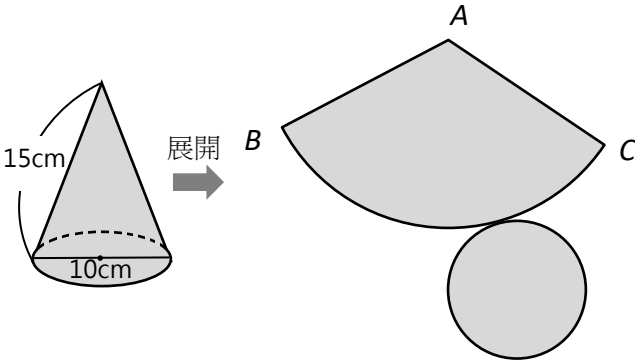


107學年度新北市國小五年級數學能力檢測試題分析

(一) 選擇題試題分析

第1題

知識向度	幾何	認知向度	概念理解																												
對應分年細目	5-s-06 能認識球、直圓柱、直圓錐、直角柱與正角錐。																														
題目	<p>一個圓錐體的展開圖(如下圖)，線段 AB 的長度是幾公分？</p> <div></div> <p>① 5 公分 ② 10 公分 ③ 15 公分 ④ 30 公分</p>																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：3</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.02</td><td>0.03</td><td>0.93</td><td>0.02</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.005</td><td>0.1</td><td>0.94</td><td>0.003</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.05</td><td>0.06</td><td>0.82</td><td>0.07</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：3	選項率	0.02	0.03	0.93	0.02	0.00		高分組	0.005	0.1	0.94	0.003	0.00		低分組	0.05	0.06	0.82	0.07	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：3																									
選項率	0.02	0.03	0.93	0.02	0.00																										
高分組	0.005	0.1	0.94	0.003	0.00																										
低分組	0.05	0.06	0.82	0.07	0.00																										

一、 試題分析

(一) 數據解析：

本題鑑別度為 0.16，全體通過率為 0.93，試題難易度 0.9。

(二) 評量目標說明：

本題主要要測驗學童是否能從圓錐的展開圖中找出與圓錐相對應的部位。

(三) 選項表現說明：

1. 有 1.84% 的學生選擇選項 1，誤以為圓錐底圓展開後 AB 線段是圓錐底圓的半徑。
2. 有 2.65% 的學生選擇正確選項 2，誤以為圓錐底圓展開後 AB 線段是圓錐底圓的直

徑。

3. 有 93.13% 的學生選擇選項 3，顯示有九成多的學生已經知道如何從圓錐的展開圖中找出與圓錐相對應的部位。
4. 有 2.31% 的學生選擇選項 4，了解圓錐的側面展開之後是扇形，但誤以為 AB 線段是側面展開的直徑，故從圓錐側邊長推算直徑。

(四) 學生表現說明：

1. 本題命題設計直接給一個圓錐，再給一個展開圖，要求學生依照圖示找出展開圖中與圓錐相對應的部位，主要希望學生能夠分辨圓錐展開圖扇形的兩邊與圓弧曲線，分別對應為圓錐的側邊長與圓錐底面圓周。
2. 本題通過率為 93%，高分組學生通過率高達 98.47%，顯示高分組學生，對於圓錐以及從圓錐的展開圖中找出與圓錐相對應的部位觀念，掌握清楚並能解題。而低分組學生通過率也高達 82.34%，顯示低分組的學生對於本題的圓錐展開圖與圓錐相對應部位清楚，因此可順利解題，推測本題低分組通過率較高可能原因是因為本題所給定的圖示與教課書課例圖示相似度高，因此大部分學生多能掌握。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）：

(一) 評量重點：

5-s-06 能認識球、直圓柱、直圓錐、直角柱與正角錐。

(二) 先備的知識：

3-s-06 能透過操作，將簡單圖形切割重組成另一已知簡單圖形。

(三) 連結的知識：

5-s-07 能理解長方體和正方體體積的計算公式，並能求出長方體和正方體的表面積。

(四) 延伸的知識：

6-s-01 能利用幾何形體的性質解決簡單的幾何問題。

6-s-05 能理解簡單直柱體的體積為底面積與高的乘積。

十二年國教課綱（學習內容）：

(一) 評量重點：

S-5-7 球、柱體與錐體：以操作活動為主。認識球、(直)圓柱、(直)角柱、(直)角錐、(直)圓錐。認識柱體和錐體之構成要素與展開圖。檢查柱體兩底面平行；檢查柱體側面和底面垂直，錐體側面和底面不垂直。

(二) 先備的知識：

S-3-3 圓：「圓心」、「圓周」、「半徑」與「直徑」。能使用圓規畫指定半徑的圓。

S-3-4 幾何形體之操作：以操作活動為主。平面圖形的分割與重組。初步體驗展開圖如何黏合成立體形體。知道不同之展開圖可能黏合成同一形狀之立體形體。

S-4-7 三角形：以邊與角的特徵認識特殊三角形並能作圖。如正三角形、等腰三角形、直角三角形、銳角三角形、鈍角三角形。

S-4-8 四邊形：以邊與角的特徵（含平行）認識特殊四邊形並能作圖。如正方形、長方形、平行四邊形、菱形、梯形。

（三）連結的知識：

S-5-2 三角形與四邊形的面積：操作活動與推理。利用切割重組，建立面積公式，並能應用。

S-5-4 線對稱：線對稱的意義。「對稱軸」、「對稱點」、「對稱邊」、「對稱角」。由操作活動知道特殊平面圖形的線對稱性質。利用線對稱做簡單幾何推理。製作或繪製線對稱圖形。

S-5-6 空間中面與面的關係：以操作活動為主。生活中面與面平行或垂直的現象。正方體（長方體）中面與面的平行或垂直關係。用正方體（長方體）檢查面與面的平行與垂直。

（四）延伸的知識：

S-6-4 柱體體積與表面積：含角柱和圓柱。利用簡單柱體，理解「柱體體積＝底面積×高」的公式。簡單複合形體體積。。

三、教學建議

（一）評量核心概念：

了解圓錐體由一底圓及一扇形構成，並能找出圓錐體與展開圖的對應關係。

（二）學生常見的錯誤類型／迷思概念：

無法在圓錐體與展開圖中找出對應部位：學生無法從圓錐體的立體圖示中，在未實際操作剪開成展開圖下，無法將展開圖中的部位對應回圓錐體的立體圖示中，因此，當題目要求找出展開圖扇形的一邊半徑線段時，便從已圓柱體中熟知的圓錐底圓其直徑來推算答案，或是從圓錐體中找與展開圖相近可能的線段來推算答案。

（三）核心概念的教學重點：

1. 教學時，首先要提供實際的圓錐立體形體，讓學生了解認識錐體都有一底面，而上方則有一頂點，錐體側面和底面不垂直。在觀察圓錐的立體形體時，引導學生發現圓錐體上有兩個面，一個平面一個曲面，平面為圓錐底面——圓，圓錐體的頂點在圓心的正上方，而另一個曲面可以被攤開壓平成一個扇形。。
2. 除了接觸立體形體，認識其特徵之外，要讓學生經驗從立體形體展開成展開圖，也能從展開圖黏貼成立體形體。當學生將圓錐立體形體剪開成展開圖，引導學生檢查圓錐的展開圖，能看到一個扇形，扇形弧長是底圓的圓周長，半徑則是側邊長。

(四) 本題教學的加強重點：

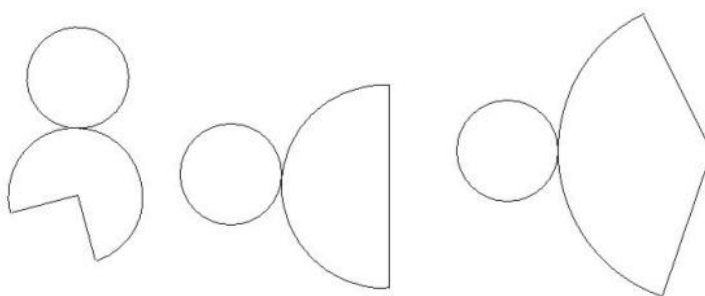
解題時教師可依下列步驟做為參考，幫助學生解決問題：

步驟一： 實際接觸圓錐的立體形體，認識圓錐的特徵，有一底面為圓，上方有一頂點，側面為一曲面。

步驟二： 讓學生實際操作，將圓錐的立體形體剪開，側面展開成一扇形，接著再讓學生操作將此展開圖黏貼(無須真的黏貼)回圓錐的立體形體，讓學生在展開與黏貼來回過程中，找到展開圖中與圓錐相對應的部位。

四、 命題建議

教師在命題時，也可將展開後扇形(面積)大小不同的展開圖，如【圖 1-1】，列入題目或選項的考量，以確認學生是否了解圓錐體由一底圓及一扇形構成，並能找出圓錐體與展開圖的對應關係。



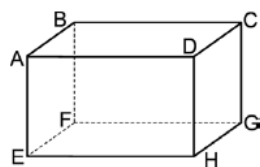
【圖 1-1】

五、 歷屆試題

除了本題所評量之認識正角錐，本指標另有「球、直圓柱、直圓錐與直角柱」可為命題評量範圍，以下提供歷屆試題參考。

(一)103 學年度第 25 題

25. 下圖長方體中，面 ADHE 的面積為 63 平方公分，且邊 AD 為 9 公分；面 ABCD 的面積為 27 平方公分，請問面 DCGH 的面積為多少平方公分？



(單位：公分)

- ① 18
- ② 21
- ③ 36
- ④ 90

選 項	1	2*	3	4	其他
選項率	12%	55%	19%	12%	1%
高分組	0.02	0.93	0.03	0.01	0.00
低分組	0.18	0.23	0.32	0.25	0.02
難 度 0.58	鑑別度 0.71				

第 2 題

知識向度	代數	認知向度	概念理解																												
對應分年細目	5-a-04 能將整數單步驟的具體情境問題列成含有未知數符號的算式，並能解釋算式、求解及驗算。																														
題目	下列哪一個敘述可以用「 $60 \div x = 12$ 」的算式來表示？ ① 60 位學生分組，每組有幾位學生，才可分成 12 組？ ② 姐姐有卡片 60 張，送給妹妹幾張後，姐姐還有 12 張卡片？ ③ 一張門票 60 元，買了 12 張共要付幾元？ ④ 老師把獎卡平分給 12 人，每人拿到 60 張獎卡，老師原有幾張獎卡？																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：1</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.88</td><td>0.10</td><td>0.17</td><td>0.05</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.98</td><td>0.01</td><td>0.006</td><td>0.004</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.67</td><td>0.17</td><td>0.06</td><td>0.10</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：1	選項率	0.88	0.10	0.17	0.05	0.00		高分組	0.98	0.01	0.006	0.004	0.00		低分組	0.67	0.17	0.06	0.10	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：1																									
選項率	0.88	0.10	0.17	0.05	0.00																										
高分組	0.98	0.01	0.006	0.004	0.00																										
低分組	0.67	0.17	0.06	0.10	0.00																										

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.31，通過率為 0.88，試題難易度 0.83。

(二) 評量目標說明

本題旨在評量學生能將情境問題用符號表示未知數。

(三) 選項表現說明

- 有 66% 的學生選擇正確選項①，顯示大部分的學生可以理解情境問題，並能依情境問題使用未知數列式並求解。
- 有 10% 的學生選擇選項②，學生對於除法的情境問題與減法的情境問題，無法區辨清楚誤將除法情境問題當成減法情境問題，故而回答選項②。
- 有 17% 的學生選擇選項③，學生對於情境問題的語意無法理解，所以不知一張門票 60 元，買了 12 張共付多少元？列式：60 元乘以 12 張等於 600 元或者對於乘法情境

問題與除法情境問題有所混淆，故答案③。

4. 有 5% 的學生選擇選項④，學生無法理解選項的情境問題，應是每人拿到 60 張，有 12 人，故要算出原有的獎卡，正確列式： $60 \times 12 = X$ ，而非題目中 $60 \div x = 12$

(四) 學生表現說明

1. 本題的命題設計主要希望了解學生對於「整數單步驟且含有未知數」的情境問題中能理解題意並正確列出含有未知數的算式，藉以檢驗學生對於除法情境中除數為未知數的問題，是否能正確列式。
2. 本題難易度為 0.83。有將近 8 成的學生已能掌握對於「單步驟且含有未知數」的題目中能將除法情境問題用符號表示未知數，但還是有將近 2 成的學生，概念並不清楚。從高分組與低分組學生的表現來看，98% 的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生也有將近 67% 的學生能回答正確，但仍有高達 33 的低分組學生無法正確回答，顯示對於情境問題用符號表示未知數，無法理解題意並列出含有未知數的算式。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

(一) 評量重點

5-a-04 能將整數單步驟的具體情境問題列成含有未知數符號的算式，並能解釋算式、求解及驗算。

(二) 先備的知識

2-a-04 能理解加減互逆，並運用於驗算與解題。

(三) 延伸的知識

6-a-01 能理解等量公理。

十二年國教課綱（學習內容）

(一) 評量重點

R-5-3 以符號表示數學公式：國中代數的前置經驗。初步體驗符號之使用，隱含「符號代表數」「符號與運算符號的結合」的經驗。應併入其他教學活動。

(二) 先備的知識

R-4-3 以文字表示數學公式：理解以文字和運算符號聯合表示的數學公式，並能應用公式。可併入其他教學活動（如 S-4-3）。

(三) 延伸的知識

R-6-3 數量關係的表示：代數與函數的前置經驗。將具體情境或模式中的數量關係，學習以文字或符號列出數量關係的關係式。

三、教學建議

(一) 評量核心概念

整數單步驟含未知數的情境問題中，能理解情境問題，並依題意列出含有未知數的算式。

(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. 用一般語言來描述問題，不會用符號表達未知數：例如：題目「花店裡有 99 朵花，其中有 66 朵是紅花，其餘都是白花，白花的數量是多少朵？」當老師詢問白花的數量如何表示時，學生因代數的概念尚未穩固，因此會回答：「白花的數量不知道有多少。」
2. 能用符號來代表未知數，但不會列式：以前一例題的情境為例，老師上課時告知學生未知數以「 x 」來表示，學生亦知道將「白花的數量」設為 x ，但對於花、紅花、白花等，情境中提到的三個物品，其在脈絡中的相互關係未能理解，因次出現不會列式或列式出現錯誤的情形。
3. 基本四則運算的理解及應用於解題成效不佳：學生能理解题目的情境脈絡、以未知數為代表符號後進行正確列式，唯對於整數四則混合計算的原則未能熟稔，另外對於加減互逆、乘除互逆的關係亦未能明確了解，因此造成解題錯誤。

(三) 核心概念的教學重點

1. 藉由圖像表徵幫助理解題意：

可用圖象表徵題意，使题目中抽象的數量關係藉由直觀的方式表達，有助於學生的思考，幫助解決問題。以本題的選項 2 為例，可以利用線段圖表徵，姐姐與妹妹卡片的數量關係，可以發現姐姐的卡片減去送給妹妹的卡片=剩下來的卡片；選項 3 也可以用簡單的圖示表示門票與價錢之間的關係，發現一張票 60 元，買 12 張要付的錢是 $60 \times 12 = 720$ 元。

2. 強化對文字符號意義的理解：

教師應讓學生理解文字符號如同數字，代表一個可以算出來的數值，例如：算式「 $x+3=5$ 」中的 x ，藉由加減互逆的概念，可以知道 $x=2$ 。；另外文字符號亦可當作特定的物體，例如正方形的邊長為 y 公分，因此，在教學時，教師可以在解題時，鼓勵學生適度運用文字符號來擬訂解題思考與策略。

3. 避免運算錯誤：

因為算式中出现文字符號，讓學生有陌生感，因而造成對四則混合計算的規約使用錯誤，因此除了強化學生對於文字符號的意義理解以外，應加強學生對於四則運算規約的使用。（有括號先計算；先乘除、後加減；由左至右計算）。

(四) 本題教學的加強重點

1. 多元表徵解題策略：

本題主要考驗學生是否理解情境問題，並能運用未知數列出算式。教師可運用線段圖或示意圖幫助學生思考題意，協助學生發展解題策略。例如本題的選項①、③、④可以使用示意圖幫助學生列式；選項②更可以使用線段圖來理解「減數、被減數與差之間的關係。建議教師教學可以運用不同的表徵方式，幫助學生思考，使

學生能正確使用符號列出算式。

2. 檢驗答案的合理性：

學生會使用符號列出算式求得答案，要培養學生能將答案代回原算式，檢驗答案的合理性，藉以判斷是否為正解。學生在檢驗答案合理性的過程，可幫助學生發現錯誤，提高學生的運算正確率。

四、 命題建議：

1. 運用符號來進行擬題：

以本題為例，可以讓學生出一題文字題，算式符合「 $60 \div x = 12$ 」，藉此可判斷學生是否能確實理解符號來表示未知數，並可運用驗算的方式判斷答案的合理性。

2. 命題參考：

本指標隱含「符號代表數」、「符號與運算符號的結合」的經驗，透過情境問題學習以符號代表未知數，利用加減互逆或乘除互逆的概念，求得正解，不宜做純符號的運算。

五、 歷屆試題：

(一)106 學年度第 23 題

知識向度	數與量	認知向度	概念理解			
對應分年細目	5-a-04 能將整數單步驟的具體情境問題列成含有未知數符號的算式，並能解釋算式、求解及驗算。					
題目	判斷下列哪個選項中 y 所代表的數與其他選項 <u>不同</u> ？ ① $y-28=40$ ② $y+28=40$ ③ $40-y=28$ ④ $28+y=40$					
答題表現 選項分析	選 項 1 2 3 4 其他 答案：1					
	選項率	0.66	0.10	0.17	0.05	0.00
	高分組	0.93	0.03	0.03	0.01	0.00
	低分組	0.31	0.18	0.37	0.14	0.00

第 3 題

知識向度	數與計算	認知向度	解題思考				
對應分年細目	5-n-13 能將分數、小數標記在數線上。						
題目	已知數線上有四個點，下列哪個點的位置最接近 2？ ① 1.7 ② $1\frac{4}{5}$ ③ 2.1 ④ $2\frac{1}{2}$						
答題表現 選項分析	<hr/> <hr/>						
	選 項	1	2	3	4	其他	答案：3
	<hr/> <hr/>						
	選項率	0.06	0.14	0.71	0.09	0.00	
	<hr/> <hr/>						
	高分組	0.00	0.06	0.91	0.03	0.00	
	低分組	0.15	0.21	0.47	0.17	0.00	
<hr/> <hr/>							

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.44，通過率為 0.71，試題難易度 0.69。

(二) 評量目標說明

本題是檢測學生是否理解小數與分數在數線上的對應位置，學生應能運用等值分數概念，將分母 2、5 的分數轉換為小數(相當於分母為 10)，並在數線上標記正確的位置，以評量學生是否能在數線上做分數、小數的轉換與比較大小。

(三) 選項表現說明

1. 有 71% 的學生選擇正確選項③，顯示有約 7 成的學生能運用等值分數概念，掌握分小數的轉換及在數線上標示位置與比較大小的能力。
2. 有 14% 的學生選擇選項②，這些學生可能認為 $1\frac{4}{5}$ 等於 1.8，以為 1.8 最大且最接近整數 2，而選擇選項②。
3. 有 9% 的學生選擇選項④，這些學生可能僅從分子或分母的數字比較大小，誤以為 $2\frac{1}{2}$ 的分數部份最小所以最接近整數 2，而選擇選項④。
4. 有 6% 的學生選擇選項①，這些學生可能僅從十分位數字和其他分數的分子數字比較

大小，誤以為 1.7 最大且最接近整數 2，而選擇選項①。

(四) 學生表現說明

1. 本題的命題設計主要希望了解學生是否能以等值分數概念進行分數與小數的轉換，並能在數線上標示其位置，以正確判斷何者最接近整數 2。學生亦有可能將 4 個數皆轉換為小數：1.7、1.8、2.1、2.5 後不需在數線上標示出來，而直接計算 4 個數和整數 2 的距離而正確答題。
2. 本題通過率為 71%。表示約 7 成的學生能以等值分數概念轉換分數和小數的對應關係，只有約 3 成的學生，相關概念並不清楚。從高分組與低分組學生的表現來看，91% 的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生只有 47% 回答正確，另外 3 個錯誤選項都有一定比例的低分組學生選答。顯示低分組學生對於分數、小數的轉換及其在數線上位置標示等概並不熟悉而產生混淆，因此容易受到誘答選項的影響而選答。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

(一) 評量重點

5-n-13 能將分數、小數標記在數線上。

(二) 先備的知識

1. 3-n-09 能由長度測量的經驗來認識數線，標記整數值與一位小數，並在數線上做大小比較、加、減的操作。
2. 4-n-10 能將簡單分數標記在數線上。

(三) 延伸的知識

7-n-08 能理解數線，數線上兩線的距離公式，及能藉數線上數的位置驗證數的大小關係。

十二年國教課綱（學習內容）

(一) 評量重點

N-4-8 數線與分數、小數：連結分小數長度量的經驗。以標記和簡單的比較與計算，建立整數、分數、小數一體的認識。

(二) 先備的知識

N-3-11 整數數線：認識數線，含報讀與標示。連結數序、長度、尺的經驗，理解在數線上做比較、加、減的意義。

(三) 延伸的知識

N-7-5 數線：擴充至含負數的數線；比較數的大小；絕對值的意義；以 $|a-b|$ 表示數線上兩點 a 、 b 的距離。

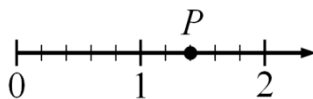
三、教學建議

(一) 評量核心概念

能將數線上的值以分數、小數標示，並能進行大小比較。（簡單分數與一位小數）

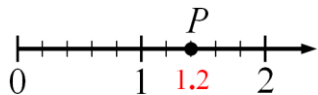
(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. 誤認為數線間距必為 10 等分：以為兩數之間的數線等分段數一定是 10 等分，也就是每個間距為 $\frac{1}{10}$ 、0.1，忽略以其他分數表示的等分段數。例如【圖 3-1】中點 P 值應為 $1\frac{2}{5}$ 或 1.4：

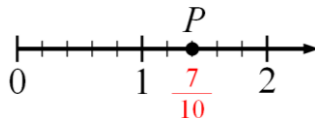


【圖 3-1】

但學生容易標示錯誤為 1.2，如【圖 3-2】；或以為全部數線平分為 10 等分，故標示為 $\frac{7}{10}$ ，如【圖 3-3】。

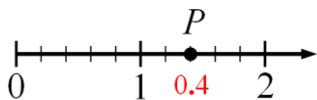


【圖 3-2】

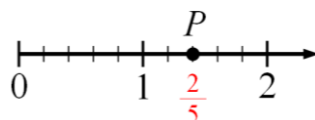


【圖 3-3】

2. 忽略數線上的參考點數值：學生在判斷數線等分段數後，在標示數值時容易只標示出分數或小數的值，因為學生習慣從 0 開始的數線，以致於忽略了帶分數或帶小數的整數值。例如【圖 3-4】中點 P 學生容易標示錯誤為 0.4；或 $\frac{2}{5}$ ，如【圖 3-5】。

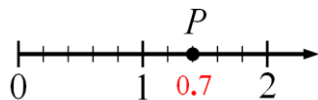


【圖 3-4】

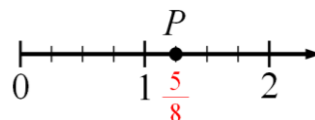


【圖 3-5】

3. 將數線全長當成 1 個單位：學生不了解數線上兩數間等距分割的意義。例如【圖 3-6】中的點 P ，學生以為在第 7 格就是 0.7，故標示為 0.7；或以為全部數線平分為 8 等分，故標示為 $\frac{5}{8}$ ，如【圖 3-7】。



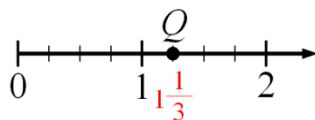
【圖 3-6】



【圖 3-7】

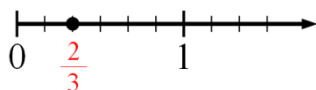
4. 誤認為兩數之間分段處的隔線數即為間距數：學生只數兩數之間的分段隔線數，導致錯數總分段數。例如【圖 3-8】中點 Q 值應為 $1\frac{1}{4}$ ，學生以為 1 和 2 之間是 3 等

分，所以標示為 $1\frac{1}{3}$ 。



【圖 14-8】

5. **受數線兩數之間的等分段數影響：**學生因為對分數的概念不了解，所以在標示數線上的分數值容易受等分段數影響而錯誤。例如：請學生標示出 $\frac{2}{3}$ 的位置，因為學生對 $\frac{2}{3}$ 在數線上的意義不了解，看到分子 2 就以為要標示在第 2 格，因此只從等分段數判斷而標示在 $\frac{2}{6}$ 的位置上，如【圖 3-9】。另外，學生也可能沒有注意到數線的單位長為 2，只看等分段數為 4，因此將 $\frac{1}{2}$ 、 1 、 $1\frac{1}{2}$ 標示為 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{2}{4}$ 、 $\frac{3}{4}$ ，如【圖 3-10】。



【圖 3-9】

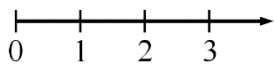


【圖 3-10】

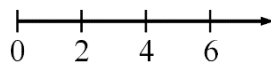
6. **受分數或小數之數字大小影響：**學生因為對分數與小數之間的對應關係不清楚，因此在判斷分小數的大小時，易受分數或小數之數字大小影響，以為數字越大的分小數值越大，數字越小的分小數值越小，如： $1.7 > 1\frac{4}{5}$ ， $1.7 = 1\frac{1}{7}$ 。

(三) 核心概念的教學重點

1. **數線的基本概念：**數線的學習要從整數開始，小學常使用的導入情境為長尺(測量)。經由測量讓學生了解數線的基本性質，如以 0 為基準點(起點)、刻度上的數字代表從 0 開始的長度、數線具方向性(大數在右，小數在左)、單位長度從 1 開始，如【圖 3-11】，之後不一定為 1，如【圖 3-12】數線的單位長度為 2：

