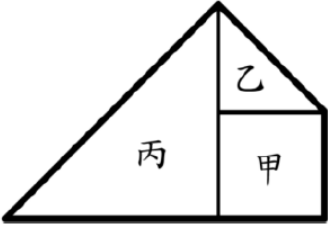


# 新北市 106 學年度國小數學檢測非選擇題學生解題分析及教學建議報告

## 一、試題內容及評閱規準：

分年細目	5-S-05 能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。		知識向度	概念
評量內涵	三角形面積公式		認知層次	應用
試題內容	<p>學校有一個花圃，是由一個「正方形甲」和兩個「等腰直角三角形乙、丙」組成，如下圖。<u>小華</u>量了甲的周長是 36 公尺，那麼丙的面積是多少平方公尺？請寫出你的做法和答案。</p> 			
評閱規準	類別	評閱說明	評閱舉隅	
	2A	由正方形甲的周長 36 公尺找出乙的邊長，進而推算出三角形丙的邊長，正確算出三角形丙的面積	邊長 $36 \div 4 = 9$ (公尺) $9 + 9 = 18$ (公尺) 丙面積 $18 \times 18 \div 2 = 162$ (平方公尺)	
	2B	用面積關係推論 由乙的面積是甲面積的一半，來推算出丙的面積是甲的兩倍或丙的面積是 1 個甲的面積加上 2 個乙的面積	甲的邊長是 9 公尺，甲的面積是 81 平方公尺，所以丙是 $81 \times 2 = 162$ 平方公尺	
			甲的邊長是 9 公尺 甲的面積是 81 平方公尺。 乙的面積是 $9 \times 9 \div 2 = 40.5$ 平方公尺 $81 + 40.5 + 40.5 = 162$ (平方公尺)	
	2C	利用切割重組的方式，透過邊長關係正確算出三角形丙的面積	將丙切割重組使成為一長方形 長邊 $36 \div 2 = 18$ (公尺) 寬邊 $18 \div 2 = 9$ (公尺) 面積 $18 \times 9 = 162$ (平方公尺)	
	1A	雖列式正確但計算錯誤，以致答案錯誤	$36 \div 4 = 8$ (公尺) $8 + 8 = 16$ (公尺) $16 \times 16 \div 2 = 128$ (平方公尺)	
	1B	雖然三角形面積推論關係正確，但因將甲的周長誤認為邊長，因此錯誤判斷甲的邊長，以致無法正確求解	$36 + 36 = 72$ (公尺) $72 \times 72 \div 2 = 2592$ (平方公尺)	

	1C	單位錯誤或未標註單位	將平方公尺誤寫為平方公分、立方公尺或未標註單位
	1D	由甲的周長推論邊長正確，但三角形面積公式運用錯誤	$36 \div 4 = 9$ (公尺) $18 \times 18 = 324$ (平方公尺)
	1X	答題部分正確，但不屬於上述 ABC 類型	
	0A	僅能從正方形甲的周長找出邊長，但無法依序求解	$36 \div 4 = 9$ (公尺)
	0X	其他錯誤類型，但不屬於上述類型	
	99	空白	

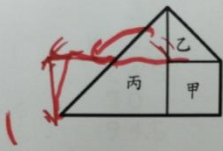
## 二、評閱結果：

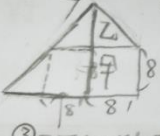

### (一)本題學生作答情形

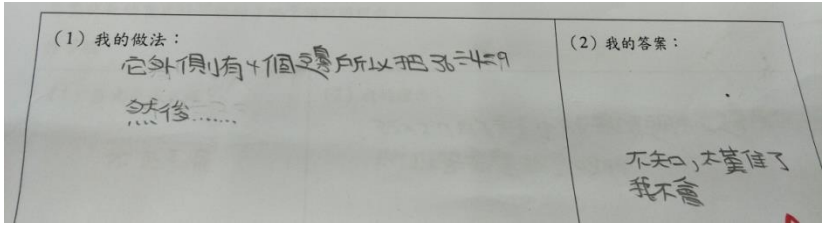
類型	2			1					0		99	合計
	2A	2B	2X	1A	1B	1C	1D	1X	0A	0X	99	367 人
人數	113	10	1	19	8	11	15	1	44	113	32	
百分比 (%)	30.8	2.7	0.3	5.2	2.2	3	4	0.3	12	30.8	8.7	
人數	124			54					189		100	
百分比 (%)	33.8			14.7					51.5			

