溝通，以建立心象。此外，即使是同一個長方體，可能因擺放的位置不同，或視角不同(如下圖)，同一個學生所指認的長寬高也可能是不同的，只要是正確、能與他人溝通即可。



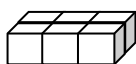
教師在進行長方體長寬高的指認教學時，除了給學生長方體的實體或平面圖，學生要能表徵出該長方體的長寬高之外，學生也要具備有看到長寬高的數字，學生能在心中產生該長方體體積心象的能力。若能掌握此兩層次，學生心中的長方體心象才算完備。

當學生在心中能產生長方體體積心象時，可再進一步區辨長方體體積與表面積的不同關係。長方體體積是指該長方體在空間中所佔的大小，透過堆疊白色積木可明顯感受。長方體表面積指的是此長方體六個矩形的面積總和，可透過塗滿每一面的方式澄清。

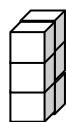
## (二) 區辨長方體視圖上標示數字與三組邊長(長、寬、高)及公式的對應

教師在進行評量時，除了一般例行性提供長方體的長寬高邊長讓學生計算體積外，也可如本題般，雖提供三個數字，但其中兩個數字其實代表同一組邊長，在題目中刻意少了一組邊長，去檢測孩子們是否能正確指認長方體的長寬高。又或者在長方體視圖上提供四個數字，檢測學生是否能了解其中兩個數字其實代表同一組邊長，由此評量學生是否能正確在長方體視圖上正確指認長寬高。

從立體的長方體到平面的長方體視圖，學生都能正確指認長方體的長寬高之後，透過堆疊白色積木讓學生理解長方體公式的由來。若長邊是 3 公分，則排放 3 個白色積木，寬邊是 2 公分則排放 2 個白色積木，此時的高為 1 公分，白色積木所圍成的長方體體積是  $3 \times 2 \times 1 = 6$  立方公分(如圖二)；換個角度擺放，長可以是 2 公分，寬可以是 1 公分，高是 3 公分，體積仍是 6 公立方公分(如圖三)。教師應能讓學生從不同的角度觀察長方體因為擺放方式的不同，或視圖呈現的角度不同，而產生不同的長寬高，但都不影響其體積大小，仍是同一個長方體體積，即  $3 \times 2 \times 1 = 6$ 、 $2 \times 1 \times 3 = 6$  打破僵化的公式口訣背誦，靈活的對應長方體長寬高與體積公式間的關係。



圖二



圖三