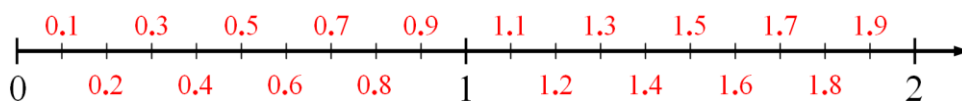


【圖 3-11】

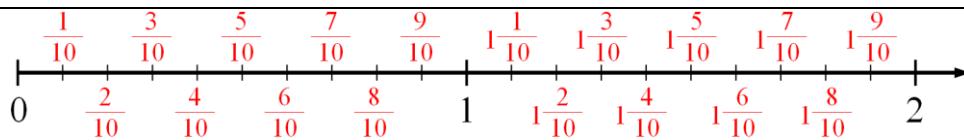


【圖 3-12】

2. **十等分數線：**小數與分數的數線的教學可以從 10 等分開始，讓學生實際操作 10 等分的分段與 0.1、0.2……的小數數值標示，如【圖 3-13】；另一條數線讓學生操作 10 等分後則讓學生練習分數數值標示，如【圖 3-14】。這樣的操作讓學生更容易連結等值分數的概念以理解分數、小數彼此有一致的關係，之後再進行分數和小數並置在同一條數線上的教學。注意這些教學活動進行時，所有數線之單位 1 必須一樣長。

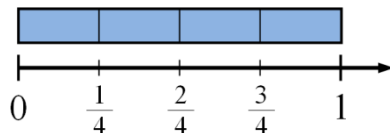


【圖 3-13】



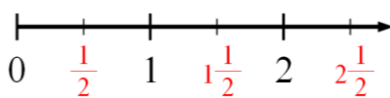
【圖 3-14】

3. **非十等分數線**：讓學生進行非 10 等分的間距標示。可以結合長條圖的等分練習，再連結到數線的分數標示，如【圖 3-15】。



【圖 3-15】

接著練習在兩數之間進行分母 5 以下的等分練習與數值標示，如【圖 3-16】、【圖 3-17】。經由實際操作讓學生對於間距等分的意義能了解，且更能具備等分間距的數感。



【圖 3-16】



【圖 3-17】

(四) 本題教學的加強重點

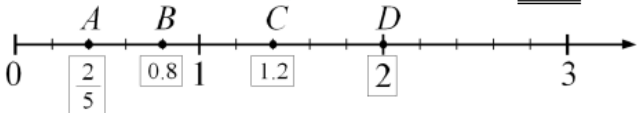
1. **等值分數概念**：以等值分數的概念(分母皆為 10)讓學生練習將題目所有數字轉換為小數 1.7、1.8、2.1、2.5 並標示在數線上。學生可以從數線各點位置清楚看出何者與整數 2 的距離最接近。
2. **不同等分的數線並置比較**：請學生將 1.7 和 2.1 標示在十等分數線上，將 $1\frac{4}{5}$ 標示在五等分數線上，將 $2\frac{1}{2}$ 標示在二等分數線上，再將三條不同等分的數線並置，但要注意每條數線的單位長 1 要相等。讓學生可以比較出來哪一個數字最接近整數 2。

四、 命題建議

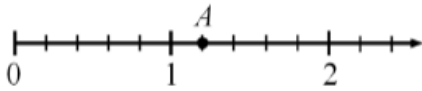
- (一) 本題學生在作答時可能有多種解題方式，教師可採用非選題的作答方式，讓學生呈現其答題歷程，更能掌握學生對分數、小數的轉換及在數線上的標示等概念是否理解，或了解學生的迷思何在。
- (二) 近三年試題皆以數線方式呈現，不同的選項放入學生容易產生的迷思，可以了解學生學習困難的地方。106 學年度的數線為 4 等份，學生最不熟悉，因此答對率也最低。今年的試題沒有畫出數線，對學生來說用等值分數的概念來解題相對容易，因為不會受到分段數的影響。

五、 歷屆檢測題參考

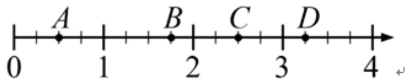
- (一) 104 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

題目	<p>數線上有 A、B、C、D 四點，哪一點的數值標示<u>錯誤</u>？</p>  <p>① A ② B ③ C ④ D</p>																												
答題表現 選項分析	<table><tr><th>選 項</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>其他</th><th>答案：3</th></tr><tr><td>選項率</td><td>0.14</td><td>0.29</td><td>0.53</td><td>0.04</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.02</td><td>0.07</td><td>0.89</td><td>0.01</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.30</td><td>0.42</td><td>0.18</td><td>0.09</td><td>0.01</td><td></td></tr></table>	選 項	1	2	3	4	其他	答案：3	選項率	0.14	0.29	0.53	0.04	0.00		高分組	0.02	0.07	0.89	0.01	0.00		低分組	0.30	0.42	0.18	0.09	0.01	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：3																							
選項率	0.14	0.29	0.53	0.04	0.00																								
高分組	0.02	0.07	0.89	0.01	0.00																								
低分組	0.30	0.42	0.18	0.09	0.01																								

(二) 105 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

題目	下面有一條數線， A 點的位置代表多少？					
						
	① 0.6					
	② 1.1					
	③ $1\frac{1}{6}$					
④ $1\frac{1}{5}$						
答題表現 選項分析	選 項	1	2	3	4	其他 答案：4
	選項率	0.04	0.29	0.05	0.62	0.00
	高分組	0.01	0.06	0.01	0.92	0.00
	低分組	0.07	0.52	0.09	0.32	0.00

(三) 106 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

題目	<p>在數線上有 A、B、C、D 四個點（如下圖）。哪一個選項是正確的？</p> <div></div> <p>① $A=0.2$ ② $B=\frac{6}{8}$ ③ $C=2.5$ ④ $D=\frac{16}{5}$</p>																												
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：3</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.30</td><td>0.17</td><td>0.38</td><td>0.15</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.07</td><td>0.17</td><td>0.64</td><td>0.12</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.54</td><td>0.15</td><td>0.17</td><td>0.14</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>	選 項	1	2	3	4	其他	答案：3	選項率	0.30	0.17	0.38	0.15	0.00		高分組	0.07	0.17	0.64	0.12	0.00		低分組	0.54	0.15	0.17	0.14	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：3																							
選項率	0.30	0.17	0.38	0.15	0.00																								
高分組	0.07	0.17	0.64	0.12	0.00																								
低分組	0.54	0.15	0.17	0.14	0.00																								

第 4 題

知識向度	數與計算	認知向度	概念理解				
對應分年細目	5-n-10 能認識多位小數，並做比較與加、減與整數倍的計算，以及解決生活中的問題。						
題目	下列選項哪個是正確的？ ① 9.180>9.18 ② 0.099+0.001=0.1 ③ 0.99 共有 99 個 0.1 ④ $\frac{4}{5}$ =0.4						
答題表現 選項分析	<hr/>						
	選 項	1	2	3	4	其他	答案：2
	<hr/>						
	選項率	0.03	0.80	0.13	0.04	0.00	
	<hr/>						
高分組	0.00	0.97	0.02	0.00	0.00		
低分組	0.08	0.50	0.31	0.11	0.00		
<hr/>							
<hr/>							

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.47，通過率為 0.8，試題難易度 0.74。

(二) 評量目標說明

本題旨在評量學生對多位小數的概念是否正確。

(三) 選項表現說明

1. 有 80% 的學生選擇正確選項②，顯示大部分的學生已經具備多位小數的直式運算的能力。
2. 有 13% 的學生選擇選項③，這些學生可能受到直觀數字的影響，而忽略了 0.99 的單位量為 0.01。
3. 有 4% 的學生選擇選項④，這些學生忽略了 0.4 是 4 個 0.1，而 $\frac{4}{5}$ 是 4 個 $\frac{1}{5}$ 。
4. 有 3% 的學生選擇選項①，這些學生可能是受整數概念的影響，認為位數愈多其值也愈大。

(四) 學生表現說明

1. 本題的命題設計在了解學生是否能進行多位小數大小比較、簡單分數與小數的換算、加減活動中常出現的連續進位問題，以及理解其單位量和單位數(位值)。
2. 本題通過率為 0.8。有超過 8 成的學生已能掌握多位小數的相關概念，但仍有 2 成左右的學生，概念並不清楚。從高分組與低分組學生的表現來看，97% 的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生亦有 50% 回答正確，但有 31% 的低分組學生選擇選項③，顯示低分組學生對於多位小數的單位量判斷上仍有待加強。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

（一）評量重點

5-n-10 能認識多位小數，並做比較與加、減與整數倍的計算，以及解決生活中的問題。

（二）先備的知識

4-n-12 能用直式處理二位小數加、減與整數倍的計算，並解決生活中的問題。

（三）延伸的知識

6-n-08 能在具體情境中，解決小數的兩步驟問題，並能併式計算。

十二年國教課綱（學習內容）

（一）評量重點

N-5-1 十進位的位值系統：「兆位」至「千分位」。整合整數與小數。理解基於位值系統可延伸表示更大的數和更小的數。

（二）先備的知識

N-4-7 二位小數：位值單位「百分位」。位值單位換算。比較、計算與解題。用直式計算二位小數的加、減與整數倍

（三）延伸的知識

N-6-5 解題：整數、分數、小數的四則應用問題。二到三步驟的應用解題。含使用概數協助解題。

三、教學建議

（一）評量核心概念

測驗多位小數的意義，。

（二）學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. 小數的基本概念迷思

(1) 不了解小數與分數之間的連結，所以不清楚小數點右邊的數字所代表的值，例如：
0.23 的 2 是 2 個 $\frac{1}{10}$ ，所以 2 是十分位，也就是 2 個 0.1；0.23 的 3 是 3 個 $\frac{1}{100}$ ，

所以 3 是百分位，也就是 3 個 0.01。

(2) 不了解小數所代表的值，如不了解 3.45 是介於 3 和 4 之間的值。

(3) 數線上讀小數或標小數點時，會弄錯兩格之間的單位，例如；0.1 和 0.2 之間分成十格時，不清楚兩小隔間代表的是 0.01。

(4) 不了解小數之間存在著無限個小數，例如：0.1 和 0.2 之間有 0.11、0.12、0.13……；0.01 和 0.02 之間還有 0.011、0.012、0.013……。

(5) 在度量衡單複名數的轉換問題時，易產生位值錯誤，例如：以為 2 公尺 3 公分 = 2.3 公尺。

(6) 在離散量情境時，易將小數點左邊的數當成大單位的個數，將小數點右邊的數當成小單位的個數，例如：一袋糖果有 20 顆，2.5 袋糖果就是 2 袋又 5 顆。

(7) 小數化聚的迷思：例如：「0.6 是由幾個 0.01 合成？」多數學生會回答 6 個。因此，未能正確做二位小數的化聚，表示學生缺乏位值概念。

2. 小數與整數概念混淆形成的迷思

(1) 讀小數時，會類推讀整數的方式，例如；0.24 讀成「零點二十四」，或將 0.2007 讀成「零點二零七」，因學生不理解讀整數時有讀出位名，故零可省略，而讀小數時沒有讀出位名，故零不可以省略。

(2) 不了解小數點右邊末位的 0 可以省略，例如：以為 $12.30 > 12.3$ 。

(3) 在小數數詞序列遇到進位時容易出錯，例如：0.7、0.8、0.9 再來是 0.10。

(4) 在比較小數的大小時，以為小數點右邊的數字越多，其值越大，例如：以為 $0.123 > 0.4$ 。

(5) 在比較小數的大小時，將小數當成整數來比較，例如：以為 $12.3 < 4.56$ 或 $4.12 > 4.3$ 。

3. 小數計算的迷思

(1) 在計算小數加減時，會以整數的加減經驗類推，而將「數字向右」對齊來計算。

$$\begin{array}{r} 0.54 \\ + \quad 0.3 \\ \hline 0.57 \end{array}$$

(2) 在加減小數時計算結果忘了標示小數點：

$$\begin{array}{r} 2.54 \\ + \quad 1.3 \\ \hline 267 \end{array}$$

(3) 計算小數乘法時，會放錯積數小數點的位置。

(4) 計算小數除法時，會放錯餘數的小數點，不是忽略要加小數點，就是將小數點對

齊放在被除數後來的小數點的位置。

4. 小數與分數概念混淆形成的迷思：將小數和分數的數字直接轉換，例如：以為 $5.4 = \frac{4}{5}$ ，或以為 $\frac{3}{8} = 0.3$ 。

(三) 核心概念的教學重點

1. 透過具體操作讓學生從分數概念引進，讓學生理解小數的意義

以千格板當作 1，一個百格板是 $\frac{1}{10}$ ，也就是 0.1；一個橘色積木是 $\frac{1}{100}$ ，也就是 0.01；一個小白積木是 $\frac{1}{1000}$ ，也就是 0.001。

學生在四年級已經認識二位小數與百分位的位名，且理解小數本身記錄了多單位的合成結果，例如一位小數是記錄數個「1」和數個「0.1」的合成結果；二位小數是記錄數個「1」、數個「0.1」和數個「0.01」的合成結果。

五年級開始出現四位小數以上的小數，四位小數是記錄數個 1，數個 0.1，數個 0.01，數個 0.001 和數個 0.0001 的合成結果，例如：0.3758 是記錄 3 個 0.1、7 個 0.01 和 5 個 0.001 的合成結果，展開式可以寫成 $0.3758 = 0.1 \times 3 + 0.01 \times 7 + 0.001 \times 5 + 0.0001 \times 8$ 。

2. 透過定位板讓學生觀察發現，能理解小數多單位位值和其大小的變化

整數位值越往左其值越大，數字往左移動一個位值，其值變為原來的 10 倍，反之往右移動一個位值，其值變為原來的 $\frac{1}{10}$ 倍。小數亦然，十分位的 1 代表個位 1 的 $\frac{1}{10}$ ，百分位的 1 代表十分位 1 的 $\frac{1}{10}$ 。

利用定位板，如【表 4-1】來輔助認識小數的位值和位名，以了解小數概念是整數十進位系統的延伸。

【表 4-1】

個 位	十 分 位	百 分 位	千 分 位	萬 分 位
0	3	7	5	8

以定位板理解「0.1」、「0.01」、「0.001」、「0.0001」四個單位間的化聚活動，例如一位小數問題：「一盒雞蛋有 10 個，1 個雞蛋是 0.1 盒。35 個雞蛋是幾個 0.1 盒？合起來是幾盒？」與「一盒雞蛋有 10 個，3.5 盒有幾個雞蛋？」的雙向化聚問題。

再到兩位小數問題：「一包影印紙有 100 張，1 張影印紙是 0.01 包，10 張影印紙是 0.1 包。76 張影印紙是幾個 0.01 包和幾個 0.1 包？」與「一包影印紙有 100

張，幾個 0.01 和幾個 0.1 包合起來是 0.76 包？」的雙向化聚問題。

再到三位小數問題：「一盒白色積木有 1000 個，1 個白色積木是 0.001 盒，10 個白色積木（即 1 個橘色積木）是 0.01 盒，100 個白色積木（即 1 個百格板）是 0.1 盒。468 個白色積木是由多少個 0.001 盒、多少個 0.01 盒和多少個 0.1 盒白色積木合起來的？」與「一盒白色積木有 1000 個，多少個 0.001 盒、多少個 0.01 盒（即 1 個橘色積木）和多少個 0.1 盒白色積木（即 1 個百格板）合起來是 0.468 盒？」的雙向化聚問題。

（四）本題教學的加強重點

本題應配合定位板來加強學生小數的位值概念，可先從整數的位值認識再到小數的位值認識，讓學生理解越靠近個位或小數點的位值越大，再連結整數比大小的舊經驗：比大小時，先從比較大的位值開始比。從【表 4-2】和【表 4-3】的定位板可以清楚看出兩數的個位、十分位和百分位皆相同，9.180 和 9.18 都是表示千分位為 0，差別只在當小數點右邊末位的 0 可以省略。

【表 4-2】

個 位	十 分 位	百 分 位	千 分 位
9	1	8	0

【表 4-3】

個 位	十 分 位	百 分 位	千 分 位
9	1	8	

定位板也可以用來理解「0.1」和「0.01」單位間的化聚，1 個 0.1 是 10 個 0.01。從【表 4-4】中，可以將 0.99 看成 9 個 0.1 和 9 個 0.01 合成，而 1 個 0.1 個是 10 個 0.01，9 個 0.1 是 90 個 0.01，所以也可以將 0.99 看成 99 個 0.01 合成。

【表 4-4】

個 位	十 分 位	百 分 位	千 分 位
0	9	9	

教學時應加強單位量的概念，讓學生讀出「 $\frac{4}{5}$ 是 4 個 $\frac{1}{5}$ 」，「0.4 是 4 個 0.1」，兩數是用不同單位量進行累數，即使單位數相同，但兩數的數值不相等。

四、命題建議

5-n-10 的基本學習內容包含以下：

5-ncp-10-1 能進行多位小數的命名及說、讀、聽、寫。

5-ncp-10-2 能認識「千分位」、「萬分位」等的位名。

5-ncp-10-3 能進行多位小數位值單位的換算。

5-ncp-10-4 能進行多位小數的大小比較。

5-ncp-10-5 能進行多位小數的加、減計算。

5-ncp-10-6 能進行多位小數的整數倍計算。

本條文所包含的概念較多，教師在進行命題時可針對不同的學習表現單獨命題，較能診斷出學生在該學習表現上的迷思處。

五、 歷年檢測試題參考

(一) 104 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

題目	有三種面積為 0.1 平方公尺、0.01 平方公尺和 0.0001 平方公尺的紙片，若要利用紙片拼排出「0.3082 平方公尺」，下列哪個選項是正確的？ ① 3 張 0.1 平方公尺，82 張 0.0001 平方公尺 ② 3 張 0.1 平方公尺，8 張 0.01 平方公尺， 2 張 0.0001 平方公尺 ③ 3 張 0.01 平方公尺，82 張 0.0001 平方公尺 ④ 3082 張 0.01 平方公尺						
答題表現 選項分析	選 項	1	2	3	4	其他	答案：1
	選項率	0.70	0.14	0.08	0.07	0.01	
	高分組	0.94	0.04	0.01	0.00	0.00	
	低分組	0.35	0.28	0.19	0.17	0.01	

(二) 105 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

題目	下列哪一個選項是正確的？ ① $0.90098 > 0.9098$ ② 「15.0032」讀作「十五點零三二」 ③ 「0.23695」中的9是千分位 ④ $\frac{1}{16}$ 用小數表示是 0.0625				
答題表現 選項分析	選 項	1	2	3	4 其他 答案：4
	選項率	0.09	0.18	0.11	0.62 0.00
	高分組	0.02	0.06	0.03	0.89 0.00
	低分組	0.17	0.29	0.19	0.35 0.00

(三) 106 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

題目	求 $6.789 + 3.92 = ?$ ① 6.071 ② 7.181 ③ 9.609 ④ 10.709				
答題表現 選項分析	選 項	1	2	3	4 其他 答案：4
	選項率	0.02	0.13	0.05	0.80 0.00
	高分組	0.00	0.03	0.01	0.96 0.00
	低分組	0.04	0.30	0.10	0.56 0.00

第 5 題

知識向度	代數	認知向度	解題思考																												
對應分年細目	5-a-01 能在具體情境中，理解乘法對加、減法的分配律，並運用於簡化計算。																														
題目	爸爸帶了一些錢去飲料店，買了珍珠奶茶與鮮奶茶各 4 杯，剩下 180 元。爸爸帶多少錢出門？下列哪個算式正確？																														
	<table><tr><td>品項名稱</td><td>珍珠奶茶</td><td>鮮奶茶</td></tr><tr><td>每杯價格（元）</td><td>60</td><td>45</td></tr></table>			品項名稱	珍珠奶茶	鮮奶茶	每杯價格（元）	60	45																						
	品項名稱	珍珠奶茶	鮮奶茶																												
	每杯價格（元）	60	45																												
	① $60 \times 4 + 45 \times 4$																														
	② $60 + 45 \times 4 + 180$																														
③ $(60 + 45) \times 4$																															
④ $(60 + 45) \times 4 + 180$																															
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：4</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.06</td><td>0.05</td><td>0.06</td><td>0.84</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.01</td><td>0.00</td><td>0.01</td><td>0.98</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.14</td><td>0.11</td><td>0.15</td><td>0.60</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：4	選項率	0.06	0.05	0.06	0.84	0.00		高分組	0.01	0.00	0.01	0.98	0.00		低分組	0.14	0.11	0.15	0.60	0.00	
	選 項	1	2	3	4	其他	答案：4																								
	選項率	0.06	0.05	0.06	0.84	0.00																									
	高分組	0.01	0.00	0.01	0.98	0.00																									
	低分組	0.14	0.11	0.15	0.60	0.00																									

一、 試題分析

（一） 數據解析

本題鑑別度為 0.39，通過率為 0.84，試題難易度 0.79。

（二） 評量目標說明

本題是評量學生能否在具體情境中，理解乘法對加法的分配律，並運用於簡化計算。

（三） 選項表現說明

- 有 84% 的學生選擇正確選項④，顯示大多數的學生已經能在具體情境中，理解乘法對加法的分配律，並運用於簡化計算。
- 有 6% 的學生選擇選項①，這些學生可能對分配律未能充分理解，因此未察覺到選項①和③是相同的計算方式，唯選項③使用乘法對加法的分配律來簡化算式。此外，這些學生可能誤以為題目要求計算的是「花掉的錢」，而非「原有的錢」，因此遺漏

了「剩下 180 元」未加以計算。

3. 有 6% 的學生選擇選項③，這些學生可能也未察覺到選項③和①是相同的計算方式，選項①是分配律的反推算式，因此對於分配律並未完全了解。此外，這些學生也可能誤以為題目要求計算的是「花掉的錢」，而非「原有的錢」，因此遺漏了「剩下 180 元」未加以計算。
4. 有 5% 的學生選擇②，這些學生可能將題目敘述「買了珍珠奶茶與鮮奶茶各 4 杯」誤解為「買了珍珠奶茶與鮮奶茶 4 杯」，因此未計算 4 杯珍珠奶茶的錢。另外，這些學生也有可能是不清楚四則運算規約，認為在使用乘法對加法分配律時，僅需要由左至右計算，而漏掉了先乘除後加減的規約。

(四) 學生表現說明

1. 本題的目的是評量學生能否在具體情境中，理解乘法對加法的分配律，並運用於簡化計算，多數學生能運用乘法對加法的分配律來解題，並能理解花掉的錢加上剩下的錢就是原本的錢。
2. 本題難易度為 0.39。有將近八成五的學生能理解乘法對加法的分配律，並運用於簡化計算，但仍有約一成五的學生無法解題。從高分組與低分組學生的表現來看，約 98% 的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生則只有 60% 回答正確。低分組中有約 39% 的學生選擇①或③的選項，這些學生未察覺①和③的選項前者是分配律的反推算式，而後者是使用分配律來簡化計算，兩者在意義上面相同，因此皆不能選，表示這些學生對於乘法對加法的分配律未能充分理解，也可能未讀懂題意，忽略需要求出的是「原本的錢」而非「花掉的錢」。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

(一) 評量重點

5-a-01 能在具體情境中，理解乘法對加法的分配律，並運用於簡化計算。

(二) 先備的知識

1. 4-a-01 能在具體情境中，理解乘法結合律。
2. 4-a-02 能在四則混合計算中，應用數的運算性質。

(三) 延伸的知識

1. 5-a-03 能熟練運用四則運算的性質，做整數四則混合計算。
2. 6-a-04 能利用常用的數量關係，列出恰當的算式，進行解題，並檢驗答案的合理性。

十二年國教課綱（學習內容）

(一) 評量重點

R-5-2 四則計算規律 (II)：乘除混合計算。「乘法對加法或減法的分配律」。將計算規律應用於簡化混合計算。熟練整數四則混合計算。

(二) 先備的知識

1. R-4-1 **兩步驟問題併式**：併式是代數學習的重要基礎。含四則混合計算的約定（由左往右算、先乘除後加減、括號先算）。學習逐次減項計算。
2. R-4-2 **四則計算規律（I）**：兩步驟計算規則。加減混合計算、乘除混合計算。在四則混合計算中運用數的運算性質。

（三）延伸的知識

R-6-1 **數的計算規律**：小學最後應認識（1）整數、小數、分數都是數，享有一樣的計算規律。（2）整數乘除計算及規律，因分數運算更容易理解。（3）逐漸體會乘法和除法的計算實為一體。併入其他教學活動。

三、教學建議

（一）評量核心概念

利用乘法對加、減法的分配律以簡化計算過程。

（二）學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. **對於併式的過程及方式不了解**：併式的目的在於簡化計算，例如「購買 7 元的夾子 18 個，購買 7 元的直尺 12 把，一共要花費多少元？」若先計算夾子價錢，再計算直尺價錢，而後加總夾子和直尺的錢之三步驟計算較為麻煩，可以先計算夾子和直尺的數量，再計算總金額之兩步驟計算較為簡便，最後更可以利用「括號先算」、「先乘除、後加減」等算則併式，舉例如下：
 - （1）三步驟計算： $7 \times 18 = 126$ ， $7 \times 12 = 84$ ， $126 + 84 = 210$ 。
 - （2）兩步驟計算： $18 + 12 = 30$ ， $7 \times 30 = 210$
 - （3）併式計算： $7 \times (18 + 12) = 210$ ，若學生不了解這個併式過程及括號先算的意義時，就無法理解各種四則運算的算則，而只是一味的從左至右逐項運算，即 $7 \times 18 = 126$ ， $126 + 12 = 138$ 。
2. **對於四則運算的規則不清楚**：學生習慣由左至右進行運算，或是將看起來比較好算的部份先算，而造成計算錯誤，舉例如下：
 - （1）「 $35 - 5 \times 4 = 120$ 。」學生由左至右計算，因此先算 $35 - 5 = 30$ ，再算 30×4 ，因此計算錯誤。
 - （2）「 $25 \times 7 - 5 = 50$ 。」學生先算比較好算的 $7 - 5$ ，再算 25×2 ，因此計算錯誤。
3. **誤以為分配律的反推算式就是結合律**：因為 $8 \times (3 + 2) = 8 \times 3 + 8 \times 2$ 是乘法對加法的分配律，學生誤以為 $8 \times 3 + 8 \times 2 = 8 \times (3 + 2)$ 就是乘法對加法的結合律，其實 $8 \times 3 + 8 \times 2 = 8 \times (3 + 2)$ 只是分配律的反推算式，仍然屬於分配律。
4. **誤將分配律運用於除法**：因為乘法對加、減法有分配律，而以為除法對加、減法也有分配律。因為乘法對加、減法有左右分配律，所以可以說乘法對加、減法的分配律成立；而除法對加減法只有右分配律，即 $(12 + 6) \div 3 = 12 \div 3 + 6 \div 3$ ，但是左分配不成立 $36 \div (9 + 3) \neq 36 \div 9 + 36 \div 3$ ，所以除法對加、減法的分配律不成立。