在本題中大部分的學生獲得 0 分，有高達 51.5%，獲得 2 分的學生佔 33.8%，獲得 1 分的學生佔 14.7%。有 33.8% 的學生獲得 2 分，表示學生能掌握複合圖形的邊長及面積關係並能熟練運用三角形面積公式求解，而有 14.7% 的學生獲得 1 分，表示學生對於三角形面積公式的由來及運用仍不太清楚，對於面積單位的掌握也不夠明確。有 51.5% 的學生為 0 分，顯見複合圖形及三角形面積公式的運用對於學生而言仍屬困難，0 分群中有兩成的學生只能從周長推論邊長，對於複合圖形中等腰三角形的腰長與正方形邊長的關係尚不能推論。

## (二) 學生答題類型分析

得分	類型	解題範例(學生作答照片)	解題類型分析
2	2A	<p>作答欄：</p> <p>(1) 我的做法：</p> $36 \div 4 = 9$ <p>那個 甲跟乙共用一個邊所以邊會是9公分</p> <p>乙是等腰直角三角形，兩個等腰直角三角形會等於一個正方形，正方形每個邊等長，所以乙三角形的高會是9公分，<math>9+9=18</math>，丙的高是18公分，丙的高也等於底，因為丙是等腰三角形，<math>18 \times 18 \div 2 = 162</math></p> <p>(2)</p>	學生能從正方形甲的周長推論乙的邊長，再從乙的邊長推論丙的邊長，進而運用三角面積公式正確求解。
	2B	<p>作答欄：</p> <p>(1) 我的做法：把 <math>36 \div 4 = 9</math> 在把一個等腰直角三角形切成兩個正方形甲</p> $9 \times 9 = 81$ $81 \times 2 = 162$ <p>(2) 我的答案：162平方公尺</p>	學生能透過正方形面積與等腰直角三角形面積關係推論出丙的面積等於兩個甲的面積。
	2C	<p>學校有一個花園，是由一個「正方形甲」和兩個「等腰直角三角形乙、丙」組成，如下圖。小華量長是36公尺，那麼丙的面積是多少平方公尺？請寫出你的做法和答案。</p>  <p>作答欄：</p> <p>(1) 我的做法：<math>36 \div 2 = 18</math> <math>18 \div 2 = 9</math> <math>18 \times 9 = 162</math></p> <p>(2) 我的答案：162平方公尺</p>	學生藉由切割平移方式將丙的面積視為一個長方形面積，並透過邊長關係順利求解。

		<div data-bbox="320 150 1145 477" data-label="Complex-Block"> <div>(1) 我的做法：</div> <math display="block">36 \div 4 = 9</math> <p>丙： <math>9 \times 9 = 81</math></p> <math display="block">(9 \times 9 + 9 \times 9) \div 2</math> <math display="block">= (81 + 81) \div 2</math> <math display="block">= 162 \div 2</math> <math display="block">= 81</math> <math display="block">81 + 81 = 162</math> <div>(2) 我的答案：</div> <math display="block">A = 162 m^2</math> </div>	學生將丙切割為一個正方形和兩個等腰直角三角形。並運用等腰直角三角形面積是正方形面積的一半順利求解。
	1A	<div data-bbox="320 539 1145 952" data-label="Complex-Block"> <div>(1) 我的做法：</div> <math display="block">36 \div 4 = 9</math> <p>丙</p> <p>① 丙是等腰直角三角形 所以每個邊都一樣長</p> <p>② 甲的長是丙的一半</p>  <p>③ 甲可以移到丙三角形的範圍裡 所以已經確定其中的一條邊是 8</p> <div>(2) 我的答案：</div> <p>甲的邊長 = 8 m</p> <math display="block">8 \times 2 = 16</math> <math display="block">16 \times 16 \div 2 = 128</math> <math display="block">A = 128 m^2</math> </div>	學生能清楚說明甲乙丙三者之間的關係，但因為一開始計算錯誤而無法順利解出
	1B	<div data-bbox="320 969 1145 1245" data-label="Complex-Block"> <div>(1) 我的做法：</div> <math display="block">36 + 36 = 72</math> <math display="block">72 \times 92 \div 2</math> <math display="block">= 3184 \div 2</math> <math display="block">= 2592</math> <div>(2) 我的答案：</div> <math display="block">A = 2592 m^2</math> </div>	學生誤將甲的周長視為甲的邊長進行計算
1	1C	<div data-bbox="320 1272 1145 1615" data-label="Complex-Block"> <div>做法：</div> <math display="block">36 \div 4 = 9</math> <math display="block">9 \times 2 = 18</math> <math display="block">18 \times 18 \div 2</math> <math display="block">= 324 \div 2</math> <math display="block">= 162</math> <div>(2) 我的答案：</div> <math display="block">36 \div 4 = 9</math> <math display="block">9 \times 2 = 18</math> <math display="block">18 \times 18 \div 2</math> <math display="block">= 324 \div 2</math> <math display="block">= 162</math> </div>	學生未能正確寫出面積單位
	1D	<div data-bbox="320 1641 940 2011" data-label="Complex-Block"> <p>作法：</p>  <div>(1) 我的做法：</div> <math display="block">36 \div 4 = 9</math> <math display="block">18 \times 18 = 324</math> <div>(2) 我的答案：</div> <math display="block">324 m^2</math> </div>	學生周長邊長關係皆能正確推論，但三角形面積公式錯誤