(三) 核心概念的教學重點

1. 理解題意後從多步驟列式過渡到併式

教師應利用多步驟問題讓學生從理解題意後有次序的一列式解題，待學生能熟練解決多步驟問題後再開始學習併式。教學時需同時呈現多步驟算式，再慢慢過渡到併式記錄問題。

例如：「小明口袋有 1 個 10 元硬幣和 6 個 5 元硬幣，請問小明共有多少元？」學生理解題意後多步驟解題算式可能為： $5 \times 6 = 30$ ， $10 + 30 = 40$ ；引導學生併式為 $10 + 5 \times 6 = (\quad)$ 。

2. 再次澄清併式中的四則運算規約

承上第 1 點列出併式後，需運用四則運算規約求出答案，此時可討論因為乘或除是連加或連減的簡化記錄形式，因此運算位階高於加或減，所以約定「先乘除後加減」。

3. 應用具體情境幫助學生認識乘法對加法的分配律

乘法對加法有右分配律及左分配律，乘號在加號右邊時，例如： $(6 + 4) \times 5 = 6 \times 5 + 4 \times 5$ ，稱為乘法對加法的右分配律；乘號在加號左邊時，例如： $8 \times (7 + 3) = 8 \times 7 + 8 \times 3$ ，稱為乘法對加法的左分配律。

教師應用具體的情境讓學生理解乘法對加法的分配律為何會成立，情境題的數字可以設計成用分配律計算更容易，以產生使用分配律的需求，以下為左分配律的情境，例如：「一打鉛筆有 12 枝，小明有黃色鉛筆 8 打，小華有紅色鉛筆 2 打，兩人共有幾枝鉛筆？」引導學生發現 $12 \times 8 + 12 \times 2 = (\quad)$ 比較不容易計算，若能利用分配律改成 $12 \times (8 + 2) = 12 \times 10 = 120$ ，計算較為簡便。

4. 應用具體情境幫助學生認識乘法對減法的分配律

乘法對減法亦有左、右分配律，乘號在減號右邊時，例如： $(8 - 5) \times 9 = 8 \times 9 - 5 \times 9$ ，稱為乘法對減法的右分配律；乘號在減號左邊時， $10 \times (9 - 4) = 10 \times 9 - 10 \times 4$ ，稱為乘法對減法的左分配律。

教師應用具體的情境讓學生理解乘法對減法的分配律為何會成立，情境題的數字可以設計成容易使用分配律進行計算，以產生使用分配律的需求，以下為左分配律的情境，例如：「一打鉛筆有 12 枝，小明有黃色鉛筆 8 打，小華有紅色鉛筆 2 打，小明比小華多幾枝鉛筆？」引導學生發現 $12 \times 8 - 12 \times 2 = (\quad)$ 比較不容易計算，若能利用分配律改成 $12 \times (8 - 2) = 12 \times 6 = 72$ ，計算較為簡便。

5. 應用四則運算規約釐清除法對加、減法無分配律

除法對加、減法僅有右分配律，無左分配律，所以除法對加、減法的分配律不成立。教師可讓學生嘗試計算「 $36 \div 9 + 36 \div 3$ 」的答案和「 $36 \div (9 + 3)$ 」是否相同，可以發現前者的答案是 16，而後者是 3，因此除法對於加法無分配律。

(四) 本題教學的加強重點

1. **澄清題意**：本題有部分學生誤解題意，誤以為要求出的是「原本的錢」而非「花掉的錢」，澄清題意後可與學生討論哪些選項是求出「原本的錢」（選項①和③）。

2. **利用乘法對加法的分配律進行併式**：若學生無法直接運用分配律進行併式，可引導

學生先列出分配律的反推算式「 $(60 \times 4 + 45 \times 4) + 180$ 」，再利用語意轉換「先算出 1 組珍珠奶茶和鮮奶茶的價錢，再計算 4 組的價錢」，將算式精簡為「 $(60 + 45) \times 4 + 180$ 」。

3. **進行擬題活動：**選項②明顯不符合題意，但仍有部分學生產生誤解，教師可請學生討論符合選項②的佈題，例如：「爸爸買了珍珠奶茶與鮮奶茶 4 杯，還剩下 180 元，爸爸原本有多少元？」

四、 命題建議

從本題對應能力指標「5-a-01 能在具體情境中，理解乘法對加、減法的分配律，並運用於簡化計算」可得知重點在於(一)從具體情境中理解，以及(二)簡化計算，命題時應把握此兩重點。

- (一) **從具體情境中理解：**包含情境的命題可以幫助學生進行語意轉換，便於思考與討論，除下面例題外，可參見第五大點之 105 年及 106 學年度數學能力檢測命題，兩題皆不需要實際計算，評量學生是否能理解與應用乘法對加法的分配律。

例：龍眼一斤 240 元、小番茄一斤 260 元，媽媽買了龍眼和小番茄各 5 斤要付多少元？

- (二) **簡化計算：**除下面例題外，可參見第五大點之 104 學年度數學能力檢測命題。

例：下面哪個算式是正確的？

① 1025×4

$= (1000 + 25) \times 4$

$= 1000 \times 4 + 25$

② 1025×4

$= (1000 + 25) \times 4$

$= 1000 \times 4 + 25 \times 4$

③ 1025×4

$= (1000 + 25) \times 4$

$= 1000 + (25 \times 4)$

④ 1025×4

$= (1000 + 25) \times (5 - 1)$

$= 1000 \times 5 - 25 \times 1$

五、 歷屆檢測試題參考

- (一) 104 學年度數學能力檢測第 18 題

知識向度	代數	認知向度	概念理解																												
對應分年細目	5-a-01 能在具體情境中，理解乘法對加法的分配律，並運用於簡化計算。																														
題目	下列哪一個算式的答案和「 $199 \times 98 - 97 \times 96$ 」的答案相同？ ① $(200 - 1) \times 98 - (100 - 3) \times 96$ ② $199 \times (100 - 2 + 100 - 3) \times 96$ ③ $199 \times 1 \times 96$ ④ 19405×96																														
答題表現 選項分析	<table><tr><th>選 項</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>其他</th><th>答案：1</th></tr><tr><td>選項率</td><td>0.77</td><td>0.12</td><td>0.06</td><td>0.04</td><td>0.01</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.97</td><td>0.01</td><td>0.01</td><td>0.00</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.46</td><td>0.27</td><td>0.14</td><td>0.11</td><td>0.01</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：1	選項率	0.77	0.12	0.06	0.04	0.01		高分組	0.97	0.01	0.01	0.00	0.00		低分組	0.46	0.27	0.14	0.11	0.01	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：1																									
選項率	0.77	0.12	0.06	0.04	0.01																										
高分組	0.97	0.01	0.01	0.00	0.00																										
低分組	0.46	0.27	0.14	0.11	0.01																										

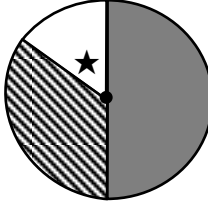
(二) 105 學年度數學能力檢測第 7 題

知識向度	代數	認知向度	概念理解																												
對應分年細目	5-a-01 能在具體情境中，理解乘法對加、減法的分配律，並運用於簡化計算。																														
題目	<p>「學校開闢三塊長方形菜園，第一塊菜園的長為 3 公尺、寬為 2 公尺；第二塊菜園的長為 3 公尺、寬為 4 公尺；第三塊菜園的長為 3 公尺、寬為 5 公尺。這三塊菜園的面積共是多少平方公尺？下列哪一個算式能算出正確答案？</p> <p>① $(3+3+3) \times (2+4+5)$</p> <p>② $3 \times 2 + 4 + 5$</p> <p>③ $3 \times (2 \times 4 \times 5)$</p> <p>④ $3 \times (2 + 4 + 5)$</p>																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：4</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.30</td><td>0.04</td><td>0.16</td><td>0.49</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.18</td><td>0.01</td><td>0.04</td><td>0.77</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.39</td><td>0.10</td><td>0.28</td><td>0.24</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：4	選項率	0.30	0.04	0.16	0.49	0.00		高分組	0.18	0.01	0.04	0.77	0.00		低分組	0.39	0.10	0.28	0.24	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：4																									
選項率	0.30	0.04	0.16	0.49	0.00																										
高分組	0.18	0.01	0.04	0.77	0.00																										
低分組	0.39	0.10	0.28	0.24	0.00																										

(三) 106 學年度數學能力檢測第 7 題

知識向度	代數	認知向度	概念理解																												
對應分年細目	5-a-01 能在具體情境中，理解乘法對加、減法的分配律，並運用於簡化計算。																														
題目	<p>「媽媽買了豆干 3 串、金針菇 3 包、烤玉米 3 支。媽媽共花了多少元？」下列哪一個算式能算出正確答案？</p> <table><tr><th colspan="5">燒烤店價目表</th></tr><tr><td>豆干</td><td>魚板</td><td>烤玉米</td><td>豬血糕</td><td>金針菇</td></tr><tr><td>1 串</td><td>1 串</td><td>1 支</td><td>1 串</td><td>1 包</td></tr><tr><td>13 元</td><td>20 元</td><td>39 元</td><td>20 元</td><td>26 元</td></tr></table> <p>① $(13+26+39) \times 3$ ② $13+26+39 \times 3$ ③ $(13 \times 26 \times 39) \times 3$ ④ $(13+26+39) \times (3+3+3)$</p>			燒烤店價目表					豆干	魚板	烤玉米	豬血糕	金針菇	1 串	1 串	1 支	1 串	1 包	13 元	20 元	39 元	20 元	26 元								
燒烤店價目表																															
豆干	魚板	烤玉米	豬血糕	金針菇																											
1 串	1 串	1 支	1 串	1 包																											
13 元	20 元	39 元	20 元	26 元																											
答題表現 選項分析	<table><tr><th>選 項</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>其他</th><th>答案：1</th></tr><tr><td>選項率</td><td>0.89</td><td>0.02</td><td>0.02</td><td>0.06</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.98</td><td>0.00</td><td>0.00</td><td>0.01</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.75</td><td>0.06</td><td>0.06</td><td>0.12</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：1	選項率	0.89	0.02	0.02	0.06	0.00		高分組	0.98	0.00	0.00	0.01	0.00		低分組	0.75	0.06	0.06	0.12	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：1																									
選項率	0.89	0.02	0.02	0.06	0.00																										
高分組	0.98	0.00	0.00	0.01	0.00																										
低分組	0.75	0.06	0.06	0.12	0.00																										

第 6 題

知識向度	幾何	認知向度	程序執行																												
對應分年細目	5-s-03 能認識圓心角，並認識扇形。																														
題目	<p>一個圓(如下圖)，灰色部分是$\frac{3}{6}$個圓，斜線部分是$\frac{2}{6}$個圓，★處的圓心角是多少度？</p> <div></div> <p>① 45 度 ② 60 度 ③ 120 度 ④ 180 度</p>																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：2</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.26</td><td>0.69</td><td>0.04</td><td>0.01</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.04</td><td>0.94</td><td>0.01</td><td>0.002</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.52</td><td>0.36</td><td>0.08</td><td>0.04</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：2	選項率	0.26	0.69	0.04	0.01	0.00		高分組	0.04	0.94	0.01	0.002	0.00		低分組	0.52	0.36	0.08	0.04	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：2																									
選項率	0.26	0.69	0.04	0.01	0.00																										
高分組	0.04	0.94	0.01	0.002	0.00																										
低分組	0.52	0.36	0.08	0.04	0.00																										

一、 試題分析

(一) 數據解析：

本題鑑別度為 0.58，全體通過率為 0.69，試題難易度 0.65。

(二) 評量目標說明：

本題給定一個被分割成三個扇形的圓，並說明其中兩個扇形分別是幾分之幾圓，要求學生算出第三個扇形的圓心角，評量學生是否掌握扇形(幾分之幾圓)的意義，以及利用周角是 360 度求扇形圓心角的能力。

(三) 選項表現說明：

- 有 26.17% 的學生選擇選項 1，學生無法掌握扇形以及幾分之幾圓的意義，直觀的認為★處的圓心角很接近 45 度，因此選擇 45 度當作答案。
- 有 68.51% 的學生選擇正確選項 2，顯示有六成多的學生已經掌握如何利用圓心角和扇形的關係計算扇形角度的能力。

3. 有 3.72% 的學生選擇選項 3，學生不知道★處的圓心角為 $\frac{1}{6}$ 個圓，認為答案就是 $\frac{2}{6}$ 個圓，獲得答案為 120 度。

4. 有 1.42% 的學生選擇選項 4，學生不知道★處的圓心角為 $\frac{1}{6}$ 個圓，認為答案就是 $\frac{3}{6}$ 個圓，獲得答案為 180 度。

(四) 學生表現說明：

1. 本題命題設計直接要求學生依照圖示求出 $\frac{1}{6}$ 個圓的圓心角為幾度，主要希望學生能夠應用一個圓周角為 360 度的概念，透過分數的減法 $1 - \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$ ，求出★處的圓心角為 $\frac{1}{6}$ 個圓，然後列出算式 $360 \times \frac{1}{6} = 60$ 或是以周角 $360 \div 6 = 60$ ，獲得★處的圓心角為 60 度。
2. 本題通過率為 69%，高分組學生通過率高達 94.24%，顯示高分組學生，對於一個圓周角為 360 度及何謂 $\frac{1}{6}$ 個圓的圓心角的觀念，掌握相當的清楚，並能應用於解題。但低分組學生通過率僅 36.32%，顯示低分組的學生對於一個圓周角是 360 度及何謂 $\frac{1}{6}$ 個圓的圓心角的觀念，並非相當的清楚，亦無法應用於解題。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）：

(一) 評量重點：

5-s-03 能認識圓心角，並認識扇形。

(二) 先備的知識：

4-s-04 能認識角度單位「度」，並使用量角器實測角度或畫出指定的角度。（同 4-n-16）

4-s-05 能理解旋轉角（包括平角和周角）的意義。

(三) 延伸的知識：

6-s-03 能理解圓面積與圓周長的公式，並計算簡單扇形的面積。（同 6-n-14）

十二年國教課綱（學習內容）：

(一) 評量重點：

S-5-3 扇形：扇形的定義。「圓心角」。扇形可視為圓的一部分。將扇形與分數結合

(幾分之幾圓)。能畫出指定扇形。

(二)先備的知識：

S-3-3 圓：「圓心」、「圓周」、「半徑」與「直徑」。能使用圓規畫指定半徑的圓。

S-4-1 角度：「度」(同 N-4-10)。量角器的操作。實測、估測與計算。以角的合成認識 180 度到 360 度之間的角度。「平角」、「周角」。指定角度作圖。

S-4-2 解題：旋轉角。以具體操作為主，並結合計算。以鐘面為模型討論從始邊轉到終邊所轉的角度。旋轉有兩個方向：「順時針」、「逆時針」。「平角」、「周角」。

(三)延伸的知識：

S-6-3：圓周率、圓周長、圓面積、扇形面積：用分割說明圓面積公式。求扇形弧長與面積。知道以下三個比相等：(1) 圓心角：360；(2) 扇形弧長：圓周長；(3) 扇形面積：圓面積，但應用問題只處理用(1)求弧長或面積。

三、教學建議

(一)評量核心概念：

認識 $\frac{1}{6}$ 圓的圓心角相當於 60 度。

(二)學生常見的錯誤類型／迷思概念：

1. 不了解幾分之幾圓的意義：學生無法從圖示中已知訊息($\frac{3}{6}$ 個圓、 $\frac{2}{6}$ 個圓)，透過分

數減法求得★處的圓心角為 $\frac{1}{6}$ 個圓，也不了解什麼是 $\frac{1}{6}$ 個圓，因此，當題目要求★處的圓心角角度時，便已熟知的角度作為答案。

2. 不知道周角的角度意義：學生不知道 1 個圓周角是 360 度，遇到求扇形的圓心角時，使用自己所熟知的角度，或是依照視覺直觀選擇可能的角度當作圓心角求的答案。

(三)核心概念的教學重點：

3. 教學時，首先要讓學生了解數學上的扇形不是像扇子形狀的圖形，而是和圓有密切關係的圖形。認識扇形，應將扇形放在圓中表示，讓學生知道扇形的頂點是圓心，扇形的弧線必須是圓弧的一部份，扇形的兩邊就是圓的半徑因此必須等長，兩半徑所夾的角稱為扇形的圓心角。
4. 學生了解扇形的構成要素後，接著和學生探討半圓其實也是一種扇形，半圓的圓心角利用量角器量出的結果是 180 度，也就是一個平角，半圓的圓心角為 180 度和圓的大小無關。
5. 利用旋轉角的概念和學生探討旋轉一圈的角稱為周角，1 個周角就是 2 個平角，周角的角度是 360 度。其實圓也是扇形的一種，圓的圓心角是一個周角，所以圓的圓心角是 360 度，和圓的大小無關。

6. 最後探討幾分之幾圓的扇形圓心角到底是幾度。例如 $\frac{1}{4}$ 圓的扇形圓心角是指將1個圓的圓心角平分成4等分，而1個圓的圓心角是360度，所以 $\frac{1}{4}$ 圓的扇形圓心角，可以用算式 $360 \times \frac{1}{4} = 90$ ，得知 $\frac{1}{4}$ 圓的扇形圓心角為90度；也可包含簡單的換算，如 $90 \div 360 = \frac{1}{4}$ ，得知圓心角90度的圓是 $\frac{1}{4}$ 圓。

(四)本題教學的加強重點：

解題時教師可依下列步驟做為參考，幫助學生解決問題：

步驟三： 了解1個圓的圓心角是360度。

步驟四： $\frac{1}{6}$ 圓的扇形圓心角是指將1個圓的圓心角平分成6等分。

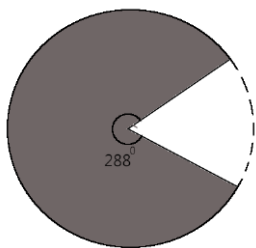
步驟五： 利用算式 $360 \times \frac{1}{6} = 60$ 或是 $360 \div 6 = 60$ 求出 $\frac{1}{6}$ 圓的扇形圓心角為60度。

四、命題建議

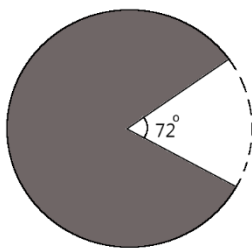
除了上方所述常見迷思，此指標於命題時建議尚可有幾個參考方向：

(一)大於180度的圓心角：學生誤以為半圓以及圓心角大於180度的扇形不是扇形，因此，命題時可以處理大於180度的圓心角。在圖上要給的已知角度可以標示於所求圓心角上【圖6-1】，也可以標示在非所求圓心角上【圖6-2】，以了解學生是否真正理解圓心角的意義。

例如：



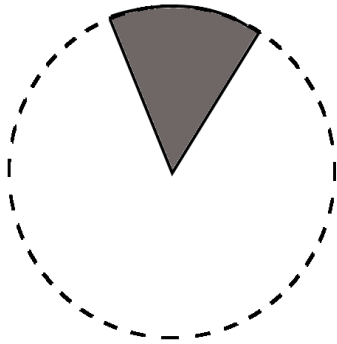
【圖 6-1】



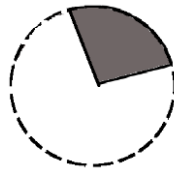
【圖 6-2】

(二)圓心角大小和扇形面積大小概念混淆：學生誤以為扇形面積越大(圓越大)，圓心角就越大，因此，命題時可以呈現扇形圓心角小但是扇形面積大【圖6-3】，與扇形圓心角大但是扇形面積小【圖6-4】的圖示，以了解學生是否真正了解圓心角的意義。

例如：

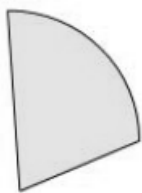


【圖 6-3】

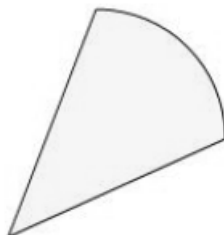


【圖 6-4】

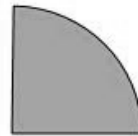
(三)檢查圖形是否為扇形：學生認識扇形後，容易將相似的圖形(兩條直線加一弧長)都認為是扇形，因此可以給訂圖形【圖 6-5】【圖 6-6】【圖 6-7】，請學生利用工具實際操作，檢查圖形是否為扇形，以了解學生是否真正了解扇形的構成要素。



【圖 6-5】



【圖 6-6】



【圖 6-7】

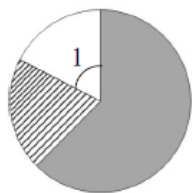
五、歷屆試題

(一) 105 學年度第 16 題

題目	<p>媽媽買一塊圓形的披薩，平分成 12 片，每一片都是 $\frac{1}{12}$ 圓的扇形，每一片披薩的圓心角是多少度？</p> <p>①12 度 ②15 度 ③30 度 ④60 度</p>				
答題表現 選項分析	選 項	1	2	3	4 其他 答案：3
	選項率	0.11	0.09	0.74	0.06 0.00
	高分組	0.00	0.03	0.96	0.00 0.00
	低分組	0.30	0.16	0.38	0.15 0.01

(二) 103 學年度第 24 題

24. 下圖中，灰色區域是 $\frac{5}{8}$ 圓，斜線區域是 $\frac{1}{5}$ 圓，請問 $\angle 1$ 是多少度？



- ① 31.5
- ② 45
- ③ 63
- ④ 145

選 項	1	2	3*	4	其他
選項率	9%	19%	66%	5%	1%
高分組	0.02	0.04	0.94	0.00	0.00
低分組	0.17	0.34	0.35	0.12	0.02
難 度 0.64	鑑別度 0.59				

第 7 題

知識向度	數與計算	認知向度	概念理解				
對應分年細目	5-n-04 能理解因數和倍數						
題目	下列有關因數與倍數的敘述哪個正確？ ① 7 是 35 的因數 ② 5 是 35 的公因數 ③ 5 是 35 的倍數 ④ 35 是 7 的公倍數						
答題表現 選項分析 (預試)	-----						
	選 項	1	2	3	4	其他	答案：1

	選項率	0.57	0.10	0.16	0.17	0.00	

	高分組	0.90	0.02	0.03	0.05	0.00	
低分組	0.25	0.19	0.30	0.26	0.00		

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.66，通過率為 0.57，試題難易度 0.57。

(二) 評量目標說明

本題旨在檢驗學生基本的因數與倍數、公因數與公倍數的概念，並以數學語言來敘述因數與倍數。

(三) 選項表現說明

1. 有 57% 的學生選擇正確選項①，顯示學生能正確解因數概念。
2. 有 17% 的學生選擇選項④，這些學生不理解公倍數的概念。公因數為一正整數 a 同時為兩個或兩個以上的正整數的因數時，則稱 a 是這些數的公因數。
3. 有 16% 的學生選擇選項③，學生不理解倍數的概念。倍數為一正整數 a 若能整除另一個正整數 b ， a 稱為 b 的因數； b 稱為 a 的倍數。
4. 有 10% 的學生選擇選項②，這些學生可能不理解公倍數的概念。公倍數為一正整數 a 同時為兩個或兩個以上以上的正整數的倍數時，則稱 a 是這些數的公倍數。

(四) 學生表現說明

1. 本題的命題設計為基本因數與倍數的定義，以及用數學語言表示。題目中 5、7 和 35 的關係是 $5 \times 7 = 35$ 。因此 5 和 7 都是 35 的因數、35 是 5 的倍數、35 是 7 的倍數、35 是 5 和 7 的公倍數。
2. 本題難易度為 0.66。本題通過率為 57%。有五成七的學生已能正確理解因數與倍數的概念，但仍有近四成三的學生，概念並不清楚。從高分組與低分組學生的表現來看，90% 的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生只有 25% 回答正確。在其他選項中顯示低分組學生中對於因數、倍數與公因數和公倍數基本的定義仍不熟稔。

二、教材地位分析

(一) 評量重點

5-n-04 能理解因數和倍數。

(三) 延伸的知識

5-n-05 能認識兩數的公因數、公倍數、最大公因數與最小公倍數。

5-n-07 能用通分做簡單異分母分數的比較與加減

6-n-02：能用短除法求兩數的最大公因數、最小公倍數。

十二年國教課綱（學習內容）

(一) 評量重點

N-5-3 公因數和公倍數：因數、倍數、公因數、公倍數、最大公因數、最小公倍數的意義。

(二) 先備的知識

1. N-3-4 除法：除法的意義與應用。基於 N-2-9 之學習、透過幾個一數的解題方法，理解如何應用乘法解決廚法的問題。熟練十十乘法範圍的乘法，作為估商的基礎、

2. R-3-1 乘法與除法的關係：乘除互逆，應用於驗算與解題。

(三) 延伸的知識

1. N-6-1 20 的質數和質因數分解：小於 20 的質數與合數。2、3、5 的質因數判別法。以短除法做質因數的分解。

2. N-6-2 最大公因數與最小公倍數：質因數分解法與短除法。兩數互質。運用到分數的約分與通分。

三、教學建議

(一) 評量核心概念

因數、倍數與公因數及公倍數的基本定義

(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. **專有名詞意義不清楚或概念混淆：**「整除與被整除」的意義和「因數與倍數」有何關係並不清楚；以因數的定義來說，對於「甲數能整除乙數」或「甲數能被乙數整除」的敘述中，誰除以誰，哪個是因數或哪個是倍數，學生無法明確辨別。因數與倍數是兩個互逆的概念，若甲是乙的因數，則乙是甲的倍數，學生難以理解甲、乙兩數之間的大小及因、倍數關係。
2. **認為數字大小與因數個數有關：**學生誤以為數字愈大，因數個數愈多。例如：「判斷 49 和 24 誰的因數個數比較多？」學生容易因為 $49 > 24$ ，得到 49 的因數個數比較多。
3. **找因數容易遺漏：**當數字較大又有很多因數時，學生會沒有耐心以列舉法逐一尋找而產生遺漏，同時學生的心算能力或除法的計算能力不好時也會影響。例如：找出 96 的因數，會因為 96 數字比較大且因數比較多，容易遺漏幾個因數；另一種情形是出現學生較不熟悉的數字時，容易遺漏，例如：91 的因數包含：1、7、13、91，學生容易遺漏 7 和 13 這二個因數。
4. **判別因數、倍數關係混淆：**混用其他倍數的判別法去判斷因數、倍數關係。例如：無法判別「4 的倍數」與「尾數是 4 的數的倍數」。

(三)核心概念教學重點

1. **因數問題：**幫助學生建立因數的概念，可以有以下教學布題：

- (1) 在長方形排列問題中，探討給定總量的長方形的可能排法：例如先給定一個總量（以 6 個和 12 個全等的小正方塊為例），要求學童將小正方塊排成長方形（不可排成中空），窮盡所有的排法，讓學童經驗給定總量長方形可以有不同的排法。

布題一：「6 個全等的小正方塊，可以排列成怎樣的長方形？」每排出一種長方形，就請學生將排法用乘法紀錄下來。可以排列成 1×6 、 2×3 、 3×2 、 6×1 ，共 4 種。

布題二：「12 個全等的小正方塊，可以排出怎樣的長方形？」可以排列成 1×12 、 2×6 、 3×4 、 4×3 、 6×2 、 12×1 ，共 6 種。

教師說明：排列長方形邊上方塊的個數：「1、2、3、6」是 6 的「因數」，和「1、2、3、4、6、12」是 12 的「因數」。

- (2) 在等分除的情境中，給定總量要求學童回答可能的等分組方式，幫助學童掌握總量可以由哪些單位量組成的意義。

例如：透過問題「有 18 位小朋友，全部分組玩遊戲，每組的人數要一樣多，一組可以有多少位小朋友，分分看？」請學童使用除法算式紀錄解題過程。

$$18 \div \boxed{1} = \boxed{18}$$

$$18 \div \boxed{2} = \boxed{9}$$

$$18 \div \boxed{3} = \boxed{6}$$

$$18 \div \boxed{6} = \boxed{3}$$

$$18 \div \boxed{9} = \boxed{2}$$

$$18 \div \boxed{18} = \boxed{1}$$

透過詢問「18 除以 2，全部分完且沒有剩下，所以 2 是 18 的因數」，引入因數的意義。帶領學生探討 18 的因數有哪些時，將 18 當成被除數，依序除以 1、2、3、…、18，發現其中 1、2、3、6、9、18 皆可以被 18 整除，所以 1、2、3、6、9、18 都是 18 的因數。

教師多舉例類似情境題讓學生解題，從學生找因數記錄下來的除法算式中，帶領學生發現「 $m \div a = b$ 」和「 $m \div b = a$ 」兩個除法算式的記錄皆可以找到 a 和 b 兩個因數，因此，在列出除法算式紀錄解題的過程，我們可省略「 $m \div b = a$ 」這個除法算式。

2. 倍數問題

五年級的學生有比較多倍的問題的解題經驗，經常使用倍的語言，因此，透過乘法未知的乘法算式填充題「 $2 \times (\quad) = 10$ 」，這條式子的含意是 2 的 5 倍是 10，所以 10 是 2 的 5 倍，引入倍數的意義：「10 是 2 的 5 倍，所以 10 是 2 的倍數」。學生有能力求出某數的倍數，例如我們要探討 5 的倍數，即可用乘以正整數的方式引導學生算出 5 的 1 倍、2 倍、3 倍……，依序為 5、10、15……，而這些數即為 5 的倍數。

另外，在學過除法之後，老師們同樣可帶領學生以除法觀點來探討倍數的觀念，因為「被除數 \div 除數=商」，所以在驗算的過程：被除數=商 \times 除數，因此，我們可以帶領學生探討：被除數也是商和除數的倍數。例如我們將 $18 \div 3 = 6$ 的除法算式進行驗算，即可發現 $18 = 3 \times 6$ ，其中 18 也是 3 和 6 的倍數。

要解決這些困難與迷思，國內學者研究後提出建議：教學前，宜讓學生建立乘除法的意義並熟練乘除計算技能；教學時，宜設計富有生活化、情境化的情境（謝哲仁&林榮貴（2006））。國小可操作視覺化之數學因數與倍數單元電腦活動輔助學習設計之研究。*理工研究學報*，40（1），23-45。），引導學生正確瞭解題意，以簡單明確的文字來定義因倍數，且讓學生有操作具體物聯結因數與倍數意義的機會，及教導學童運算的技巧以協助演算與意義的連結（黃國勳&劉祥通（2003）。五年級學童學習因數教材困難之探討。*科學教育研究與發展*。季刊，30、52-70）。

（四）本題教學重點

1. 理解因數、倍數、公因數和公倍數的基本定義
2. 因數與倍數：若整數 A 可以被整數 B 整除，則稱 B 是 A 的因數， A 是 B 的倍數，即若 A ， B ， C 皆為整數，且 $A \div B = C \cdots 0$ ，則稱 B 是 A 的因數， A 是 B 的倍數。
3. 公因數：公因數為一正整數 a 同時兩個以上的正整數因數時，則稱 a 是這些數的公因數。
4. 公倍數：公倍數為一正整數 a 同時兩個以上的正整數倍數時，則稱 a 是這些數的公倍數。

5. $5 \times 7 = 35$ ，5、7 是 35 的因數；35 是 5 和 7 的倍數。

6. 再如 $5 \times 7 = 35$ ： $5 \times 4 = 20$ ，5 是 20 和 35 的公因數

7. 再如 $5 \times 7 = 35$ ，35 是 5 和 7 的公倍數

四、命題建議

1. 認識因數、倍數的意義

因數：有甲、乙兩數當甲數能被乙數整除時，則乙數是甲數的因數。

(1) 在整除的除法算式「 $甲 \div 乙 = 丙$ 」中，乙和丙都是甲的因數

(2) 在乘法算式「 $乙 \times 丙 = 甲$ 」中，乙和丙都是甲的因數

倍數：有甲、乙兩數，當甲數能被乙數整除時，則甲數是乙數的倍數。

(1) 在整除的除法算式「 $甲 \div 乙 = 丙$ 」中，甲是乙和丙的倍數

(2) 在乘法算式「 $乙 \times 丙 = 甲$ 」中，甲是乙和丙的倍數

2. 認識公因數、公倍數和最大公因數和最小公倍數的意義。

公因數與最大公因數：一個整數是甲的因數，同時也是乙的因數，這個整數就是

甲數和乙數的公因數：所有公因數最大者稱為最大公因數。

公倍數與最小公倍數：一個整數是兩個整數共同的倍數，這個整數就是這兩個數

的公倍數：所有公倍數最小者稱為最小公倍數。

五、歷屆檢測試題參考

(一)104 年度數學能力檢測第 3 題

第 3 題

知識向度↙	數與計算↙	認知向度↙	概念理解↙
對應分年細目↙	5-n-04 能理解因數和倍數。↙		
題目↙	有一個在 100~200 之間的三位數，個位數字是 8，這個三位數一定是下列哪一個數的倍數？↙ ① 8↙ ② 6↙ ③ 4↙ ④ 2↙		
答題表現↙ 選項分析↙	選 項↙ 1↙ 2↙ 3↙ 4↙ 其他↙ 答案：4↙		
	選項率↙ 0.16↙ 0.10↙ 0.13↙ 0.61↙ 0.01↙ ↙		
	高分組↙ 0.04↙ 0.02↙ 0.02↙ 0.91↙ 0.00↙ ↙		
	低分組↙ 0.24↙ 0.19↙ 0.26↙ 0.30↙ 0.01↙ ↙		

(二) 106 年度數學能力檢測第 13 題

第 13 題

知識向度	數與計算	認知向度	概念理解																												
對應分年細目	5-n-04 能理解因數和倍數。																														
題目	<p>有一群學生人數<u>未滿</u>50 人，要進行分組，如果 4 人一組、9 人一組，都剛好分完。<u>還可以用幾個人一組的方式</u>，也剛好分完？</p> <p>① 5 人一組 ② 6 人一組 ③ 7 人一組 ④ 8 人一組</p>																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：2</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.22</td><td>0.62</td><td>0.08</td><td>0.06</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.05</td><td>0.92</td><td>0.02</td><td>0.01</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.42</td><td>0.28</td><td>0.17</td><td>0.13</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：2	選項率	0.22	0.62	0.08	0.06	0.00		高分組	0.05	0.92	0.02	0.01	0.00		低分組	0.42	0.28	0.17	0.13	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：2																									
選項率	0.22	0.62	0.08	0.06	0.00																										
高分組	0.05	0.92	0.02	0.01	0.00																										
低分組	0.42	0.28	0.17	0.13	0.00																										

第 8 題

知識向度	代數	認知向度	概念理解				
對應分年細目	5-a-03 能熟練運用四則運算的性質，做整數四則混合運算						
題目	下列哪兩個算式都是正確的？ 算式 A： $(1000+100)+10=1000+(100+10)$ 算式 B： $(1000-100)-10=1000-(100-10)$ 算式 C： $(1000\times 100)\times 10=1000\times (100\times 10)$ 算式 D： $(1000\div 100)\div 10=1000\div (100\div 10)$ ① 算式 A 和算式 C ② 算式 A 和算式 B ③ 算式 B 和算式 D ④ 算式 C 和算式 D						
答題表現 選項分析							
	選 項	1	2	3	4	其他	答案：1
	選項率	71.64	14.84	6.27	7.03	0.00	
	高分組	95.96	3.00	0.37	0.68	0.00	
低分組	37.65	28.81	16.49	17.05	0.00		

一、試題分析

(一)數據解析

本題鑑別度為 0.58，通過率為 0.72，試題難易度 0.67。

(二)評量目標說明

本題旨在評量學生是否可不側重計算而透過四則運算算則來檢驗算式是否正確，評量學生是否知道「加法與乘法有結合律」，然而減法與除法沒有結合律。

(三)選項表現說明

- 有 71.64% 的學生選擇選項①，顯示些學生清楚知道乘法與加法具有結合律的性質。
- 有 14.84% 的學生選擇選項②，這些學生誤以為減法計算如同加法計算也有結合律的性質。
- 有 6.27% 的學生選擇選項③，這些學生學生誤以為減法計算和除法計算也有結合律的性質。

4. 有 7.03% 的學生選擇選項④，這些學生誤以為除法計算如同乘法計算也有結合律的性質。

(四) 學生表現說明

1. 本題的命題設計主要希望了解學生是否具有整數四則運算中有關「結合律」的概念。因此，在題目中設定「加、減、乘、除」四個算式，藉以檢視學生能否正確作答。
2. 本題難易度為 0.67。推估有將近 7 成的學生已能正確理解僅有「加法、乘法」的運算有結合律存在，而「減法、除法」的運算沒有結合律。但仍有將近 3 成多的學生，並未能掌握概念。從高分組與低分組學生的表現來看，95.96% 的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生僅有 37.65% 回答正確，顯示低分組學生中多數未能完全理解結合律的概念。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

(一) 評量重點

5-a-03 能熟練運用四則運算的性質，做整數四則混合計算。

(二) 先備的知識

4-a-01 能在具體情境中，理解乘法結合律。

(三) 延伸的知識

6-a-04 能利用常用的數量關係，列出恰當的算式，進行解題，並檢驗答案的合理性。

十二年國教課綱（學習內容）

(一) 評量重點

R-5-2 四則計算規律 (II)：乘除混合計算。「乘法對加法的分配律」。將計算規律應用於簡化混合計算。熟練整數四則混合計算。

(二) 先備的知識

1. R-4-1 兩步驟問題併式：併式是代數學習的重要基礎。含四則混合計算的約定（由左往右算、先乘除後加減、括號先算）。學習逐次減項計算。
2. R-4-2 四則計算規律 (I)：兩步驟計算規則。加減混合計算、乘除混合計算。在四則混合計算中運用數的運算性質。

(三) 延伸的知識

R-6-1 數的計算規律：小學最後應認識 (1) 整數、小數、分數都是數，享有一樣的計算規律。(2) 整數乘除計算及規律，因分數運算更容易理解。(3) 逐漸體會乘法和除法的計算實為一體。併入其他教學活動。

三、教學建議

(一)評量核心概念

「加法結合律」： $(a + b) + c = a + (b + c)$

「乘法結合律」： $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. **對於四則運算的算則不清楚**：因此學生習慣由左至右進行運算，或是算式中看起來好算的部份先算而造成計算錯誤，或是誤以為先乘除意指先乘再除(加減部分亦同)，如下列三個錯誤計算的算式：
(1) $35 - 5 \times 4 = 120$ (學生由左至右計算，因此先算 $35 - 5$ ，再算 30×4 ，所以計算錯誤。)
(2) $25 \times 7 - 5 = 50$ (學生先算比較好算的 $7 - 5$ ，再算 25×2 ，因此計算錯誤。)
(3) $32 \div 8 \times 2 = 2$ (學生先算乘的部分 8×2 ，再算除的部分，因此計算錯誤。)
2. **對於併式的過程及方式不了解**：如： $7 \times 18 = 126$ ， $7 \times 12 = 84$ ， $126 + 84 = 210$ 等三步驟混合計算，如果先算 $18 + 12 = 30$ ，再算 $7 \times 30 = 210$ ，可以簡化計算，因此可以併式為 $7 \times (18 + 12)$ 。當學生不了解這個併式過程及括號先算的意義時，就無法理解各種四則運算的算則，而只是一味的從左至右逐項運算。
3. **計算過程中忽略等號的對稱性**：學生不了解等號具有兩邊需等值的觀念，把等號當作運算結果，因此在逐次減項的算式中可能遺漏了數字，而只列出自己正在計算的數字，如： $100 - 6 \times 5 + 8 = 100 - 30 = 70 + 8 = 78$ ，此計算結果雖然正確，過程卻是錯誤的。
4. **以為分配律的反推算式就是結合律**：因為 $8 \times (3 + 2) = 8 \times 3 + 8 \times 2$ 是乘法對加法的分配律，學生誤以為 $8 \times 3 + 8 \times 2 = 8 \times (3 + 2)$ 就是乘法對加法的結合律，其實 $8 \times 3 + 8 \times 2 = 8 \times (3 + 2)$ 只是分配律的反推算式，仍然屬於分配律。
5. **因為加法和乘法有結合律，以為減法和除法也有結合律**：因為 $(8 + 2) + 5 = 8 + (2 + 5)$ 及 $(12 \times 5) \times 2 = 12 \times (5 \times 2)$ 成立，所以學生誤以為 $(32 \div 8) \div 2 = 32 \div (8 \div 2)$ 及 $(10 - 8) - 2 = 10 - (8 - 2)$ 也成立。
6. **因為加法和乘法有交換律，以為減法和除法也有交換律**：因為 $3 + 4 = 4 + 3$ 及 $5 \times 6 = 6 \times 5$ 成立，所以學生誤以為 $3 - 5 = 5 - 3$ 及 $2 \div 8 = 8 \div 2$ ，因此容易出現不去理解題意，直接用大數減小數或用大數除以小數。尤其是分數的除法，如題目是 2 個披薩分給 8 個人，學生常列成錯誤算式： $8 \div 2$ 。
7. **因為乘法對加、減法有分配律，以為除法對加、減法也有分配律**：因為乘法對加、減法有左右分配律，所以可以說乘法對加、減法的分配律成立；而除法對加、減法只有右分配律，即 $(12 + 6) \div 3 = 12 \div 3 + 6 \div 3$ ，但是 $36 \div (9 + 3) \neq 36 \div 9 + 36 \div 3$ ，所以除法對加、減法的分配律不成立。

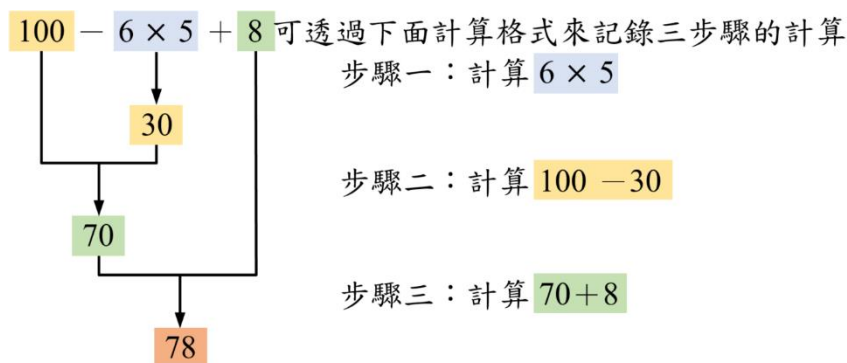
(二)核心概念的教學重點

1. 理解題意後再列式及學習併式

教師應利用多步驟問題讓學生從理解題意後有次序的一一系列式解題，待學生能熟練解決多步驟問題後再開始學習併式。併式教學時需同時呈現多步驟算式，再慢慢併式過渡到能以一個算式紀錄問題。

例如：「小明口袋有 1 個 10 元硬幣和 6 個 5 元硬幣，請問小明共有多少元？」學生理解題意後多步驟解題算式可能為： $6 \times 5 = 30$ ， $10 + 30 = 40$ ；引導學生併式為 $10 + 6 \times 5 = (\quad)$ ，再討論因為乘或除是連加或連減的簡化紀錄形式，因此運算位階高於加或減，所以約定「先乘除後加減」。括號先算也是利用併式需求而產生的共同約定算則。

2. 提供層次清楚的計算格式



3. 乘法對加法的分配律

乘法對加法有右分配律及左分配律，乘號在加號右邊時，如： $(6 + 4) \times 5 = 6 \times 5 + 4 \times 5$ ，稱為乘法對加法的右分配律；乘號在加號左邊時，如： $8 \times (7 + 3) = 8 \times 7 + 8 \times 3$ ，稱為乘法對加法的左分配律。教師應用具體的情境讓學生理解乘法對加法的分配律為何會成立，情境題的數字可以設計成用分配律計算更容易，以產生使用分配律的需求。

例如：「一打鉛筆有 12 枝，小明有黃色鉛筆 8 打，小華有紅色鉛筆 2 打，兩人共有幾枝鉛筆？」引導學生發現 $12 \times 8 + 12 \times 2 = (\quad)$ 比較不容易計算，若能利用分配律改成 $12 \times 8 + 12 \times 2 = 12 \times (8 + 2) = 12 \times 10 = 120$ ，計算上會容易許多。

4. 乘法對減法的分配律

乘號在減號右邊時，如： $(8 - 5) \times 9 = 8 \times 9 - 5 \times 9$ 稱為乘法對減法的右分配律；乘號在減號左邊時，「 $10 \times (9 - 4) = 10 \times 9 - 10 \times 4$ 」稱為乘法對減法的左分配律。教師應用具體的情境讓學生理解乘法對減法的分配律為何會成立，情境題的數字可以設計成用分配律計算更容易，以產生使用分配律的需求。

例如：「一打鉛筆有 12 枝，小明有黃色鉛筆 8 打，小華有紅色鉛筆 2 打，小明比小華多幾枝鉛筆？」引導學生發現 $12 \times 8 - 12 \times 2 = (\quad)$ 比較不容易計算，若能利用分配律改成 $12 \times 8 - 12 \times 2 = 12 \times (8 - 2) = 12 \times 6 = 72$ ，計算上會容易許多。

5. 加法與乘法的結合律

在連加算式中， $(5 + 3) + 7 = 5 + (3 + 7)$ ，所以加法有結合律；在連乘算式中， $(17 \times 5) \times 2 = 17 \times (5 \times 2)$ ，所以乘法也有結合律。教師應用具體的情境讓學生理解加法與乘法的結合律為何會成立，情境題的數字可以設計成用結合律計算更容易，以產生使用結合律的需求。

例如：「有一個長 24 公分、寬 8 公分、高 5 公分長方體，它的體積是多少？」由於長方體是由許多 1 立方公分的白色積木堆疊而成，所以計算體積＝長×寬×高時，可以先算前面「 $(24 \times 8) \times 5$ 」，也可以先算後面「 $24 \times (8 \times 5)$ 」，其體積雖然相同，但學生會發現先算 8×5 會比較容易計算。

(三)本題教學的加強重點

1. 透過擬題討論結合律

本題僅需依題意找出正確的算式不需計算出答案，然而在無情境的算式中，學生容易遺忘結合律使用的規約而僅靠所記憶的算則來進行判斷，因此可透過文字情境敘述幫助學生重新理解結合律，教師可利用題目中的左邊算式數字請學生分別擬題，再讓學生討論右邊算式是否也符合題意，藉以理解結合律在何種條件下成立。

例如依據算式 $(891 + 33) + 3$ 擬題為「養雞場裡面原有 891 隻雞，上個月母雞孵出了 33 隻小雞，昨天母雞又孵出了 3 隻小雞，現在農場共有幾隻雞？」並讓學生討論得知在此情境下左邊的算式 $(891 + 33) + 3$ 與右邊的算式 $891 + (33 + 3)$ 皆成立。

減法、乘法、除法可以此方式類推進行討論。

2. 透過簡化數字的計算進行驗證

結合律的規約除了可以透過文字情境來理解，也可以藉由實際計算來驗證，教師可以將本題數字縮小為 1000、100 與 10，讓學生透過計算再次發現結合律無法在減法與除法情境使用。

$$(1000 + 100) + 10 = 1110 \Rightarrow 1000 + (100 + 10) = 1110,$$

$$(1000 - 100) - 10 = 890 \Rightarrow 1000 - (100 - 10) = 910,$$

$$(1000 \times 100) \times 10 = 1000000 \Rightarrow 1000 \times (100 \times 10) = 1000000,$$

$$(1000 \div 100) \div 10 = 1 \Rightarrow 1000 \div (100 \div 10) = 100.$$

3. 結合律在簡化計算的應用

教師可以舉幾個計算題讓學生感受使用結合律能簡化計算，以利學生未來能靈活運用結合律。

例如加法算式 $(542 + 982) + 18$ ，使用結合律 $542 + (982 + 18)$ 先計算後兩項較為方便；乘法算式 $(24 \times 125) \times 8$ ，使用結合律 $24 \times (125 \times 8)$ 先計算後兩項較為方便。

四、命題建議

本條細目涵括的範圍非常廣泛，可以說是整數四則運算所有性質和規約的總和，在命題時，有二個重點建議把握住：

1. 四則運算的性質著重學生對於運算規約的理解，而非強調計算能力。
2. 四則運算的性質是從生活中的數學應用情境發展而來，新北市歷年皆以選擇題的方式進行呈現，側重於對規約的熟練與判斷，或許可以非選擇題的形式，設計相關情境，藉以了解學生是否理解各規約的意義。

五、歷屆檢測試題參考

(一)105 學年度數學能力檢測第 19 題

知識向度	代數	認知向度	概念理解				
對應分年細目	5-a-03 能熟練運用四則運算的性質，做整數四則混合計算。						
題目	根據四則運算的規則，下列哪一個敘述是 <u>錯誤</u> 的？ ① $48 \times 199 \times 8$ 可以用 $48 \times 100 - 199 \times 8$ 來計算 ② 530×101 可以用 $53000 + 530$ 來計算 ③ 3001×99 可以用 $3001 \times 100 - 3001$ 來計算 ④ $80000 \div 32 \div 4$ 可以用 $80000 \div (32 \times 4)$ 來計算						
答題表現 選項分析	<hr/>						
	選 項	1	2	3	4	其他	答案：1
	<hr/>						
	選項率	0.50	0.21	0.14	0.14	0.01	
<hr/>							
高分組		0.84	0.07	0.04	0.04	0.00	
低分組		0.23	0.28	0.23	0.24	0.02	
<hr/>							

(二)106 學年度數學能力檢測第 6 題

知識向度	代數	認知向度	程序執行				
對應分年細目	5-a-03 能熟練運用四則運算的性質，做整數四則混合計算。						
題目	下列哪一個算式能夠算出「 $24+12\div3\times4$ 」的答案？ ① $36\div3\times4$ ② $24+12\div12$ ③ $24+4\times4$ ④ $(24+12)\div(3\times4)$						
答題表現 選項分析	<hr/>						
	選 項	1	2	3	4	其他	答案：3
	<hr/>						
	選項率	0.17	0.17	0.43	0.23	0.00	
	<hr/>						
	高分組	0.07	0.09	0.79	0.05	0.00	
	低分組	0.24	0.22	0.15	0.39	0.00	

第 9 題

知識向度	數與計算	認知向度	解題思考																												
對應分年細目	5-n-02 能在具體情境中，解決三步驟問題，並能併式計算。																														
題目	<p>「媽媽買了 4 盒鳳梨酥有 48 個，爸爸買了 12 盒鳳梨酥有 96 個，小明先吃了 16 個，剩下的平分成 8 盒，平分後每盒有幾個鳳梨酥？」下列哪個算式可以算出正確答案？</p> <p>① $48+96-16\div8$ ② $(48+96-16)\div8$ ③ $(48\div4+96\div12-16)\div8$ ④ $(48\times4+96\times12)\div8$</p>																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：2</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.10</td><td>0.73</td><td>0.11</td><td>0.06</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.02</td><td>0.94</td><td>0.04</td><td>0.00</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.21</td><td>0.43</td><td>0.20</td><td>0.17</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：2	選項率	0.10	0.73	0.11	0.06	0.00		高分組	0.02	0.94	0.04	0.00	0.00		低分組	0.21	0.43	0.20	0.17	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：2																									
選項率	0.10	0.73	0.11	0.06	0.00																										
高分組	0.02	0.94	0.04	0.00	0.00																										
低分組	0.21	0.43	0.20	0.17	0.00																										

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.51，通過率為 0.73，試題難易度 0.68。

(二) 評量目標說明

本題旨在評量學童是否能在三步驟的具體情境中排除與解題無關的訊息，從中提取正確資訊，並依題意併式計算求出解答。

(三) 選項表現說明

- 有 73% 的學生選擇選項②，顯示大部分的學生已經能掌握題意，知道「4 盒」與「12 盒」是與解題無關的訊息可以忽略不計，僅需計算出剩餘的鳳梨酥數量，再除以 8 盒，即可得知每盒的鳳梨酥數量。
- 有 11% 的學生選擇選項③，這些學生無法理解題意，且可能存有兩個誤解，第一誤以為題目中所有數字均與解題相關，第二誤以為小明吃的鳳梨酥是爸爸、媽媽購買鳳梨酥的「其中一盒」。選項③「 $(48 \div 4 + 96 \div 12 - 16) \div 8$ 」即為先計算出每盒有幾個