0	0A		學生僅能由甲的周長推論甲的邊長
---	----	--	-----------------

## 1. 學生多元解題類型：

學生獲得 2 分的作答類型中，可分成由第一類「邊長關係推論丙面積」及由第二類「甲面積推論丙面積」兩大類，其中第二類又可細分成三部分。

第一類型的學生能從甲正方形的周長 36 公尺算出甲的邊長 9 公尺，再透過甲正方形的邊長即是乙等腰直角三角形的底和高，據此得到丙的底和高是由甲正方形邊長 9 公尺加上乙的高 9 公尺合起來是 18 公尺，就可藉由三角形面積公式順利求解。第一類型的學生熟知正方形及等腰三角形邊長性質，及邊長與周長的關係，對於三角形的面積公式也有正確的理解，因此能順利作答。

第二類型的學生是透過找出甲、乙、丙三者面積之間的關係，再由「甲面積推論丙面積」進一步求解。其中，又可分成三部分：第一部份的學生透過切割重組將丙面積視為兩個甲面積結合而成，因此求出甲的面積 81 平方公尺即可推論丙的面積為 162 平方公尺。第二部份的學生透過切割將丙的面積視為一個甲的面積加上兩個乙的面積，而其中乙的面積又是甲面積的一半，因此雖未運用三角形面積公式仍能順利求解。第三部份的學生透過切割丙的上半部平移至左方(或切割左半部平移至上方)使成為一長方形，再透過長方形面積公式求解丙的面積。第二類型的學生雖未直接帶入三角形面積公式，但能活用正方形、等腰直角三角形、長方形邊長及面積關係。

由上述解題類型可看出學生的多元解法，2 分類型學生清楚正方形、等腰直角三角形的性質及邊長與周長之關係，理解並靈活運用公式；此外，透過在心象中切割平移重組面積也能順利求解，教師在教學時提供具體操作的經驗將豐富學生的解題思維。

## 2. 學生常見錯誤類型：

### (1) 不理解三角形面積公式：

學生在解題時雖能正確從正方形甲周長 36 公尺推論正方形甲邊長 9 公尺，並從正方形甲邊長 9 公尺得知等腰三角形乙的底和高均為 9 公尺，且等腰三角形丙的底和高為 18 公尺的關係，但因為不理解三角形面積的求法，不清楚計算 18 乘以 18 是什麼意思，以至於最後計算丙等腰三角形面積時只計算底乘以高，可能只是誤背口訣而非真正理解，因此無法正確求解三角形面積。

(2)正方形的邊長、周長混淆：

學生可能將周長誤認為邊長，直接用正方形周長 36 公尺作為正方形邊長 36 公尺進行推論與計算，也可能是邊長、周長不分，混淆不清，不清楚周長與邊長的關係。

(3)正方形、等腰直角三角形邊長關係不清楚：

學生僅能由正方形甲周長 36 公尺推論正方形甲邊長是 9 公尺，但不理解正方形四邊等長以及等腰三角形兩腰等長的關係，因此無法推論丙三角形的底與高。

(4)未察覺圖形中的共用邊：

此題是一複合圖形，正方形甲的邊長 9 公尺即是等腰三角形乙的底 9 公尺，且等腰三角形丙的高 18 公尺即是正方形甲的邊長 9 公尺和等腰三角形乙的高 9 公尺之和，學生未能察覺此一關係，因此無法順利作答。