鳳梨酥，接著合計爸爸和媽媽所購買鳳梨酥單盒的數量後，才扣掉小明吃的鳳梨酥，最後平分成 8 盒。

3. 有 10% 的學生選擇選項①，這些學生能掌握題意，知道「4 盒」與「12 盒」是與解題無關的訊息可以忽略不計，但忽略四則運算的規約除了由左至右計算之外，還有「先乘/除後加/減」的規約，若需先計算加減則須加上括號。選項①「 $48+96-16\div 8$ 」在缺少括號的情況下，無法從左至右計算，需優先計算 $16\div 8$ ，因此是錯誤選項。
4. 有 6% 的學生選擇選項④，這些學生未能充分理解題意，誤以為「4 盒鳳梨酥，每盒有 48 個」以及「12 盒鳳梨酥，每盒有 96 個」，並忽略小明吃掉的鳳梨酥需要扣掉不計。選項④「 $(48\times 4+96\times 12)\div 8$ 」即為在誤解題意的狀況下先計算鳳梨酥總數量，再平分成 8 盒，因此是錯誤選項。

(四) 學生表現說明

1. 本題主要在評量學童是否能在三步驟的具體情境中，排除與解題無關的訊息，提取與解題相關的資訊，並依題意併式計算求出解答，需具備讀題與判斷的能力，並熟悉四則運算的規約(由左至右計算、先乘/除後加/減、括號先算)且能正確使用。
2. 本題通過率為 0.73。有 7 成多的學生已能篩選題目中的資訊並使用四則運算規約進行併式，但仍有 2 成 7 的學生，概念並不清楚。若從高低分組學生答提情形來看，高分組學生僅有不到 1 成的學生答錯，此題對於高分組學生來說是容易掌握的，然而低分組的學生中有 21% 忽略四則運算的規約、有 37% 除誤解題意外，未能排除與解題無關的訊息(如幾盒)或未注意到與解題相關的訊息(如小明吃掉 16 個)。

二、教材地位分析

97 課綱(分年細目)

(一) 評量重點

5-n-02 能在具體情境中，解決三步驟問題，並能併式計算。

(二) 先備的知識

4-n-04 能在具體情境中，解決兩步驟問題，並學習併式的記法與計算。

(三) 延伸的知識

1. 6-n-05 能在具體情境中，解決分數的兩步驟問題，並能併式計算。
2. 6-n-08 能在具體情境中，解決小數的兩步驟問題，並能併式計算。

十二年國教課綱(學習內容)

(一) 評量重點

1. N-5-2 **解題**：多步驟應用問題。除「平均」之外，原則上為三步驟解題應用。
2. R-5-1 **三步驟問題併式**：建立將計算步驟併式的習慣，以三步驟為主。介紹「平均」。與分配律連結。

(二) 先備的知識

1. R-4-1 **兩步驟問題併式**：併式是代數學習的重要基礎。含四則混合計算的約定(由

左往右算、先乘除後加減、括號先算)。學習逐次減項計算。

2. R-4-2 四則計算規律 (I): 兩步驟計算規則。加減混合計算、乘除混合計算。在四則混合計算中運用數的運算性質。

(三) 延伸的知識

N-6-5 解題：整數、分數、小數的四則應用問題。二到三步驟的應用解題。含使用概數協助解題。

三、教學建議

(一) 評量核心概念

解決三步驟問題並能併式計算。

(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. 未能有效讀取題目訊息：學生沒有先閱讀題意、了解題意的習慣，認為題目中出現的數字都會在解題中使用，甚至養成依照題目中數字出現的順序來依序列式的習慣。
2. 誤解題意：將求單位量的語意(4 盒鳳梨酥共有 48 個)誤為求總量的語意(4 盒鳳梨酥，每盒有 48 個)。
3. 併式錯誤：使用分年細目 5-n-02 的命題為例，是由三個式子「 $48+96=144$ 、 $144-16=128$ 、 $128\div 8=16$ 」所合併，學生可能在合併時遺漏括號使用，造成併式錯誤的情形，如本題的選項①
4. 未正確使用四則運算規約：
 - (1) 誤以為「先乘/除，後加/減」的規約是乘優於除、加優於減，因此出現加法或乘法先算的錯誤情形，例如 $56-10+6=56-16$ 或是 $100\div 4\times 5=100\div 20$ 。
 - (2) 只記得「由左至右計算」而遺漏「先乘/除，後加/減」，例如 $24+6\times 8=30\times 8$ 。
 - (3) 不清楚括號使用的時機，列出沒有括號的算式，例如本題的選項①。
5. 逐次減項有誤：以算式 $(45-5)\times 30\div 2$ 為例，學生可能寫出下列作法： $(45-5)\times 30\div 2=40\times 30=1200\div 2=600$ ，忽略每次的減項中仍須保持等號兩邊相等。

(三) 核心概念的教學重點

多步驟的問題情境下，學生要從過去經驗過的多步驟解題策略，進展到能運用併式的方式來表示題意並進行計算，其教學的順序如下：

1. 閱讀多步驟情境問題：教師可以提供多種具體情境的題目，題目中可以包含一些多餘的訊息，引導學生分析哪些訊息與解題相關，並討論題意、澄清題意。
2. 口頭說明先算什麼、再算什麼：在理解題意之後，學生應能清楚說出先算及後算的內容，以分年細目 5-n-02 的命題為例，學生應說出「先算總共有多少個鳳梨酥、再算小明吃掉 16 個後剩下幾個，最後算平分成 8 盒每盒有幾個」，教師應鼓勵學生不要急著列式，先溝通釐清解題的脈絡更為重要。
3. 依題意列出多步驟算式再進行併式：以分年細目 5-n-02 的命題為例，應列出三個式

子「 $48+96=144$ 、 $144-16=128$ 、 $128\div 8=16$ 」，再併為兩個式子「 $48+96-16=128$ 」，最後併為一個式子「 $(48+96-16)\div 8=16$ 」，若學生已有能力直接寫出併式，可省略上述步驟。

4. **呈現併式錯誤類型**：以分年細目 5-n-02 的命題為例，學生可能會併式為「 $48+96-16\div 8=16$ 」，教師可觀察學生出現的不同錯誤類型即時提出討論，讓學生再次理解四則運算規約的重要性。
5. **逐次減項解題**：以分年細目 5-n-02 的命題為例，逐次減項做法如下

$$\begin{aligned}(48+96-16) \div 8 \\ &= (144-16) \div 8 \\ &= 128 \div 8 \\ &= 16\end{aligned}$$

(四) 本題教學的加強重點

在進行三步驟問題的教學時，教師可參考上述第(三)點核心概念的教學重點進行教學，或可在評量之後進行下述活動。

1. **討論題目中的多餘訊息**：教師可提供多種包含多餘訊息的題目讓學生進行判斷。
2. **進行擬題活動**：利用本題選項進行擬題活動，可再次澄清題意，請學生分組討論選項①、③、④分別符合何種問題情境。

例：選項①的題目情境可以擬題為「媽媽買了 4 盒鳳梨酥有 48 個，爸爸買了 12 盒鳳梨酥有 96 個，小明吃掉 16 個鳳梨酥後，將剩下的鳳梨酥再平分成 8 盒，新的 1 盒有幾個鳳梨酥？」

例：選項③的題目情境可以擬題為「媽媽買了 48 個鳳梨酥分成 4 盒，爸爸買了 96 個鳳梨酥分成 12 盒，小明拿了爸爸、媽媽的各一盒，吃掉 16 個以後，再平分成 8 盒，新的 1 盒有幾個鳳梨酥？」

例：選項④的題目情境可以擬題為「媽媽買了 4 盒鳳梨酥，每盒有 48 個，爸爸買了 12 盒鳳梨酥，每盒有 96 個，全部放在一起再平分成 8 盒，每盒有幾個？」

3. **求出算式答案**：計算選項①及選項②的結果，幫助學生釐清：有/無括號時，計算的結果是不相同的。

四、 命題建議

評量「三步驟問題如何併式」時，將重點放在併式在四則運算規約下計算順序要符合題意，因此可不要求學生計算出正確答案，以判斷併式是否正確的「選擇題」為主。此外可以在題目中增加與解題無關之多餘訊息，讓學生練習判斷題目中的數字是否為解題所必須，舉例如下：

1. 家裡有 50 顆巧克力和 40 顆牛奶糖，全家人吃了 14 顆巧克力，媽媽又買了 60 顆巧克力，妹妹生日那天將所有的巧克力帶去學校分給 6 組的同學，每組得到幾顆巧克力？

- ① $(50+40-14+60)\div 6$
- ② $50+40-14+60\div 6$
- ③ $(50-14+60)\div 6$
- ④ $50-14+60\div 6$

2. 小明期中考數學、國語和英語分別考了 89、92 和 85 分，他這三科的平均成績是多少分？

- ① $89+92+95\div 3$
- ② $89+92+95\times 3$
- ③ $(89+92+95)\div 3$
- ④ $(89+92+95)\times 3$

3. 姐姐在便利商店打工想要存錢買 10000 元的電腦，她一天的薪水有 720 元，固定會存下 500 元，存了 14 天後，還差多少錢就可以買電腦了？

- ① $10000-(720-500)\times 14$
- ② $10000-720\times 14$
- ③ $10000-500\times 14$
- ④ $(10000-500)\times 14$

五、 歷屆檢測試題參考

(一) 104 學年度數學能力檢測第 1 題

知識向度	數與計算	認知向度	解題思考				
對應分年細目	5-n-02 能在具體情境中，解決三步驟問題，並能併式計算。						
題目	撲滿裡面有 45 元，哥哥每天存進 3 元，妹妹每天存進 2 元，11 天後撲滿裡總共有多少元？						
	① 55 元						
	② 78 元						
	③ 100 元						
	④ 550 元						
答題表現 選項分析	選 項	1	2	3	4	其他	答案：3
	選項率	0.11	0.03	0.81	0.05	0.00	
	高分組	0.02	0.00	0.97	0.00	0.00	
	低分組	0.22	0.08	0.55	0.14	0.00	

(二) 105 學年度數學能力檢測第 17 題

知識向度	數與計算	認知向度	解題思考				
對應分年細目	5-n-02 能在具體情境中，解決三步驟問題，並能併式計算。						
題目	<p>「有 2 位家長請全班喝飲料，飲料每杯 45 元；因為訂了 30 杯，所以老闆每杯便宜 5 元。這 2 位家長每人平均要付多少元？」下列哪一個算式能算出正確答案？</p> <p>① $(45 - 5) \times 30 \div 2$ ② $(45 - 5 \times 30) \div 2$ ③ $(45 \times 30 - 5) \div 2$ ④ $45 \times 30 - 5 \div 2$</p>						
答題表現 選項分析	選 項	1	2	3	4	其他	答案：1
	選項率	0.73	0.10	0.13	0.05	0.00	
	高分組	0.93	0.03	0.04	0.01	0.00	
	低分組	0.50	0.17	0.23	0.10	0.00	

(三) 106 學年度數學能力檢測第 10 題

知識向度	數與量	認知向度	解題思考				
對應分年細目	5-n-02 能在具體情境中，解決三步驟問題，並能併式計算。						
題目	<p>「小明和姊姊買了一件 2999 元的洋裝和一個 1895 元的皮包，送給媽媽當作生日禮物。爸爸幫忙付了 2000 元後，姊弟兩人還要各自分攤多少元？」下列哪一個算式能算出正確答案？</p> <p>① $(2999+1895) \div 2 - 2000$ ② $(2999+1895-2000) \div 2$ ③ $(2999+1895) \div 2 + 2000$ ④ $(2999+1895+2000) \div 2$</p>						
答題表現 選項分析	<hr/>						
	選 項	1	2	3	4	其他	答案：2
	<hr/>						
	選項率	0.09	0.84	0.03	0.04	0.00	
	<hr/>						
	高分組	0.01	0.98	0.01	0.00	0.00	
	低分組	0.21	0.60	0.09	0.10	0.00	
<hr/>							

第 10 題

知識向度	數與計算	認知向度	概念理解																												
對應	5-n-09 能理解除數為整數的分數除法的意義																														
題目	<p>「一瓶 $\frac{5}{7}$ 公升的牛奶，平分倒在 5 個杯子，每個杯子有幾公升的牛奶？」</p> <p>下列選項哪個<u>錯誤</u>？</p> <p>① 每杯是 $\frac{5}{7}$ 公升的 $\frac{1}{5}$ 倍</p> <p>② 每杯是「$\frac{5}{7} \times \frac{1}{5}$」公升</p> <p>③ 每杯是「$\frac{5}{7} \div 5$」公升</p> <p>④ 每杯是「$\frac{5}{7} \times 5$」公升</p>																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：4</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.09</td><td>0.09</td><td>0.20</td><td>0.62</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.01</td><td>0.02</td><td>0.04</td><td>0.93</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.20</td><td>0.18</td><td>0.35</td><td>0.28</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：4	選項率	0.09	0.09	0.20	0.62	0.00		高分組	0.01	0.02	0.04	0.93	0.00		低分組	0.20	0.18	0.35	0.28	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：4																									
選項率	0.09	0.09	0.20	0.62	0.00																										
高分組	0.01	0.02	0.04	0.93	0.00																										
低分組	0.20	0.18	0.35	0.28	0.00																										

一、 試題分析

(一) 數據解析：

本題鑑別度為 0.65，通過率為 0.62，試題難易度 0.6。

(二) 評量目標說明：

本題是在等分除的情境下，評量學生是否能轉化分數乘法來解決問題，以及能理解除數為整數的分數除法的意義。

(三) 選項表現說明：

1. 有 62% 的學生選項正確選項④，顯示只有約六成二的學生可以理解及轉化分數除以整數的概念及運算方式。
2. 有 20% 的學生選擇選項③，學生可能認為其他三個選項皆用乘法概念解題，因此本選項錯誤。不過學生也可能已掌握分數除以整數的計算概念，及理解平分是要以除法來計算，但卻忽略本題要求選擇錯誤選項而誤選。
3. 有 9% 的學生選擇選項①，學生可能不能理解平分成 5 等分，則每一等分是總量的 $\frac{1}{5}$ 倍。但學生也可能忽略了本題要求選擇錯誤選項而誤選。
4. 有 9% 的學生選擇選項②，學生可能不理解平分成 5 等份，也就是每一等分是總量的 $\frac{1}{5}$ 倍，因此算式可記錄為「 $\frac{5}{7} \times \frac{1}{5}$ 」。但學生也可能忽略了本題要求選擇錯誤選項而誤選。

(四) 學生表現說明：

1. 本題命題設計的選項皆是對於除法情境的理解，以及是否熟悉「 $\div m$ 」相當於「 $\times \frac{1}{m}$ 」的運算規則。
2. 本題的通過率為 62%，顯示只有約六成的學生能理解等分除情境下的題意，並熟悉「 $\div m$ 」相當於「 $\times \frac{1}{m}$ 」的運算規則。從高分組與低分組學生的表現來看，高分組學生答對率為 93%，表示高分組學生多能理解及運用此運算規則。而低分組學生答對率卻只有 28%，甚至有 35% 的低分組的學生選擇選項③，顯示這些學生可以掌握分數除以整數的計算概念，及理解平分是要以除法來計算，但學生卻不理解「 $\div m$ 」相當於「 $\times \frac{1}{m}$ 」的算則意義。而低分組選擇選項①、選項②的學生將近有 38%，可見學生不熟悉「 $\div m$ 」可以用「 $\times \frac{1}{m}$ 」來運算。綜上可知低分組學生對於抽象的算則不易理解，教師在教學時應特別注意如何讓學生理解後進一步能熟練應用於解題。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

(一) 評量重點

5-n-09 能理解除數為整數的分數除法的意義，並解決生活中的問題。

(二) 先備的知識

1. 4-n-08 能認識真分數、假分數與帶分數，熟練假分數與帶分數的互換，並進行同分母分數的比較、加、減與整數倍的計算。
2. 5-n-08 能理解分數乘法的意義，並熟練其計算，解決生活中的問題。

(三) 延伸的知識

十二年國教課綱（學習內容）

（一）評量重點

N-5-7 分數除以整數：分數除以整數的意義。最後將問題轉化為乘以單位分數。

（二）先備的知識

1. N-4-5 同分母分數：一般同分母分數教學（包括「真分數」、「假分數」、「帶分數」名詞引入）。假分數和帶分數之變換。同分母分數的比較、加、減與整數倍。
2. N-5-5 分數的乘法：整數乘以分數、分數乘以分數的意義。知道用約分簡化乘法計算。處理乘積一定比被乘數大的錯誤類型。透過分數計算的公式，知道乘法交換律在分數也成立。

（三）延伸的知識

N-6-3 分數的除法：整數除以分數、分數除以分數的意義。最後理解除以一數等於乘以其倒數之公式。

三、教學建議

（一）評量核心概念

在等分除情境下，分數除以整數的問題。

（二）學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. 雖以除法列式，但卻用乘法來計算，例如 $\frac{3}{4} \div 3 = \frac{3}{4} \times 3 = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$ 。
2. 被除數的分子和分母皆除以整數，和約分的方法混淆，
例如： $\frac{3}{4} \div 2 = \frac{4}{6} \div 2 = \frac{2}{3}$ 。
3. 不熟悉「 $\div m$ 」相當於「 $\times \frac{1}{m}$ 」的運算規則，除號直接改乘號，
例如： $\frac{3}{4} \div 3 = \frac{3}{4} \times 3$ 。

（三）核心概念的教學重點

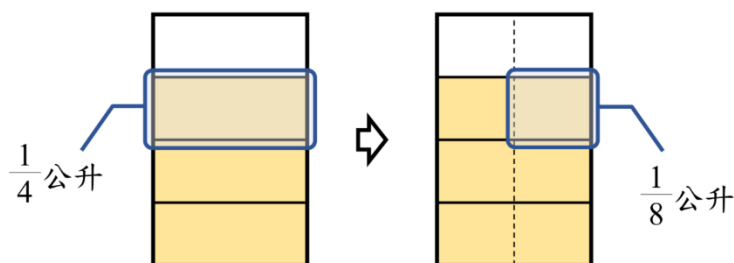
分數除以整數的問題可以是整數除法問題的延伸。

1. 整數除法的問題：

以「6 公升的牛奶，要平分裝成 3 杯牛奶，一杯是幾公升？」為例。這是整數等分除的問題情境，我們將大集合 6 公升看成 6 個小元素「1」公升，平均分配到 3 杯後，再回頭計數每一杯有幾公升。所以， $6 \div 3 = 2$ 得到每一杯有 2 個 1 公升，也就是每一杯有 2 公升。

2. 分數除以整數的問題

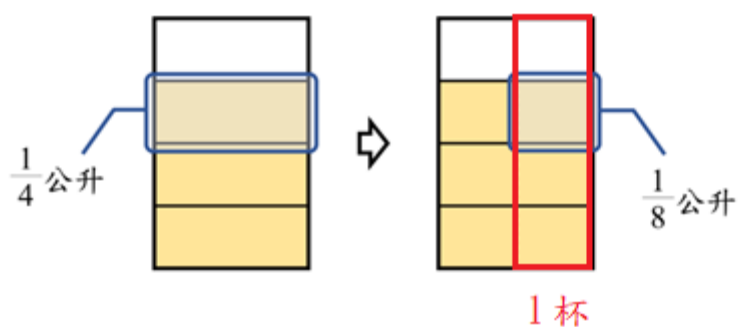
(1)同整數除法，將大集合換成小元素的細分觀點引入：以「 $\frac{3}{4}$ 公升的牛奶，要平分裝成2杯牛奶，一杯是幾公升？」為例。將 $\frac{3}{4}$ 公升視為3個 $\frac{1}{4}$ 公升平分成2份，所以把3個 $\frac{1}{4}$ 公升再細分成6個 $\frac{1}{8}$ 公升，如【圖 10-1】。



【圖 10-1】

所以每一份中有3個 $\frac{1}{8}$ 公升，也就是每杯有 $\frac{3}{8}$ 公升。算式紀錄為

$\frac{3}{4} \div 2 = \frac{3}{8}$ 。如【圖 10-2】。



【圖 10-2】

(2)從分數倍的觀點引入：以「 $\frac{3}{4}$ 公升的牛奶，要平分裝成2杯牛奶，一杯是幾公升？」

為例，題意是要把 $\frac{3}{4}$ 公升的牛奶，平分裝成2份取其中1份。從分數的意義上來看，可以視為「 $\frac{3}{4}$ 公升的 $\frac{1}{2}$ 倍是多少公升？」，引導學生將問題當作分數的分數倍問題，算式記錄成

「 $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = ?$ 」，再用分數乘法算出答案： $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$ 。

(3)教師引導學生觀察除法記錄問題與乘法記錄問題的事實相同，進而引出

$\frac{3}{4} \div 2 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$ ，觀察發現，學生最後要熟知「 $\div 2$ 」相當於「 $\times \frac{1}{2}$ 」之事實，並能熟練計算。

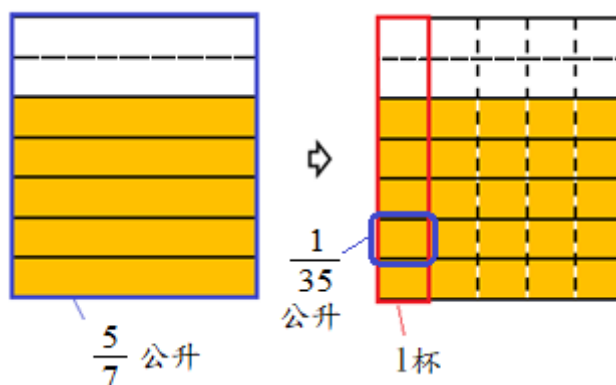
(4)教學時，布題要包含真分數、假分數及帶分數除以整數的問題，也要有離散量與連續量的情境。

(5)教學時，讓學生理解「平分成2等份，就是全部的 $\frac{1}{2}$ 」、「平分成3等份，就是全部的 $\frac{1}{3}$ 」。藉由情境理解並類推，熟知「 $\div m$ 」等於「 $\times \frac{1}{m}$ 」。程序性知識：分數除以整數沒有餘數時，分子不變，分母乘以除數，即： $\frac{\text{分子}}{\text{分母}} \div \text{整數} = \frac{\text{分子}}{\text{分母} \times \text{整數}}$ 。

(四) 本題教學的加強重點

本題希望學生在理解題意後，能在除法概念與分數倍的概念間做理解與轉換，並能以「 $\div m$ 」等於「 $\times \frac{1}{m}$ 」的概念，帶入算式記錄。

1. 以本題為例，同整數除法，教師將大集合換成小元素的細分觀點引入，將 $\frac{5}{7}$ 公升視為5個 $\frac{1}{7}$ 公升平分成5份，所以把5個 $\frac{1}{7}$ 公升再細分成25個 $\frac{1}{35}$ 公升。而每一杯分到其中的5小等份，也就是5個 $\frac{1}{35}$ 公升。如【圖 10-3】



【圖 10-3】

2. 教師亦可從分數倍的觀點引入：以本題為例，題意是要把 $\frac{5}{7}$ 公升的牛奶，平分裝成5份取其中1份，也就是全部的 $\frac{1}{5}$ 。從分數的意義上來看，可以視為「 $\frac{5}{7}$ 公升的 $\frac{1}{5}$ 倍是多少公升？」，引導學生將問題當作分數的分數倍問題，算式記錄成「 $\frac{5}{7} \times \frac{1}{5} = ?$ 」。進而引出 $\frac{5}{7} \div 5 = \frac{5}{7} \times \frac{1}{5}$ ，觀察發現，學生最後要熟知「 $\div 5$ 」相當於「 $\times \frac{1}{5}$ 」之事實，並能熟練計算。

3. 教師亦可利用本題之四個選項中的算式與題目相互澄清，讓學生透過情境思考解題算式的意義是否符合題目情境，以理解選項間的算式是否具有相同代表意義，以澄清算式與題目情境間的關係。另外，再澄清題意所要求解的選擇錯誤選項。

4. 由於除法教學相對比較抽象，教師應該鼓勵學生驗算，並理解其意義。

四、命題建議

甲、選擇命題應盡量避免出現下列何者錯誤的命題，因為其錯誤原因可能是學生真的有迷思概念，但也可能是因為未看清楚題目，看到對的答案就選了該選項。若一定要出現這樣的命題方式，可以設計為解題步驟中哪一項是錯誤的，如此比較能清楚知道學生迷思問題在哪裡，較能針對迷思問題進行補救教學。

乙、分數除以整數可從等分除的情境入手，也可以考慮處理測量(分裝)的情境，如「將 $\frac{1}{2}$ 公升的水倒入容量3公升的水桶， $\frac{1}{2}$ 公升的水是幾桶水？」

五、歷屆檢測試題參考

(一) 104 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

題目	<p>「有一塊$6\frac{12}{15}$公畝的農地，平分成3區種植不同的農作物，問每一區農作物面積是多少？」下列哪一個算式是<u>錯誤</u>的？</p> <p>① $6\frac{12}{15} \div 3 = 6 \div 3 + \frac{12}{15}$</p> <p>② $6\frac{12}{15} \div 3 = 6 \div 3 + \frac{12}{15} \div 3$</p> <p>③ $6\frac{12}{15} \div 3 = 6 \times \frac{1}{3} + \frac{12}{15} \times \frac{1}{3}$</p> <p>④ $6\frac{12}{15} \div 3 = \frac{102}{15} \times \frac{1}{3}$</p>					
答題表現 選項分析	<p>選 項 1 2 3 4 其他 答案：1</p>					
	<p>選項率 0.55 0.19 0.13 0.12 0.01</p>					
	<p>高分組 0.92 0.04 0.02 0.02 0.00</p> <p>低分組 0.20 0.32 0.26 0.21 0.02</p>					

(二) 105 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

題目	冰箱裡有 $1\frac{8}{12}$ 桶豆花，平分給 4 位學生，每位可分得幾桶豆花？ ① $1\frac{2}{12}$ 桶 ② $\frac{5}{12}$ 桶 ③ $\frac{5}{3}$ 桶 ④ $\frac{2}{3}$ 桶					
答題表現 選項分析	選 項	1	2	3	4	其他 答案：2
	選項率	0.07	0.69	0.18	0.06	0.00
	高分組	0.01	0.90	0.08	0.01	0.00
	低分組	0.13	0.49	0.25	0.13	0.00

(三) 106 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

題目	「將 $3\frac{3}{4}$ 公升的果汁平分成 3 杯，每杯有幾公升？」下列選項何者錯誤？					
	① 每杯是「 $3+\frac{3}{4}\div 3$ 」公升					
	② 每杯是「 $3\frac{3}{4}$ 的 $\frac{1}{3}$ 」公升					
	③ 每杯是「 $3\frac{3}{4}\div 3$ 」公升					
	④ 每杯是「 $3\frac{3}{4}\times \frac{1}{3}$ 」公升					
答題表現 選項分析	選 項 1 2 3 4 其他 答案：1					
	選項率 0.39 0.23 0.17 0.19 0.00					
	高分組 0.70 0.14 0.08 0.09 0.00					
	低分組 0.20 0.26 0.29 0.26 0.00					

第 11 題

知識向度	數與計算	認知向度	程序執行
對應分年細目	5-n-12 能用直式處理整數除以整數，商為三位小數的計算。		
題目	汽水工廠將 127 公升的汽水分裝成 125 瓶，每瓶汽水是多少公升？ ①1.0016 公升 ② 1.016 公升 ③ 1.16 公升 ④ 10.16 公升		
答題表現 選項分析	----- 選 項 1 2 3 4 其他 答案：2 -----		
	選項率 0.13 0.67 0.15 0.05 -----		
	高分組 0.07 0.87 0.06 0.004 低分組 0.20 0.40 0.27 0.13 -----		

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.47，通過率為 0.67，試題難易度 0.63。

(二) 評量目標說明

本題是整數除以整數，可以整除且商為三位小數的應用問題，評量學生能否理解在等分除的情境下，運用除法(商為三位小數)解決生活問題的能力。

(三) 選項表現說明

- 有 67%的學生選擇正確選項②，顯示約近七成的學生已經掌握整數除以整數，商為三位小數(整除)的計算能力：

$$\begin{array}{r}
 125 \overline{) 127.16} \\
 \underline{125} \\
 200 \\
 \underline{125} \\
 750
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 750 \\ \hline 0 \end{array}$$

2. 有 13% 的學生選擇選項①，這些學生可能在進行整數除以整數，商為小數的直式計算時，遇到直式中的餘數小於除數時，誤將於商數多補一個 0 後，再換成更小的位值單位繼續分：

$$\begin{array}{r} 1.0016 \\ 125 \overline{) 127} \\ \underline{125} \\ 200 \\ \underline{125} \\ 750 \\ \underline{750} \\ 0 \end{array}$$

3. 有 15% 的學生選擇選項③，這些學生可能在進行整數除以整數，商為小數的直式計算時，遇到直式中的餘數小於除數時，未先於商數補 0 後，再換成更小的位值單位繼續分：

$$\begin{array}{r} 1.16 \\ 125 \overline{) 127} \\ \underline{125} \\ 200 \\ \underline{125} \\ 750 \\ \underline{750} \\ 0 \end{array}$$

4. 有 5% 的學生選擇選項④，這些學生可能在進行整數除以整數，商為小數的直式計算時，商的小數點位置錯誤：

$$\begin{array}{r} 10.16 \\ 125 \overline{) 127} \\ \underline{125} \\ 200 \\ \underline{125} \\ 750 \\ \underline{750} \\ 0 \end{array}$$

(四) 學生表現說明

1. 本題主要希望了解學生理解題意後，能列出整數除以整數的算式，並經由直式計算正確算至餘數為零，商為三位小數的答案，同時檢視學生能否將除法(商為三位小數)的計算能力應用於解決日常生活問題。

2. 本題通過率為 0.67，有近七成的學生對於整數除以整數，商為三位小數的計算已能掌握，但仍有三成的學生無法解題。從高分組與低分組學生的表現來看，87%的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生只有 40%回答正確，有 60%的低分組學生對於整數除以整數，商為三位小數的計算技巧未能充分掌握。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

（一）評量重點

5-n-12 能用直式處理整數除以整數，商為三位小數的計算。

（二）先備的知識

5-n-01 能熟練整數乘、除的直式計算。

（三）延伸的知識

6-n-06 能用直式處理小數除法的計算，並解決生活中的問題。

十二年國教課綱（學習內容）

（一）評量重點

N-5-9 整數、小數除以整數（商為小數）：整數除以整數（商為小數）、小數除以整數的意義。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。能用概數協助處理除不盡的情況。熟悉分母為 2、4、5、8 之真分數所對應的小數。

（二）先備的知識

N-4-6 等值分數：由操作活動中理解等值分數的意義。簡單異分母分數的比較、加、減的意義。簡單分數與小數的互換。

（三）連結的知識

1. N-5-6 整數相除之分數表示：從分裝（測量）和平分的觀點，分別說明整數相除為分數之意義與合理性。
2. N-5-7 分數除以整數：分數除以整數的意義。最後將問題轉化為乘以單位分數。

（四）延伸的知識

N-6-4 小數的除法：整數除以小數、小數除以小數的意義。直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。處理商一定比被除數小的錯誤類型。

三、教學建議

（一）評量核心概念

以直式處理整數除以整數，商為三位小數的計算（整除）。

（二）學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. 對分數為「整數相除」的意涵不了解：因此學生對算式中被除數小於除數會感到懷疑與不確定，如： $1 \div 8$ 可能會在列式時寫成 $8 \div 1$ 。

2. 對小數沒有估算的數感：因此對於商的小數點位置沒有概念，以致於出現小數除法直式計算中商的小數位置錯誤（如下列直式）。

$$\begin{array}{r} 0.125 \\ 8 \overline{) 1.0} \\ \underline{8} \\ 20 \\ \underline{16} \\ 40 \\ \underline{40} \\ 0 \end{array}$$

小數點位置正確

$$\begin{array}{r} 1.25 \\ 8 \overline{) 1.0} \\ \underline{8} \\ 20 \\ \underline{16} \\ 40 \\ \underline{40} \\ 0 \end{array}$$

小數點位置錯誤

$$\begin{array}{r} 12.5 \\ 8 \overline{) 1.0} \\ \underline{8} \\ 20 \\ \underline{16} \\ 40 \\ \underline{40} \\ 0 \end{array}$$

小數點位置錯誤

3. 對於被除數位值有 0 的意義不了解：所以當除法直式的餘數小於除數時，就以為不能再分了，不知補 0 的意義是換成更小的位值後可以繼續分。
4. 忘記商要補 0，或 0 補錯位置：由於位值概念的不熟悉，加上直式算則是精簡後的表徵，因此容易補 0 錯誤，例如本題 $127 \div 125$ ，學生不知直式記錄的第二層中，原 $127 - 125 = 2$ ，2 是指 2 個 1，不夠分 125，所以需在 2 後面補 0，變成 20，但忽略 20 是指 20 個 0.1 (下圖)，不夠分給 125，所以要在商的十分位補 0，才繼續在 20 的後面補上 0，變成 200，指的是 200 個 0.01。在教學上，建議說「沒有分到 0.1」，所以記成「0 個 0.1」。

4. **忘記商要補 0，或 0 補錯位置：**由於位值概念的不熟悉，加上直式算則是精簡後的表徵，因此容易補 0 錯誤，例如本題 $127 \div 125$ ，學生不知直式記錄的第二層中，原 $127 - 125 = 2$ ，2 是指 2 個 1，不夠分 125，所以需在 2 後面補 0，變成 20，但忽略 20 是指 20 個 0.1 (下圖)，不夠分給 125，所以要在商的十分位補 0，才繼續在 20 的後面補上 0，變成 200，指的是 200 個 0.01。在教學上，建議說「沒有分到 0.1」，所以記成「0 個 0.1」。

0.1 不夠分，商的十分位記 0

$$\begin{array}{r} 125 \\ 0.1 \overline{) 125} \\ \underline{125} \\ 0 \end{array}$$

20 個 0.1

(三) 核心概念的教學重點

1. **分數(小數)有「整數相除」意涵：**整數除以整數可以表示為分數，所以分數有「整數相除」的意涵。在教學上應讓學生透過實物進行等分除或包含除的具體操作，再連結到整數相除的數學算式，最後連結到整數相除的分數表達形式，例如：4 個蛋糕平分給 2 個人，列式為 $4 \div 2$ ，故 1 個蛋糕平分給 4 個人，列式為 $1 \div 4$ ，所以每人可以分到 $\frac{1}{4}$ 個蛋糕。若學生對於分數有「整數相除」的意涵了解，當被除數小於除數時，學生才不易產生混淆。
2. **培養小數除法估算的數感：**練習整數相除的運算時，培養學生的數感可以幫助學生估算商的值，例如：1 個蛋糕分給 4 個人， $1 \div 4 = (\quad)$ ，每個人分到的蛋糕應該不到一半，所以應該小於 $\frac{1}{2}$ ，也就是小於 0.5。有了數感，學生在標示商的小數點位置時才不容易錯誤。

2. **培養小數除法估算的數感：**練習整數相除的運算時，培養學生的數感可以幫助學生估算商的值，例如：1 個蛋糕分給 4 個人， $1 \div 4 = (\quad)$ ，每個人分到的蛋糕應該不到一半，所以應該小於 $\frac{1}{2}$ ，也就是小於 0.5。有了數感，學生在標示商的小數點位置時才不容易錯誤。

(四) 本題教學的加強重點

1. **了解除法直式補 0 的意義：**在整數除以整數，商為小數的直式計算中，餘數小於除數時，需將餘數的下一個位值補 0，表示換成更小的位值繼續分。學生若對餘數補 0 的意義不了解，容易造成計算時的位值錯誤，因此教師需澄清並讓學生了解餘數補 0 的意義。
2. **應用位值概念說明直式算則：**小數除以整數時，概念與整數除以整數相同，相除時不留餘數，繼續往下計算，只是要注意商變成小數，因此要加上小數點。在教學上，建議用位值概念，讓學生確認每個數字所代表的位值意義，讓學生理解直式記錄的第二層中，原 $127-125=2$ ，2 是指 2 個 1，不夠分 125，所以需在 2 後面補 0，變成 20，但 20 是指 20 個 0.1(下圖)，還是不夠分給 125，所以要先在商的十分位補 0，代表沒有 0.1 被分出，要在商的十分位記上 0 後，才繼續在直式紀錄的第二層中，把 20 的後面補上 0，變成 200，而這時的 200，指的是 200 個 0.01。

$$\begin{array}{r}
) \quad \boxed{1} \cdot 16 \\
 \underline{125} \\
 127 \\
 \underline{125} \\
 200 \\
 \underline{125} \\
 750 \\
 \underline{750} \\
 0
 \end{array}$$

0.1 不夠分，商的十分位記 0

20 個 0.1

3. **小數除法的數感：**老師可以先讓學生估算 127 除以 125 的答案大約多少，讓學生判斷答案應介於 1 和 2 之間。另外，也可以和學生探討從分數和小數之間換算的觀點解題。學生理解題意後，可以列出如下算式，同樣也可以算出答案：

$$127 \div 125 = \frac{127}{125} = \frac{127 \times 8}{125 \times 8} = \frac{1016}{1000} = 1.016。$$

四、命題建議

- (一) 從 104、105、106 的檢測命題，以及今年的命題來看，發現本條目的題型大致相同：「誰把多少個東西平分成幾份」(例一)。因自己參與了幾次命題工作坊，發現有些題型為每年必考的基本型。所以有沒有可能在命題之前，把必考之基本題型(或學生必須會的基本題型)，直接做成模組，而這些模組題，每年只要改情境跟數字，其他皆不變。好處如下：

1. 減少命題工作坊的困難度，不會大家絞盡腦汁後，還是寫出一樣的題型。
2. 因為模組化，會固定學生的錯誤例(除非有新的迷思)，如此可以比較不同年度，學生的學習情況。未模組化時會發現，為了有差別，導致選項的錯誤類型，有時不太有道理，也無法得知教師在教學時，是否有解決迷思，讓教學效能逐年提升。

- (二) 觀察四年之命題會發現，104、105 年的通過率高於 106、107，探究原因後發現，雖然題幹類似，但在選項的誘答設計上，104、105 年只有小數點位置的差異，106、107 多了商補 0 的錯誤類型，建議爾後的命題除了模組化外，選項的類型應設計有補 0 的錯誤類型，才能診斷出更多學生的學習問題。

五、歷屆檢測題參考

(一) 104 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

題目	爸爸買了 1 瓶容量 1 公升的可樂，要平分給 8 位小朋友，每位小朋友可以喝到多少公升的可樂？ ① 0.125 公升 ② 1.25 公升 ③ 12.5 公升 ④ 125 公升					
答題表現 選項分析	選 項	1	2	3	4	其他 答案：1
	選項率	0.78	0.07	0.04	0.11	0.00
	高分組	0.97	0.01	0.00	0.02	0.00
	低分組	0.47	0.19	0.11	0.22	0.01

(二) 105 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

題目	雜貨店將 12 公斤的麵粉平均分裝成 125 包，每包麵粉重多少公斤？ ① 0.0096 公斤 ② 0.096 公斤 ③ 0.96 公斤 ④ 9.6 公斤					
答題表現 選項分析	選 項	1	2	3	4	其他 答案：2
	選項率	0.08	0.77	0.10	0.05	0.00
	高分組	0.03	0.94	0.03	0.01	0.00
	低分組	0.13	0.58	0.20	0.09	0.00

(三) 106 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

題目	雜貨店將 132 公斤的米分裝成 125 包，每包米重多少公斤？ ① 10.56 公斤 ② 1.56 公斤 ③ 1.056 公斤 ④ 1.0056 公斤					
答題表現 選項分析	選 項	1	2	3	4	其他 答案：3
	選項率	0.06	0.14	0.70	0.10	0.00
	高分組	0.01	0.05	0.89	0.05	0.00
	低分組	0.15	0.28	0.42	0.15	0.00

第 12 題

知識向度	代數	認知向度	程序執行	
對應分年細目	5-a-02 能在具體情境中，理解先乘再除與先除再乘的結果相同，也理解連除兩數相當於除以此兩數之積。			
題目	算式「 $64 \div (4 \times 8)$ 」的答案與下列哪個算式的答案相同？ ① $64 \div 4 \div 8$ ② $64 \div 4 \times 8$ ③ $(64 \times 4) \div 8$ ④ $64 \div 4 \times 64 \div 8$			
答題表現 選項分析	----- ----- 選 項 1 2 3 4 其他 答案：1 ----- ----- 選項率 0.68 0.11 0.08 0.13 0.00 ----- ----- 高分組 0.95 0.01 0.01 0.03 0.00 低分組 0.32 0.28 0.20 0.20 0.00 ----- -----			

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.63，通過率為 0.68，試題難易度 0.63。

(二) 評量目標說明

本題旨在評量學生除了能列出算式外，是否理解四則運算規則中連除兩數與除以兩數之積的結果是相同的，以及添加括號的差異。

(三) 選項表現說明

- 有 68% 的學生選擇正確選項①，顯示約五成的學生已經能理解四則運算的算則中的連除兩數相當於除以此兩數之積。
- 有 11% 的學生選擇選項②，這些學生可能誤以為四則運算中中乘除位階相同，所以有括弧跟沒有括號對答案沒有影響，而選擇選項②。
- 有 8% 的學生選擇選項③，這些學生因原題目括號的位置是在算式在後面 4×8 的部分，而選項③中括號的位置則變到算式前面 $64 \div 4$ 的部分，故認為要運算符號要變號，因此選擇答案③。

4. 有 13% 的學生選擇選項④，這些學生誤把乘法的分配律於此題解括號的運算，而答選項④，顯示出對乘法分配律概念的不理解而產生誤用的情形。

(四) 學生表現說明

1. 本題的命題設計為基本題，主要希望了解學生對於「理解連除兩數相當於除此兩數之積」概念是否完全清楚，同時在選項的設計上，也使學生需判斷括號的位置對算式的影響到，同時要檢核學生對乘法分配律的理解，若學生能充分理解，無需計算即能從選項中判斷出正確答案。
2. 本題的通過率為 0.68，表示有六成三的學生已經理解先乘再除與先除再乘的結果相同以及連除 2 數相當於除以兩數之積。但有三成七的學生，概念並不清楚。從高分組與低分組學生的表現來看，高分組學生的答對率為 95%，低分組學生的答對率 32%，其中低分組有近三分之一的學生對於連除 2 數相當於除以兩數之積的算則並不熟悉或不了解，與對括號在算式中的處理產生困難，以致在解題判斷上的出現錯誤。教師在進行相關教學時，要注意引導學生從生活情境中去理解各種算則產生的需求與必要性。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

(一) 評量重點

5-a-02 能在具體情境中，理解先乘再除與先除再乘的結果相同，也理解連除兩數相當於除此兩數之積。

(二) 先備的知識

1. 4-a-01 能在具體情境中，理解乘法結合律。
2. 4-a-02 能在四則混合計算中，應用數的運算性質。

(三) 延伸的知識

1. 5-a-03 能熟練運用四則運算的性質，做整數四則混合計算。
2. 6-a-04 能利用常用的數量關係，列出恰當的算式，進行解題，並檢驗答案的合理性。

十二年國教課綱（學習內容）

(一) 評量重點

R-5-2 四則計算規律 (II)：乘除混合計算。「乘法對加法的分配律」。將計算規律應用於簡化混合計算。熟練整數四則混合計算。

(二) 先備的知識

1. R-4-1 兩步驟問題併式：併式是代數學習的重要基礎。含四則混合計算的約定（由左往右算、先乘除後加減、括號先算）。學習逐次減項計算。
2. R-4-2 四則計算規律 (I)：兩步驟計算規則。加減混合計算、乘除混合計算。在四則混合計算中運用數的運算性質。

(三) 延伸的知識

R-6-1 數的計算規律：小學最後應認識 (1) 整數、小數、分數都是數，享有一樣的計算規律。(2) 整數乘除計算及規律，因分數運算更容易理解。(3) 逐漸體會乘法和除法的計算實為一體。併入其他教學活動。

三、教學建議

(一) 評量核心概念

利用先乘再除與先除再乘的結果相同，以及連除兩數相當於除此兩數之積簡化計算過程。

(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. 對四則運算中去掉括號後的運算不清楚：因為 $ax(b \div c) = axb \div c$ ，學生常會誤以為 $a \div (b \times c) = a \div b \times c$ 。事實上 $a \div (b \times c) = a \div b \div c$ ，兩者是屬於不同情境下的運算。
2. 對交換律的誤解：因為加法和乘法有交換律，而 $axb \div c = a \div c \times b$ ，學生便誤以為 $a \div (b \times c) = ax(b \div c)$ 或是 $a \div (b \times c) = a \div b \times c$ 。

(三) 核心概念的教學重點

1. 理解「先乘再除」與「先除再乘」的計算結果相同

對於 $axb \div c = a \div c \times b$ ，這是乘法交換律的延伸，因為 $axb \div c = axb \times \frac{1}{c} = ax \frac{1}{c} \times b = a \div c \times b$ ，所以最後計算的結果必然相等。

老師在教學時，可以舉例如下：「蘋果 1 公斤賣 240 元，現在有 6 位同學想要合買 4 公斤的蘋果，平均每人要付多少錢？」並且和學生探討下面所提供的兩個方法，所列出的算式不同，結果會如何？

方法1：先算出 4 公斤的蘋果總共是多少元，再讓 6 位同學平均分攤全部的錢。
列出 $240 \times 4 \div 6$ 這個式子，再計算出每人要付 160 元。

方法2：先算出平均每個人 1 公斤要負擔多少元，再算出 4 公斤蘋果每個人各要付多少元。因此可以列出算式 $240 \div 6 \times 4$ 計算出每人要付 160 元。

可以發現兩個方法所得到的結果相同。

2. 「乘號後有括號」與「除號後有括號」的計算結果不同

對於 $axb \div c$ 這個算式而言，其實就是 $ax(b \times \frac{1}{c}) = axb \times \frac{1}{c}$ 所以計算結果必然相同。但是， $a \div (b \times c)$ 其實是 $ax \frac{1}{b \times c}$ ，因此其計算結果必然和 $ax(b \times \frac{1}{c}) = axb \times \frac{1}{c}$ 是不同的。

老師教學時，可以舉例如下：「老師有 320 枝鉛筆，全部平分給班上的 8 組學生，每組的學生有 4 人，每位學生可以分到幾支鉛筆？」並且和學生探討下面所提供的兩個方法，所列出的算式不同，結果會如何？

方法1：先算出全班有多少位學生之後，再計算將 320 枝鉛筆平分給每位學生，每位學生可以分得幾支鉛筆要如何列式？可以列出 $320 \div (8 \times 4)$ 這個式子。再計算出每位學生可以分到 10 枝鉛筆。

方法2：如果 320 枝鉛筆平分給各組之後，各組在將每組分到的鉛筆平分給每組的人，要如何列式？可以列出 $320 \div 8 \div 4$ 這個式子，計算出每位同學可以分到 10 枝鉛筆。

可以發現兩個式子的結果是相同的。

但如果用 $320 \times (8 \div 4)$ 所計算出的結果是不同的。這個式子所代表的意思，可以看成將 8 位同學平分成 4 組，每組有 2 人，每人可以分到 320 枝鉛筆，所以每一組可以分到 640 枝鉛筆，意思和前面的兩個式子是完全不同的。

(四) 本題教學的加強重點

1. 運用「情境問題」理解連除兩數等於除以兩數之積

在四則運算中 $a \div b \div c = a \div (b \times c)$ 此概念要透過情境問題讓學生理解，以下列情境問題來說明：開心果園裡有 300 顆蘋果，每 12 顆裝成一盒，每 5 盒裝成一箱，請問可以裝成幾箱？

先算 300 顆蘋果可裝幾盒，再算可裝成幾箱？

算式 A： $300 \div 12 \div 5$ （先算 $300 \div 12$ 是算可裝滿幾盒）

$= 25 \div 5$ （再算 $25 \div 5$ 是可裝滿幾箱）

$= 5$ （箱）

先算 1 箱可裝幾顆蘋果，再算 300 顆蘋果可裝成箱？

算式 B： $300 \div (12 \times 5)$ （先算 12×5 是算裝一箱要有幾顆蘋果）

$= 300 \div 60$ （再算 $\div 60$ 是算可裝滿幾箱蘋果）。

由此可得知，「連除兩數等於除以兩數之積」。

教學時應透過情境問題讓學生理解連除兩數等於除以兩數之積，而非只是計算規則的記憶。再利用四則運算規則來檢核此 2 個算式，算式 A： $300 \div 12 \div 5$ 運用四則運算規則，「由左而右算」，要先算 $300 \div 12 = 25$ ，再算 $25 \div 5 = 5$ 得正解 5，算式 B： $300 \div (12 \times 5)$ 運用四則運算規則「先乘除後加減有括號要先算」則要先算 $12 \times 5 = 60$ ，再算 $300 \div 60 = 5$

2. 利用「裸題」與「擬題」強化連除兩數等於除以兩數之積

用練習題如：「 $444 \div 3 \div 4$ 、 $444 \div (3 \times 4)$ 」利用四則運算中由左而右算、有括號要先算的規則，讓兩算式並陳，請學生寫出計算過程，強化學生連除兩數等於除以兩數之積的概念。也可以利用擬題的方式讓學生嘗試說明為何連除兩數等於除以兩數之積，強化學生此概念。

四、命題建議：

1. 括號概念的檢核：

括號是用來標記要先算的部分，有括號的部分要先算，學生往往專注括號的部分，忽略括號前後的運算也要用先乘除後加減的規則，所以命題要診斷學生對括號的理解，如：「乘號後有括號」與「除號後有括號」的計算結果不同，以下例題組：(1) $320 \div (8 \times 4)$ 、 $320 \div 8 \times 4$ (2) $320 \times (8 \div 4)$ 、 $320 \times 8 \div 4$ ，分別計算，診斷學生對括號概念的理解。

2. 乘法對加法及減法的分配律：

本指標應學的重要概念之一，是乘法對加法及減法的分配律以 $46 \times 9 + 46 = 46 \times (9 + 1)$ ，括號中的 1，學生往往無法理解有在哪裡是指什麼？命題時可針對乘法對加法及減法的分配律來診斷， $46 \times 9 + 46 = 46 \times 9 + 46 \times 1 = 46 \times 10$ ； $25 \times (11 - 7) = 25 \times (10 - 4) = 250 - 100 = 150$ 來判斷學生對分配律的理解。

3. 命題參考：

四則運算的性質是從生活中的數學應用情境發展而來，新北市歷年皆以選擇題的方式進行呈現，側重於對規約的熟練與判斷，或許可以非選擇題的形式，設計相關情境，藉以了解學生是否理解各個規約的意義。

五、歷屆檢測試題參考：

(一)106 學年度第 24 題

知識向度	代數	認知向度	解題思考
對應分年細目	5-a-02 能在具體情境中，理解先乘再除與先除再乘的結果相同，也理解連除兩數相當於除以此兩數之積。		
題目	<p>「1 盒原子筆有 6 枝，小傑買了 84 盒，共花了 5040 元。1 枝原子筆是多少元？」下列哪一個算式<u>不能</u>算出正確答案？</p> <p>① $5040 \div (84 \div 6)$， ② $5040 \div 84 \div 6$， ③ $5040 \div (6 \times 84)$， ④ $5040 \div (84 \times 6)$。</p>		
答題表現	<p>選項 1 2 3 4 其他 答案：1</p>		
選項分析	<p>選項率 0.55 0.21 0.14 0.10 0.00</p> <p>高分組 0.88 0.05 0.05 0.02 0.00</p> <p>低分組 0.24 0.33 0.23 0.20 0.00</p>		

(二)105 學年度第 5 題

知識向度	代數	認知向度	概念理解
對應分年細目	5-a-02 能在具體情境中，理解先乘再除與先除再乘的結果相同，也理解連除兩數相當於除以此兩數之積。		
題目	「一包糖果有 50 顆，老師買了 4 包，想平分給 2 個班級的學生，每班可以分到幾顆糖果？」下列哪一個算式 <u>不能</u> 算出正確答案？ ① $50 \times 4 \div 2$ ， ② $50 \div 2 \times 4$ ， ③ $50 \div (4 \times 2)$ ， ④ $50 \times (4 \div 2)$ 。		
答題表現 選項分析	選 項 1 2 3 4 其他 答案：3		
	選項率 0.11 0.08 0.71 0.10 0.00		
	高分組 0.02 0.01 0.94 0.02 0.00		
	低分組 0.21 0.15 0.46 0.18 0.00		