(5)計算、單位標示錯誤：

學生觀念雖正確，能成功推論關係並列式計算，但計算出現錯誤，或雖能順利算出但單位標示錯誤，皆無法成功解題。顯見學生計算能力及正確標示面積單位仍需加強。

三、評量內涵及本題的教學建議：

本題透過掌握正方形甲周長 36 公尺算出甲的邊長 9 公尺，再藉由正方形四邊等長性質及等腰三角形兩腰長相等性質，求出乙等腰三角形的底和高亦為 9 公尺，再藉由理解複合圖形中三角形丙的底和高 18 公尺即是三角形乙的高 9 公尺和甲正方形邊長 9 公尺的和，可藉由三角形面積公式計算即能順利求解。是否能正確理解並運用三角形面積公式，或是否能從既有正方形甲提供的線索找出甲、丙之間的關係，解出等腰三角形丙的面積是為本題的評量重點。

(一)透過繪圖、實際測量掌握正方形、等腰三角形邊長性質：

學生對正方形、等腰三角形的邊長關係未能活用，顯見對正方形四邊等長、等腰三角形兩腰長相等的性質認識不足。我們仍需透過讓學生實際測量等腰三角形的腰長、正方形的邊長，讓學生重新認識此一重要性質。此外，教學時，教師亦可增加學生繪圖的經驗，例如給學生一個邊長長度，讓學生實際畫出正方形、等腰三角形，於平時的教學即能建立學生心象，並加深學生正方形四邊等長，等腰三角形兩腰長相等的認識。

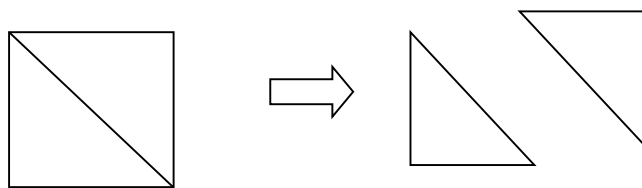
(二)在複合圖形中找關係，理解共用邊：

單一基本圖形能掌握後，教師可多提供複合圖形的布題，讓學生試著在複合圖形中找出關係，引領學生分析複合圖形是由哪些圖形組成的？而這些圖形中有哪些是共用邊？圖形中各圖形的邊長、底、高、面積有哪些關係？增加學生推論的經驗。



### (三)透過切割重組理解三角形面積：

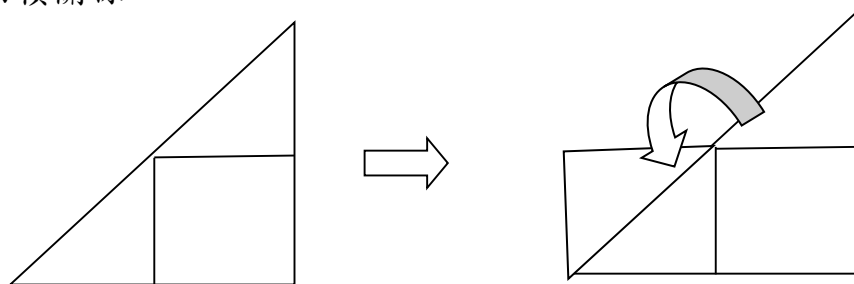
學生對於正方形面積、長方形面積公式的意義及由來均不陌生，但如何藉由正方形面積及長方形面積推論至三角形面積即是教學時應留意的部份。教學時，教師應讓學生實際經驗將一個正方形(或長方形)切割成兩個全等的直角三角形，並據此求出三角形的面積(如圖一)。因為有實際的操作經驗，學生才能理解為什麼底乘以高之後還要除以二。教學時，教師應不斷的透過動態豐富的手勢動作，再三向學生確認正方形(長方形)面積在哪裡？三角形面積又在哪裡？連結操作活動與面積公式，讓學生對於三角形面積公式能有真正理解。



圖一：透過切割重組理解三角形面積公式的意義

### (四)幾何教學應透過大量操作豐富學生的心象：

幾何教學中，學生是否能在心中形成心象是教師應該留意的重點。教師可透過實際繪圖、實際切割重組，運用圖象表徵……等，來協助學生形成心象。有豐富操作經驗的學生，不論是實際操作或是圖象表徵，學生自然能在心中形成心象。以本題為例，學生可將本題自由切割，再進行重組，重組後的圖形可以是兩個甲、一個甲加上兩個乙或是一個新的長方形(如圖二)，透過切割重組不僅能正確理解三角形面積，也能靈活推論面積關係。



圖二：透過切割重組豐富學生的解題思維