第 13 題

知識向度	數與計算	認知向度	解題思考																												
對應分年細目	5-n-05 能認識兩數的公因數、公倍數、最大公因數與最小公倍數。																														
題目	有一盒餅乾數量不到 60 片，每 6 片裝一盤、每 8 片裝一盤，都剛好分完。 這一盒餅乾的數量，有幾種可能？ ① 2 種 ② 4 種 ③ 7 種 ④ 10 種																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：1</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.57</td><td>0.22</td><td>0.12</td><td>0.08</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.86</td><td>0.08</td><td>0.04</td><td>0.03</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.31</td><td>0.34</td><td>0.20</td><td>0.15</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：1	選項率	0.57	0.22	0.12	0.08	0.00		高分組	0.86	0.08	0.04	0.03	0.00		低分組	0.31	0.34	0.20	0.15	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：1																									
選項率	0.57	0.22	0.12	0.08	0.00																										
高分組	0.86	0.08	0.04	0.03	0.00																										
低分組	0.31	0.34	0.20	0.15	0.00																										

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.55，通過率為 0.57，試題難易度 0.58。

(二) 評量目標說明

本題是公倍數的相關問題，評量學生是否能在指定數字範圍內找出所有的公倍數。

(三) 選項表現說明

- 約有 57% 的學生選擇正確選項①，顯示有大約一半的學生能利用列表法及兩數相乘等方法，找出題目要求範圍內的公倍數。
- 約有 22% 的學生選擇選項②，這些學生可能不了解題意，不知道本題需要利用公倍數來求解，因此用加乘來湊出答案。誤以為一盤有 8+6 個餅乾，並將總數量除以每盤要裝 14 片餅乾 $60 \div 14 = 4 \cdots 4$ ，得到商為 4。
- 約有 12% 的學生選擇選項③，這些學生可能未完全理解題意，誤認為只要求的 8 倍數即可，忽略了也要是 6 的倍數。
- 約有 8% 的學生選擇選項④，這些學生可能不理解情境問題，誤認為只要是 6 的倍

數即可，忽略了也要是 8 的倍數。

(四) 學生表現說明

1. 本題的目的在於評量學生是否能利用公倍數的概念來解決日常生活中的問題，並運用列舉法找出指定數字範圍內兩數的公倍數。
2. 本題難易度為 0.58。有將近五成七的學生能用列舉倍數的方式找出兩數的公倍數，應用於解決日常生活中的問題。但仍有將近四成的學生無法解題。從高分組與低分組學生的表現來看，約有 86% 的高分組學生能正確回答問題，但仍有將近一成多的學生無法解題。而低分組學生只有 31% 回答正確，約有 69% 的低分組學生選擇其他的選項，顯示學生對於使用公倍數的問題情境未能充分理解，且仍然不清楚公倍數的概念。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

(一) 評量重點

5-n-05 能認識兩數的公因數、公倍數、最大公因數與最小公倍數。

(二) 先備的知識

1. 5-n-01 能熟練整數乘、除的直式計算。
2. 5-n-04 能理解因數和倍數。

(三) 延伸的知識

1. 6-n-01 能認識質數、合數，並用短除法做質因數的分解（質數 <20 ，質因數 <20 ，被分解數 <100 ）。
2. 6-n-02 能用短除法求兩數的最大公因數、最小公倍數。

十二年國教課綱（學習內容）

(一) 評量重點

N-5-3 公因數和公倍數：因數、倍數、公因數、公倍數、最大公因數、最小公倍數的意義。

(二) 先備的知識

1. N-2-6 乘法：乘法的意義與應用。在學習乘法過程，逐步發展「倍」的概念，做為統整乘法應用情境的語言。
2. N-4-2 較大位數之乘除計算：處理乘數與除數為多位數之乘除直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。

(三) 延伸的知識

1. N-6-1 20 以內的質數和質因數分解：小於 20 的質數與合數。2、3、5 的質因數判別法。以短除法做質因數的分解。
2. N-6-2 最大公因數與最小公倍數：質因數分解法與短除法。兩數互質。運用到分數的約分與通分。

三、教學建議

(一) 評量核心概念

透過分別列舉因數、倍數的方式找出兩數的公因數、公倍數。

(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. **基本概念的理解困難：**「因數」、「倍數」、「公因數」、「公倍數」、「最大公因數」、「最小公倍數」等概念上的誤解，由於因數和倍數安排在同一個單元，許多學生更是在學習倍數之後就將因、倍數兩者的概念互相顛倒混淆，常見迷思如下：
 - (1) 基本名詞的混淆，例如誤以為「因數」是「倍數」，「倍數」是「因數」，或者誤以為是「最小公因數」和「最大公倍數」。
 - (2) 兩數關係的混淆，例如 12 是 84 的因數，是以前者(12)的角色來定義，但學生卻誤以後者(84)的角色來定義，而誤為 12 是 84 的倍數。
2. **計算時容易遺漏答案：**因、倍數的單元是學生少數會利用列舉窮盡法來解題的單元，以往學生所經驗的數學題大多是針對兩個數字做加減乘除的運算，遇到因、倍數的單元，因、倍數則是要逐一列舉合理的答案進行驗證，在不熟悉此種解題方式的狀況下，很容易缺漏答案。
 - (1) 遇到數字較大的情況，例如 72，它的因數有 1、2、3、4、6、8、9、12、18、24、36、72 等十二個之多，稍不留意就會遺漏。
 - (2) 部分學生未能利用除法算式的關係來簡化計算，即透過 $12 \div 2 = 6$ 的計算同時也可得知 $12 \div 6 = 2$ ，利用前面的除法算式即可得到 2 和 6 兩個因數，不需要再計算後者，若學生未能理解及觀察到大部分的因數都是成對出現而簡化計算，將會花費過多時間求解且容易遺漏。
3. **因倍數文字題理解困難：**大部分學生能解決因倍數的計算題，但面對文字題時卻有較多的困擾，無法發覺題目是需要運用因倍數的概念解題，或者無法判斷是需要運用因數或者倍數的概念解題。
 - (1) 例如學生可以找出 24 的所有因數，但對於因數的應用問題「24 顆糖果要平分成每包一樣多，且要全部分完，有哪些分法？」卻無法用找因數的方式解題。
 - (2) 求公因數的文字題對學生來說難度更高，例如學生可以找出 20 和 15 的公因數，但對於公因數的應用問題「20 個男生和 15 個女生要平分成幾組，各組的男生一樣多，各組的女生也要一樣多，可以分成幾組？」卻無法判斷是要用公因數來解題。

(三) 核心概念的教學重點

1. 公因數、最大公因數的教學：

- (1) 「公因數」即為兩數共有的因數，而「最大公因數」即為公因數中最大者。所以在進行公因數教學時，可先請學生分別列舉出兩數各自的因數，在兩數因數之間有相同者，即為兩數的公因數。例如：

18 的因數： $\boxed{1}$ 、 $\boxed{2}$ 、 $\boxed{3}$ 、 $\boxed{6}$ 、9、18；

24 的因數： $\boxed{1}$ 、 $\boxed{2}$ 、 $\boxed{3}$ 、4、 $\boxed{6}$ 、8、12、24。

18 與 24 相同的因數有 1、2、3、6，這些數即為兩數的「公因數」。而公因數中最大者，即為二數的「最大公因數」。以上面的例子為例，6 為 4 個公因數中最大者，因此 6 就是 18 和 24 的「最大公因數」。

(2)任何大於零的整數一定有 1 這個因數，而且是最小的因數，因此任意兩個整數的最小公因數必為 1。

2. 公倍數、最小公倍數的教學：

「公倍數」即為兩數共有的倍數，而「最小公倍數」即為公倍數中最小者。以 18 和 24 為例：

18 的倍數：18、36、54、72、90、108、126、144……；

24 的倍數：24、48、72、96、120、144……。

18 與 24 相同的倍數有 72、144……，可以用列舉的方式找出兩數的公倍數。同時可以發現只要是 72 的倍數一定也會是 18 和 24 的公倍數，並引導學生發現能找到的 18 與 24 兩數的最小公倍數為 72，但找不到最大的公倍數。老師可以再舉例說明，讓學生發現任意兩個大於零的整數，只能找到最小公倍數，但找不到最大的公倍數。

3. 將因倍數概念與生活情境連結：

進行因倍數教學時，應盡可能時時引導學生思考學習這個概念可以應用在生活中哪些地方，並連結學生過去學習的經驗，讓學生發現使用因倍數概念是一種進階的解題方式，以下舉例說明之。

(1)因數：可運用在平分和分裝情境的問題，例如「50 顆糖果，要平分成幾包，全部分完不能有剩下，可以有幾種分法？」、「班上有 30 個人，幾個人一組可以剛好分完，不會有人剩下？」，學習因數之前學生也可以利用除法來解這樣的題目，現在將這樣的問題轉為用因數解題，較容易找出可能的所有答案。

(2)公因數：可用運在解決兩種物品需要同時平分和分裝的情境，或是有關面積的長寬問題，例如「50 顆糖果和 30 包餅乾，可以平分成幾包，全部分完不能有剩下，而且每包的糖果一樣多，餅乾也一樣多？」、「長 20 公分、12 公分的色紙，想把它全部剪成一樣大小的正方形，正方形的大小有幾種可能？」當學生無法直接把這樣的題目連結到運用公因數解題時，可以用分段佈題的方式「先找出平分 50 顆糖果的可能」、「再找出平分 30 包餅乾的可能」、「兩種物品一起分的時候」，讓學生透過操作或試誤了解使用公因數解題的原因。

(四) 本題教學的加強重點

本題是公倍數的問題，學生無法解題的可能主要原因是不理解為何要使用公倍數解題，因而用除法或找倍數的方式解題，因此老師可用分段佈題的方式，引導學生逐步解題，最後再歸納可使用公倍數來解題。

1. 請學生解題「有一盒餅乾數量不到 60 片，每 6 片裝一盤都剛好分完。這一盒餅乾的數量，有幾種可能？」，找出答案有 6、12、18…、60 片。
2. 再請學生解題「有一盒餅乾數量不到 60 片，每 8 片裝一盤都剛好分完。這一盒餅乾的數量，有幾種可能？」，找出答案有 8、16、24…、56 片。
3. 請學生思考「如果同時要 6 片裝一盤和 8 片裝一盤都要剛好分完，改怎麼辦呢？」，學生可從前兩步驟的答案找出共同解為 24 和 48。
4. 請學生思考剛剛使用的方法是屬於找因數、倍數、公因數或公倍數，並說明理由。

四、 命題建議

針對因倍數概念，學生最容易產生迷思的部分是(一)將因倍數相關名詞混淆，以及(二)不知道如何應用因倍數概念，建議在評量時可從這兩個面向著手，盡量減少計算題，例如：求某兩數的公因數、求某兩數的最小公倍數…等，應讓學生多加思考因倍數的意義，而非只有熟練計算。以下從兩面向進行說明。

- (一) **因倍數相關名詞的澄清布題：**可將多種因倍數名詞與概念統整再一起，學生可以不需計算，但可以幫助學生釐清每種概念之間的差異所在。除下面例題外，可參見第五大點所列之 105 學年度數學能力檢測題。

例：從算式「 $52 \div 13 = 4$ 」可得知下列哪個敘述是正確的？

- ① 4 是 13 的因數
- ② 52 是 13 的因數
- ③ 4 和 13 是 52 的公因數
- ④ 52 是 4 和 13 的倍數

- (二) **應用因倍數概念的生活情境布題：**除下面例題外，可參見第五大點所列之 106 學年度數學能力檢測題。

例：老師有 45 枝鉛筆和 30 個橡皮擦要發給學生，每位學生分到的鉛筆和橡皮擦要一樣多，老師最多可以分給幾位學生？

五、 歷屆檢測試題參考

- (一) 104 學年度數學能力檢測第 4 題

知識向度	數與計算	認知向度	概念理解																												
對應分年細目	5-n-05 能認識兩數的公因數、公倍數、最大公因數與最小公倍數。																														
題目	<p>已知 54 是 6 的倍數，也是 9 的倍數，所以 54 是 6 和 9 的公倍數。下列哪一個數也是 6 和 9 的公倍數？</p> <p>① 3</p> <p>② 36</p> <p>③ 60</p> <p>④ 63</p>																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：2</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.18</td><td>0.77</td><td>0.03</td><td>0.02</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.03</td><td>0.96</td><td>0.00</td><td>0.00</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.35</td><td>0.51</td><td>0.07</td><td>0.06</td><td>0.01</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：2	選項率	0.18	0.77	0.03	0.02	0.00		高分組	0.03	0.96	0.00	0.00	0.00		低分組	0.35	0.51	0.07	0.06	0.01	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：2																									
選項率	0.18	0.77	0.03	0.02	0.00																										
高分組	0.03	0.96	0.00	0.00	0.00																										
低分組	0.35	0.51	0.07	0.06	0.01																										

(二) 105 學年度數學能力檢測第 3 題

知識向度	數與計算	認知向度	概念理解
對應分年細目	5-n-05 能認識兩數的公因數、公倍數、最大公因數與最小公倍數。		
題目	下列敘述何者正確？ ① 2 和 4 的最小公倍數是 8 ② 2 和 4 的最小公因數是 2 ③ 4 和 8 的最大公倍數是 32 ④ 4 和 8 的最大公因數是 4		
答題表現 選項分析	選 項 1 2 3 4 其他 答案：4		
	選項率 0.19 0.34 0.18 0.29 0.00		
	高分組 0.12 0.24 0.06 0.59 0.00		
	低分組 0.25 0.37 0.28 0.10 0.00		

(三) 106 學年度數學能力檢測第 2 題

知識向度	數與計算	認知向度	概念理解
對應分年細目	5-n-05 能認識兩數的公因數、公倍數、最大公因數與最小公倍數。		
題目	用相同的小磁磚貼滿一個正方形的圖形，小磁磚的長、寬分別為 8 公分與 6 公分，貼出來的正方形邊長可能是幾公分？ ① 14 公分 ② 24 公分 ③ 36 公分 ④ 64 公分		
答題表現 選項分析	選 項 1 2 3 4 其他 答案：2		
	選項率 0.16 0.62 0.08 0.11 0.00		
	高分組 0.06 0.88 0.01 0.03 0.00		
	低分組 0.26 0.35 0.18 0.20 0.00		

第 14 題

知識向度	數與計算	認知向度	程序執行
對應分年細目	5-n-12 能用直式處理整數除以整數，商為三位小數的計算。		
題目	餐廳推出套餐，A 餐價錢 792 元，B 餐價錢 495 元。B 餐價錢是 A 餐價錢的幾倍？ ① 0.16 倍 ② 0.625 倍 ③ 1.6 倍 ④ 6.25 倍		
答題表現 選項分析	----- 選 項 1 2 3 4 其他 答案：2 -----		
	----- 選項率 0.08 0.51 0.36 0.04 -----		
	----- 高分組 0.02 0.79 0.19 0.006 低分組 0.17 0.25 0.46 0.11 -----		
	----- ----- -----		

六、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.54，通過率為 0.51，試題難易度 0.52。

(二) 評量目標說明

本題是整數除以整數(被除數小於除數)，可以整除且商為三位小數的應用問題，評量學生能否理解在包含除的情境下，運用除法(商為三位小數)解決生活問題的能力。

(三) 選項表現說明

- 有 51%的學生選擇正確選項②，顯示大部分的學生已經掌握整數除以整數，商為三位小數(整除)的計算能力：

$$\begin{array}{r}
 92 \overline{) 792} \\
 \underline{495} \\
 297 \\
 \underline{198} \\
 990 \\
 \underline{990} \\
 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 3960 \\
 3960 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

2. 有 8% 的學生選擇選項①，這些學生可能在進行整數除以整數，不了解題意，將大數除以小數，故用 792 元除以 495 元，並在商為小數的直式計算時，商的小數點位置錯誤：

$$\begin{array}{r}
 0.16 \\
 495 \overline{) 792} \\
 \hline
 792 \\
 495 \\
 \hline
 2970 \\
 2970 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

3. 有 36% 的學生選擇選項③，這些學生可能在進行整數除以整數，不了解題意，將大數除以小數，故用 792 元除以 495 元：

$$\begin{array}{r}
 1.6 \\
 495 \overline{) 792} \\
 \hline
 495 \\
 2970 \\
 2970 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

1. 有 4% 的學生選擇選項④，這些學生可能在進行整數除以整數，商為小數的直式計算時，商的小數點位置錯誤：

$$\begin{array}{r}
) \quad 6.5 \\
 792 \overline{) 495} \\
 \hline
 4950 \\
 4752 \\
 \hline
 1980 \\
 1584 \\
 \hline
 3960 \\
 3960 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

(二) 學生表現說明

1. 本題主要希望了解學生理解題意後，能列出整數除以整數的算式，並經由直式計算正確算至餘數為零，商為三位小數的答案，同時檢視學生能否將除法(商為三位小數)的計算能力應用於解決日常生活問題。

2. 本題通過率為 0.51，有五成的學生對於整數除以整數，商為三位小數的計算已能掌握，但仍有五成的學生無法解題。從高分組與低分組學生的表現來看，79%的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生只有 25%回答正確，有 11%的低分組學生對於整數除以整數，商為三位小數的計算技巧未能充分掌握，更有 19%的高分組學生與 63%的低分組學生，不理解題意，導致被除數與除數錯置。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

（一）評量重點

5-n-12 能用直式處理整數除以整數，商為三位小數的計算。

（二）先備的知識

5-n-01 能熟練整數乘、除的直式計算。

（三）延伸的知識

6-n-06 能用直式處理小數除法的計算，並解決生活中的問題。

十二年國教課綱（學習內容）

（五）評量重點

N-5-9 整數、小數除以整數（商為小數）：整數除以整數（商為小數）、小數除以整數的意義。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。能用概數協助處理除不盡的情況。熟悉分母為 2、4、5、8 之真分數所對應的小數。

（六）先備的知識

N-4-6 等值分數：由操作活動中理解等值分數的意義。簡單異分母分數的比較、加、減的意義。簡單分數與小數的互換。

（七）連結的知識

3. N-5-6 整數相除之分數表示：從分裝（測量）和平分的觀點，分別說明整數相除為分數之意義與合理性。

4. N-5-7 分數除以整數：分數除以整數的意義。最後將問題轉化為乘以單位分數。

（八）延伸的知識

N-6-4 小數的除法：整數除以小數、小數除以小數的意義。直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。處理商一定比被除數小的錯誤類型。

三、教學建議

（一）評量核心概念

以直式處理整數除以整數，商為三位小數的計算（整除）。

（二）學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. 對分數為「整數相除」的意涵不了解：因此學生對算式中被除數小於除數會感到懷

疑與不確定，如： $495 \div 792$ 可能會在列式時寫成 $792 \div 495$ 。

2. **對小數沒有估算的數感**：因此對於商的小數點位置沒有概念，以致於出現小數除法直式計算中商的小數位置錯誤（如下列直式）：

$$\begin{array}{r} 0.125 \\ 8 \overline{) 1.0} \\ \underline{8} \\ 20 \\ \underline{16} \\ 40 \\ \underline{40} \\ 0 \end{array}$$

小數點位置正確

$$\begin{array}{r} 1.25 \\ 8 \overline{) 1.0} \\ \underline{8} \\ 20 \\ \underline{16} \\ 40 \\ \underline{40} \\ 0 \end{array}$$

小數點位置錯誤

$$\begin{array}{r} 12.5 \\ 8 \overline{) 1.0} \\ \underline{8} \\ 20 \\ \underline{16} \\ 40 \\ \underline{40} \\ 0 \end{array}$$

小數點位置錯誤

3. **對於被除數位值有 0 的意義不了解**：所以當除法直式的餘數小於除數時，就以為不能再分了，不知補 0 的意義是換成更小的位值後可以繼續分。

（三）核心概念的教學重點

1. **分數有「整數相除」意涵**：整數除以整數可以表示為分數，所以分數有「整數相除」的意涵。在教學上應讓學生透過實物進行等分除或包含除的具體操作，再連結到整數相除的數學算式，最後連結到整數相除的分數表達形式，例如：4 個蛋糕平分給 2 個人，列式為 $4 \div 2$ ，故 1 個蛋糕平分給 4 個人，列式為 $1 \div 4$ ，所以每人可以分到 $\frac{1}{4}$ 個蛋糕。若學生對於分數有「整數相除」的意涵了解，當被除數小於除數時，學生才不易產生混淆。
2. **培養小數除法估算的數感**：練習整數相除的運算時，培養學生的數感可以幫助學生估算商的值，例如：1 個蛋糕分給 4 個人， $1 \div 4 = (\quad)$ ，每個人分到的蛋糕應該不到一半，所以應該小於 $\frac{1}{2}$ ，也就是小於 0.5。有了數感，學生在標示商的小數點位置時才不容易錯誤。

（四）本題教學的加強重點

1. **了解除法直式補 0 的意義**：在整數除以整數，商為小數的直式計算中，餘數小於除數時，需將餘數的下一個位值補 0，表示換成更小的位值繼續分。學生若對餘數補 0 的意義不了解，容易造成計算時的位值錯誤，因此教師需澄清並讓學生了解餘數補 0 的意義。
2. **小數除法的數感**：老師可以先讓學生估算 495 除以 792 的答案大約多少，讓學生判斷答案小於 1。
3. **對於問題的題意釐清**：在解題時先要求學童先朗讀題目，並與同學討論已知條件及解題目標，再透過師生的問答來釐清題意，了解解題的關鍵並擬定解題計畫。相關做法建議如下：

（一）簡化問題：在教師完成佈題後，當學生朗讀完題目，教師要問學生：

1. 說什麼：請學生用至己的話，把題目簡要的說一次。

例如本題，要引導學生簡化說出「A 餐是 792 元，B 餐是 495 元，要算 B 餐是 A

餐的幾倍。

2. 為什麼：為什麼題目的解法要那樣做。

例如本題，學生要能判斷以誰為主、為基準，為什麼是小數(B餐)除以大數(A餐)，而不是大數(A餐)除以小數(B餐)。

(二) 增加圖像表徵：在教學中，藉由圖式，增加對題意的理解。

例如本題，可在黑板上貼上線段圖(如下圖)。

A 餐： 792 元

B 餐： 495 元

透過討論，讓學生發現以 B 餐為主時，倍數會大於 1；反過來以 A 餐為主時，結果會小於 1。

(三) 換別人說：請學生舉出與題目類似的情境、例題，讓同儕互相檢視例子是否合理。藉由不斷的澄清、反駁、同意的過程，增加學生對題意的掌握。

四、 命題建議

(一) 本題與 104、105、106 的命題不同，為倍數比較型的包含除問題，可以發現學生對於比較型問題容易發生不理解題意的問題。

(二) 參照 104-107 的命題發現，本條目的迷思及錯誤類型，在商的補 0 及比較型問題中出現的比例，高於商的小數點點錯位置，所以爾後的命題，可朝比較型除髮問題做題幹設計，而誘答選項可以安排商須補 0 的錯誤類型。

五、 歷屆檢測題參考

(一) 104 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

題目	爸爸買了 1 瓶容量 1 公升的可樂，要平分給 8 位小朋友，每位小朋友可以喝到多少公升的可樂？					
	① 0.125 公升 ② 1.25 公升 ③ 12.5 公升 ④ 125 公升					
答題表現 選項分析	選 項	1	2	3	4	其他 答案：1
	選項率	0.78	0.07	0.04	0.11	0.00
	高分組	0.97	0.01	0.00	0.02	0.00
	低分組	0.47	0.19	0.11	0.22	0.01

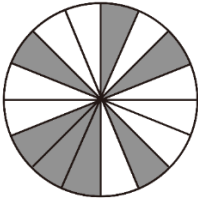
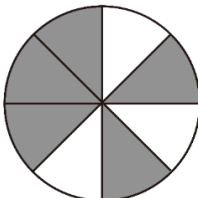
(二) 105 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

題目	雜貨店將 12 公斤的麵粉平均分裝成 125 包，每包麵粉重多少公斤？ ① 0.0096 公斤 ② 0.096 公斤 ③ 0.96 公斤 ④ 9.6 公斤					
答題表現 選項分析	選 項	1	2	3	4	其他 答案：2
	選項率	0.08	0.77	0.10	0.05	0.00
	高分組	0.03	0.94	0.03	0.01	0.00
	低分組	0.13	0.58	0.20	0.09	0.00

(三) 106 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

題目	雜貨店將 132 公斤的米分裝成 125 包，每包米重多少公斤？ ① 10.56 公斤 ② 1.56 公斤 ③ 1.056 公斤 ④ 1.0056 公斤					
答題表現 選項分析	選 項	1	2	3	4	其他 答案：3
	選項率	0.06	0.14	0.70	0.10	0.00
	高分組	0.01	0.05	0.89	0.05	0.00
	低分組	0.15	0.28	0.42	0.15	0.00

第 15 題

知識向度	數與計算	認知向度	程序執行																												
對應分年細目	5-n-07 能用通分做簡單異分母分數的比較與加減。																														
題目	<p>有甲、乙兩個相同的圓，甲被平分成 16 等分，乙被平分成 8 等分(如下圖)。甲、乙兩圓的灰色部分相差多少個圓？</p> <div><div><p>(甲圓)</p></div><div><p>(乙圓)</p></div></div> <p>① $\frac{2}{16}$ 個圓 ② $\frac{3}{16}$ 個圓 ③ $\frac{2}{8}$ 個圓 ④ $\frac{6}{16}$ 個圓</p>																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：2</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.11</td><td>0.67</td><td>0.13</td><td>0.09</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.03</td><td>0.93</td><td>0.03</td><td>0.01</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.23</td><td>0.33</td><td>0.26</td><td>0.18</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：2	選項率	0.11	0.67	0.13	0.09	0.00		高分組	0.03	0.93	0.03	0.01	0.00		低分組	0.23	0.33	0.26	0.18	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：2																									
選項率	0.11	0.67	0.13	0.09	0.00																										
高分組	0.03	0.93	0.03	0.01	0.00																										
低分組	0.23	0.33	0.26	0.18	0.00																										

二、試題分析

甲、 數據解析

本題鑑別度為 0.6，通過率為 0.67，試題難易度 0.63。

乙、 評量目標說明

本題旨在了解學生是否理解通分的概念，並評量學生是否能運用通分的方式進行異分母分數的減法計算。

丙、 選項表現說明

- i. 有 67% 的學生選擇正確選項②，顯示學生能知道甲圓灰色部分是 $\frac{7}{16}$ 個圓，乙圓灰色部

分是 $\frac{5}{8}$ 個圓，並夠運用通分的方式進行異分母分數的減法計算：

甲圓灰色部分是 $\frac{7}{16}$ 個圓，乙圓灰色部分是 $\frac{5}{8}$ 個圓 = $\frac{10}{16}$ 個圓，兩個相減後，

$$\frac{10}{16} - \frac{7}{16} = \frac{3}{16}。$$

- ii. 有 13% 的學生選擇選項③，這些學生可能不了解單位量及單位分數的概念，直接將兩數的分母與分子相減：

$$\frac{7}{16} - \frac{5}{8} = \frac{2}{8}。$$

- iii. 有 11% 的學生選擇選項①，這些學生不了解通分的方式，可能擴分只擴分分母，分子沒有擴分：

$$\frac{7}{16} - \frac{5}{8} = \frac{7}{16} - \frac{5}{8 \times 2} = \frac{7}{16} - \frac{5}{16} = \frac{7-5}{16} = \frac{2}{16}。$$

- iv. 有 9% 的學生選擇選項④，這些學生可能不理解題意是要求灰色部分，以白色部分求得答案，也不理解通分的方式，可能擴分時只擴分分母，分子沒有擴分：

$$\frac{9}{16} - \frac{3}{8} = \frac{9}{16} - \frac{3}{16} = \frac{9-3}{16} = \frac{6}{16}。$$

丁、學生表現說明

- i. 本題的命題設計為簡單異分母分數的減法應用問題，主要希望了解學生對於等值分數的基本概念是否理解，並能運用通分方式解決簡單異分母分數的減法計算問題的能力。
- ii. 本題通過率為 67%。有約 6 成 7 的學生已能熟練運用通分解決異分母分數的加減問題，但仍有近 3 成 3 的學生，概念並不清楚。從高分組與低分組學生的表現來看，93% 的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生只有 33% 回答正確，其中錯誤選項③的選答率有 26%。顯示低分組學生中有許多學生對於單位量、單位分數、等值分數、通分等概念並不熟悉，因此無法成功解題。

三、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

甲、評量重點

5-n-07 能用通分做簡單異分母分數的比較與加減。

乙、先備的知識

- i. 4-n-09 能認識等值分數，進行簡單異分母分數的比較，並用來做簡單分數與小數的互換。
- ii. 5-n-06 能用約分、擴分處理等值分數的換算。

丙、 延伸的知識

- i. 5-n-08 能理解分數乘法的意義，並熟練其計算，解決生活中的問題。
- ii. 5-n-09 能理解除數為整數的分數除法的意義，並解決生活中的問題。

十二年國教課綱（學習內容）

（二） 評量重點

N-5-4 異分母分數：用約分、擴分處理等值分數並做比較。用通分做異分母分數的加減。養成利用約分化簡分數計算習慣。

（三） 先備的知識

N-4-6 等值分數：由操作活動中理解等值分數的意義。簡單異分母分數的比較、加、減的意義。簡單分數與小數的互換。

（四） 延伸的知識

1. N-5-5 分數的乘法：整數乘以分數、分數乘以分數的意義。知道用約分簡化乘法計算。處理乘積一定比被乘數大的錯誤類型。透過分數計算的公式，知道乘法交換律在分數也成立。
2. N-5-6 整數相除之分數表示：從分裝（測量）和平分的觀點，分別說明整數相除為分數之意義與合理性。
3. N-5-7 分數除以整數：分數除以整數的意義。最後將問題轉化為乘以單位分數。

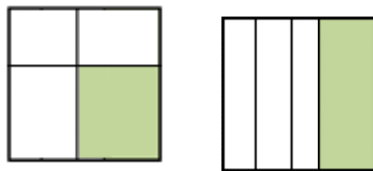
四、教學建議

甲、 評量核心概念

簡單異分母分數的加減問題。

乙、 學生常見的錯誤類型／迷思概念

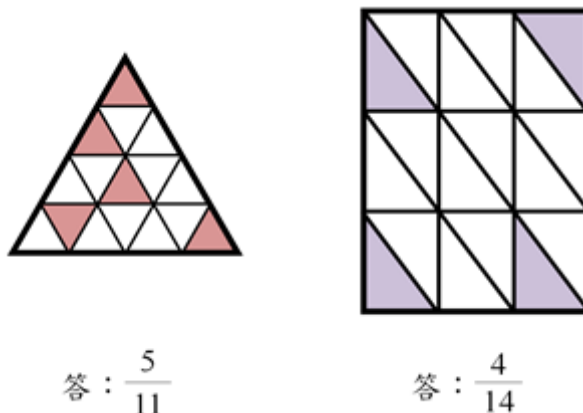
- i. 等分的概念不足：學生可能知道一半就是分成兩部分，但沒有等分的概念。因此在處理部分/全體的問題時，會有錯誤的迷思。例如：將 $\frac{1}{4}$ 張色紙著色，很有可能因為沒有等分的概念，而犯了如【圖 15-1】的錯誤。



【圖 15-1】

- ii. 缺乏單位量的概念：單位量是指我們把什麼當作 1，學生要先學會確認什麼是整體「1」的單位，否則常會產生如以下舉例的迷思概念。從中我們能發現學生無法指認問題中的單位量、只考慮到問題中的分子（分割後的量）及分母（總分割份數），並且解題過程深受分子、分母的影響。

1. 1 個披薩平分成 8 片，取其中 2 片，學生誤以為取 $\frac{1}{2}$ 個披薩可看出學生誤把部分量當成全體量，寫在分數的分母。學生要能掌握：1 個披薩是單位量，8 片是全體量，2 片是部分量。
2. 「如【圖 15-2】塗色部分佔圖形的幾分之幾？」

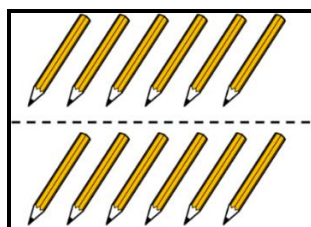


【圖 15-2】

學生無法將整個圖形當作單位量，而將圖形看成塗色部分和空白部分的比較結果。

學生要能掌握：整個圖形是單位量，圖形的分割份數是全體量，塗色部分的份數是部分量，未塗色部分的份數也是部分量。

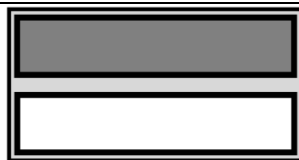
3. 「一盒鉛筆有 12 枝，如【圖 15-3】，哥哥用掉全部的 $\frac{1}{2}$ 盒，問用掉幾枝鉛筆？」



【圖 15-3】

學生可能會受到分數符號 $\frac{1}{2}$ 中的分子的影響回答 1 枝，也可能受到分母的影響回答 2 枝。學生要能掌握：「全部的 $\frac{1}{2}$ 」意指將全體單位量（12 枝）平分成 2 份，取其中 1 份（6 枝）的部分量與整體量的關係。

4. 「一盒巧克力有 2 條，小華吃掉 $\frac{1}{2}$ 盒，請用筆把小華吃掉的部份著顏色」，如【圖 15-4】的情形。學生要能掌握：一個單位量是 1 盒不是 1 條，以釐清全部內容物就是一個單位量。



【圖 15-4】

iii. 異分母分數加法運算的常見錯誤

1. 分子加分子，分母加分母： $\frac{2}{5} + \frac{3}{6} = \frac{2+3}{5+6} = \frac{5}{11}$ 。
2. 分母相乘，分子直接相加： $\frac{2}{5} + \frac{3}{6} = \frac{2+3}{5 \times 6} = \frac{5}{30}$ 。
3. 分母相乘，分子相乘： $\frac{3}{5} + \frac{2}{7} = \frac{3 \times 2}{5 \times 7} = \frac{6}{35}$ 。

iv. 異分母分數減法運算的常見錯誤

1. 整數減整數，分子減分子，分母減分母： $3\frac{4}{6} - 1\frac{3}{4} = 2\frac{1}{2}$ 。
2. 分母通分後，分子卻用多的減少的：

$$\begin{aligned} 3\frac{4}{6} - 1\frac{3}{4} &= 3\frac{4 \times 2}{6 \times 2} - 1\frac{3 \times 3}{4 \times 3} \\ &= (3 - 1) + \left(\frac{8}{12} - \frac{9}{12} \right) \\ &= 2\frac{1}{12}。 \end{aligned}$$

(3) 分母相乘通分，分子卻沒有跟著擴分，直接用多的減少的：

$$3\frac{4}{6} - 1\frac{3}{4} = (3 - 1) + \left(\frac{4}{6 \times 4} - \frac{3}{4 \times 6} \right) = 2\frac{1}{24}。$$

丙、核心概念的教學重點

學生需掌握正確的分數概念，才能進行有意義的分數運算。以下將分數概念的教學到分數加減運算的教學，依序說明如下：

- i. 認識單位量與單位分數：教師須釐清單位 1 是什麼(單位量)，把 1 分成 3 份，每份就是 $\frac{1}{3}$ (單位分數)。單位分數的意義是將單位量等分割成數份後所取出其中的一份。也就是說單位分數指的是分子是 1，分母是正整數的分數，例如： $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{4}$ 、……。它是學習分數加減乘除運算的先備基礎概念，因此，建立單位分數的概念非常重要。例如：一盒蛋糕有 8 塊，當學生知道 $\frac{3}{8}$ 盒是 3 個 $\frac{1}{8}$ 盒蛋糕所合起來的，那麼就能合

理解「 $\frac{2}{8} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$ 」，而不會出現 $\frac{5}{16}$ 的迷思概念；延伸到學習「分數 \times 整數」時，就能理解「 $\frac{2}{7} \times 3 = \frac{6}{7}$ 」，知道 $\frac{2}{7}$ 盒就是「2個 $\frac{1}{7}$ 盒」，「2個 $\frac{1}{7}$ 盒的3倍就是6個 $\frac{1}{7}$ 盒」，合起來就是 $\frac{6}{7}$ 盒，也就不會出現 $\frac{6}{21}$ 的迷思概念。所以，單位分數是建立分數起始的重要概念，明白單位分數才能在分數計算學習上做有意義的解釋。

ii. 認識通分的意義

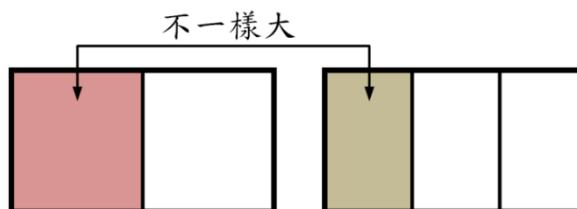
1. **通分的定義：**通分是指把兩個異分母的分數，利用約分或擴分轉換成同分母分數的過程。
2. **通分的目的：**透過分數大小的比較活動，學生察覺當兩分數的分母相同（具有相同的單位分數）時，可以直接利用它們的分子決定大小；但是當兩分數的分母不同時（具有不同的單位分數），就無法直接透過分子決定大小，引發學生需要將異分母分數化為同分母分數的需求（計數的單位分數變成相同），此時才能依照分子決定大小。以此為先備經驗，進入異分母分數的加減計算，也會遇到相同的問題——不同的單位分數，表示不同大小的計數單位，也有化為同分母分數的需求。
3. **通分的方法：**可先求出各分母的最小公倍數，然後將各分數擴分或約分為分母為最小公倍數的等值分數。

iii. 異分母分數的加減

做一般異分母分數之比較與加減時，必須利用約分與擴分，將兩異分母的分數通分成為兩同分母之等值分數後，再做比較與加減。教師別太快進入公式算則，多一些概念性知識的教學，讓學生有充分的時間探索與思考而發現：因為兩個分數等份的份數不同，每一份單位分數不一樣大，所以不能直接將份數相加，因此要先通分，把它再等分成相同的份數，成為每小份等分的單位分數，才可以將份數相加。

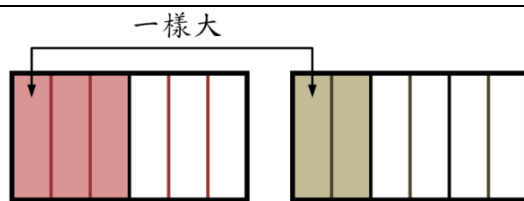
例如：有兩條相同的蛋糕，其中一條蛋糕哥哥吃了 $\frac{1}{2}$ 條，另一條蛋糕弟弟吃了 $\frac{1}{3}$ 條，他們共吃了幾條蛋糕？

教師可引導學生思考，如何將計數的單位分數變成一樣大小呢？可以在圖上做切割讓其計數的單位大小變成一樣大。首先，哥哥吃的蛋糕是平分成2大塊，弟弟是平分成3小塊，如【圖15-5】：



【圖15-5】

但是哥哥的1大塊蛋糕和弟弟的1小塊蛋糕不一樣大，所以接下來的目標是要將他們的分割後的蛋糕都要變成一樣大，所以要把哥哥的每1大塊蛋糕再平分成3份（變成6小份中的3小份），弟弟的每1小塊蛋糕平分成2份（變成6小份中的2小份），這時候哥哥和弟弟的蛋糕最後的切割份數都是6小份，如【圖15-6】，且每小份都一樣大，因此就可以用同分母分數的概念進行加減計算。



【圖15-6】

上圖的分數運算的過程：

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3} + \frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}。$$

先透過情境題去理解異分母分數加減的計算概念，讓學生形成異分母分數加減的計算規則，教師幫助學生熟練程序性知識，即是所謂的分母不同的分數相加（減）時，先通分化為同分母分數，再相加（減）。

- iv. **培養分數數感：**透過觀察，可用約分或假、帶分數之間的換算以簡化計算。學生對於計算常會進入背公式的運算規則，而沒有做有意義的運算。例如題目 $\frac{9}{8} + \frac{7}{6}$ ，一般學生看到題目沒有思考更適當的策略就會直接採取算則，用通分的方法算出答案：

$$\frac{9}{8} + \frac{7}{6} = \frac{9 \times 6}{8 \times 6} + \frac{7 \times 8}{6 \times 8} = \frac{54}{48} + \frac{56}{48} = \frac{110}{48} = 2\frac{14}{48}。$$

若能先觀察題目中的分數，會發現假分數可以先轉換成帶分數，以簡化計算過程，

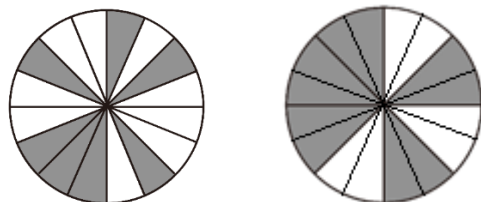
$$\text{如 } \frac{9}{8} + \frac{7}{6} = 1\frac{1}{8} + 1\frac{1}{6} = 2 + \frac{1}{8} + \frac{1}{6} = 2\frac{14}{48}。$$

- v. **帶分數的加減法：**帶分數的加減法則較為繁複，因為它牽涉到整數的加減法則，亦牽涉到分數的加減法則，尤其在分數不夠減的情況之下，運算更為繁複，例如： $5\frac{2}{3} - 3\frac{6}{7}$ ，所以必須先將 $5\frac{2}{3}$ 轉換成 $4\frac{5}{3}$ ，整數部分的計算為 $4 - 3$ ，分數部分的計算是 $\frac{5}{3} - \frac{6}{7}$ 。

丁、本題教學的加強重點

本題的重點是等分、單位量和部分/整體的概念，知道單位量為 1 個圓，部分是灰色的區域，甲圖灰色部分是 $\frac{7}{16}$ 個圓，乙圖灰色部分為 $\frac{5}{8}$ 個圓。學生首先能正確表示灰色部分是多少個圓，再經由異分母分數的減法計算進行解題。

教師教學時要強調誰單位量 1，以及單位量 1 被等分分割，每一部分都一樣大，我們才能說灰色部分是全部的幾分之幾。在學生建立等分割和單位量 1 的概念後，他就會發現但是甲圖的 1 小片和乙圖的 1 大片不一樣大，所以接下來的目標是要將他們的分割後的每一份都要變成一樣大，所以要把乙圖的每 1 大片要再平分成 2 份，這時候甲圖和乙圖最後的切割份數都是 16 份，如【圖 15-7】，且每 1 份都一樣大，因此，就可以用同分母分數的概念進行加減計算。



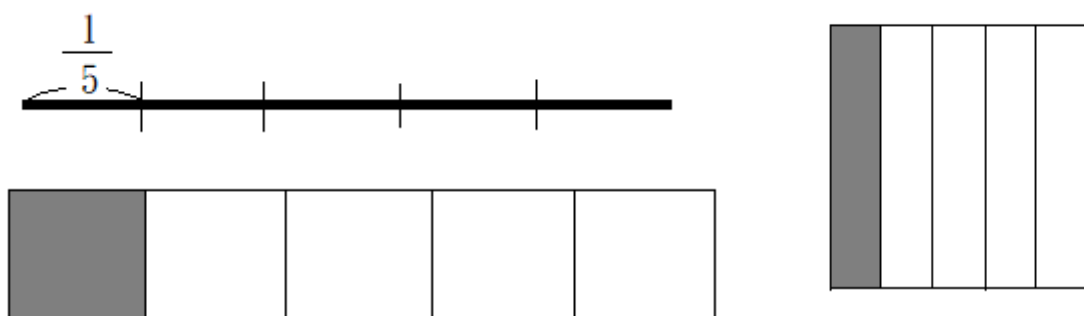
(甲圓)

(再分割後的乙圓)

【圖15-7】

五、命題建議

- 甲、學習分數的圖形表徵時，建議不要只以圓形圖形來表徵，可以考量成長方形或長條等，因為圓形容易表徵二、四、八等分，不容易表徵其他份數，以免導致學童在表徵不是這些等份時產生困難。如【圖 15-8】



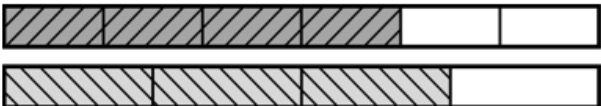
【圖 15-8】

- 乙、進行異分母分數加減計算時，建議兩者的分母不要剛好是倍數關係。
- 丙、本命題剛好灰色部分差與白色部分差的答相同，因此，學生可能誤答成白色塗色部分的差。
- 丁、本命題選項迷思中應可加入單位量的迷思概念：

1. 部分學生會將甲圖視為 $\frac{7}{9}$ ，乙圖視為 $\frac{5}{3}$ ，而算出錯誤答案 $\frac{5}{3} - \frac{7}{9} = \frac{8}{9}$ 。
2. 學生將整體量看成 $16+8=24$ 等份，再利用甲圖灰色部分7等份減去乙圖灰色部分5等份，因此算出錯誤答案為 $\frac{2}{24}$ ，學童忽略單位分數是不同的。

六、歷屆檢測試題參考

- 甲、104 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

題目	姐姐將 2 條一樣長的紙帶，各自等分後塗上顏色（如下圖）， 兩條紙帶塗上顏色部分的長度相差多少？				
					
	① $\frac{1}{2}$ 條				
	② $\frac{1}{4}$ 條				
	③ $\frac{1}{8}$ 條				
	④ $\frac{1}{12}$ 條				
答題表現 選項分析	選 項 1 2 3 4 其他 答案：4				
	選項率 0.20 0.12 0.07 0.60 0.00				
	高分組 0.04 0.02 0.02 0.92 0.00				
	低分組 0.38 0.26 0.12 0.23 0.01				

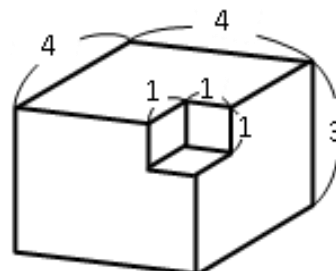
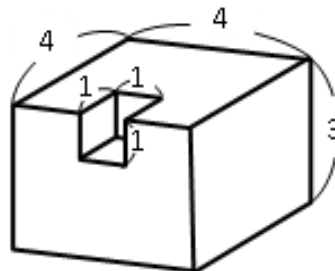
乙、 105 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

題目	下列哪一個分數小於 $\frac{4}{8}$ ？						
	① $\frac{2}{3}$						
	② $\frac{5}{7}$						
	③ $\frac{3}{9}$						
	④ $\frac{16}{32}$						
答題表現 選項分析	選 項 1 2 3 4 其他 答案：3						
	選項率	0.13	0.08	0.68	0.11	0.00	
	高分組	0.01	0.02	0.95	0.02	0.00	
	低分組	0.28	0.15	0.37	0.20	0.00	

丙、 106 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

題目	一個竹簍重 $3\frac{2}{3}$ 公斤，裝入一些柚子後，連竹簍共重 $11\frac{4}{7}$ 公斤，裝入的柚子是多少公斤？ ① $15\frac{5}{21}$ 公斤 ② $8\frac{2}{4}$ 公斤 ③ $8\frac{2}{21}$ 公斤 ④ $7\frac{19}{21}$ 公斤					
答題表現 選項分析	選 項	1	2	3	4	其他 答案：4
	選項率	0.07	0.12	0.18	0.61	0.00
	高分組	0.02	0.01	0.07	0.90	0.00
	低分組	0.17	0.30	0.28	0.25	0.00

第 16 題

知識向度	量與實測	認知向度	概念理解																												
對應	5-n-20 能理解長方體和正方體體積的計算公式，並能求出長方體和正方體的表面積。(同 5-s-07)																														
題目	<p>兩個長 4 公分、寬 4 公分、高 3 公分的長方體，現在分別在不同位置挖掉一塊邊長 1 公分的正方體(如圖甲、圖乙)。請問圖甲和圖乙的體積和表面積的關係，下列敘述哪個正確？ (單位：公分)</p> <div></div> <p>(圖甲)</p> <p>(圖乙)</p> <p>①體積相同，表面積相同 ②體積相同，表面積不同 ③體積不同，表面積相同 ④體積不同，表面積不同</p>																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：2</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.40</td><td>0.46</td><td>0.07</td><td>0.07</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.20</td><td>0.76</td><td>0.02</td><td>0.02</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.49</td><td>0.26</td><td>0.14</td><td>0.11</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：2	選項率	0.40	0.46	0.07	0.07	0.00		高分組	0.20	0.76	0.02	0.02	0.00		低分組	0.49	0.26	0.14	0.11	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：2																									
選項率	0.40	0.46	0.07	0.07	0.00																										
高分組	0.20	0.76	0.02	0.02	0.00																										
低分組	0.49	0.26	0.14	0.11	0.00																										

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.50、通過率為 0.46、試題難易度 0.50。

(二) 評量目標說明

本題旨在評量學生是否能透過平移及補缺的方式，理解體積與表面積之間的關係。

(三) 選項表現說明

1. 有 40% 的學生選擇正確選項②，顯示學生可以理解兩個長 4 公分、寬 4 公分、高 3 公分的長方體，分別在不同位置挖掉一塊邊長為 1 公分的正方體，體積會相同；並能透過平移的方式發現形體乙的表面積與原來完整的形體的表面積相同，形體甲則是比原來完整形體甲再多 2 個面。
2. 有 20% 的學生選擇選項①，學生認為兩個長 4 公分、寬 4 公分、高 3 公分的長方體，分別在不同位置挖掉一塊邊長為 1 公分的正方體，所以體積相同。同時學生也認為：因為挖掉的體積相同則表面積也會相同。
3. 有 12% 的學生選擇選項③，學生對於表面積與體積的概念混淆，錯把體積的算法當成表面積計算，把表面積的算法當成體積計算，因而認為表面積相同，體積不同。
4. 有 26% 的學生選擇選項④，學生可能判斷在不同位置挖掉一塊邊長 1 公分的正方體，造成甲乙兩形體形狀不同，因此判斷體積不相同，也認為表面積也不相同，故選擇體積與表面積兩者不相同。

(四) 學生表現說明

1. 本題評量五年級學生對長方體(正方體)體積與表面積概念的理解，透過對 1 立方公分積木的移動，發現長方體體積與長方體表面積之間的變化關係。
2. 本題的通過率為 0.46，顯示只有 4 成 6 的學生能理解相同的二個形體，拿掉相同體積的部分後，所剩餘的體積仍會相同，但二者的表面積則會因為切割的部位不同而產生差異。根據學生作答情形，仍有高達 5 成 4 的學生無法理解此關係。以組別來看，低分組有 49% 及高分組有 20% 的學生選擇錯誤選項①，這些學生誤以為體積一樣大，表面積就一樣大，無法判斷圖甲的表面積大於圖乙的表面積。低分組有 14% 及高分組有 2% 的學生選擇錯誤選項③，這些學生知道體積相同、表面積不同，但對於體積和表面積的概念產生混淆。低分組有 11% 及高分組有 2% 的學生選擇錯誤選項④，這些學生可能認為所拿掉的體積因位置不同，體積就不同，而體積不同，因此表面積也就不同。

二、教材地位分析

97 課綱(分年細目)

(一) 評量重點

1. 5-n-19 能認識體積單位「立方公尺」、「立方公分」及「立方公尺」間的關係，並做相關計算。
2. 5-n-20 能理解長方體和正方體體積的計算公式，並能求出長方體和正方體的表面積。

(二) 先備的知識

1. 2-n-15 能認識長度單位「公分」、「公尺」及其關係，並能做相關的實測、估測與同單位的計算。
2. 3-n-14 能認識長度單位「毫米」及「公尺」、「公分」、「毫米」間的關係，並做相關

的實測、估測與計算。

3. 4-n-19 能認識體積及體積單位「立方公分」。

(三) 延伸的知識

6-n-15 能理解簡單直柱體的體積為底面積與高的乘積。

十二年國教課綱（學習內容）

(一) 評量重點

1. S-5-5 **正方體和長方體**：計算正方體和長方體的體積與表面積。正方體與長方體的體積公式。
2. N-5-14 **體積**：「立方公尺」。簡單實測、量感、估測與計算。

(二) 先備的知識

1. N-2-11 **長度**：「公分」、「公尺」。實測、量感、估測與計算。單位換算。
2. S-4-4 **體積**：以具體操作為主。在活動中認識體積的意義與比較。認識 1 立方公分之正方體，能理解並計數正方體堆疊的體積。
3. N-4-12 **體積與「立方公分」**：以具體操作為主。體積認識基於 1 立方公分之正方體。

(三) 延伸的知識

S-6-4 **柱體體積與表面積**：含角柱和圓柱。利用簡單柱體，理解「柱體體積＝底面積×高」的公式。簡單複合形體體積。

三、教學建議

(一) 評量核心概念

做「立方公尺」、「立方公分」的單位換算(以分數或小數表徵,如:1 立方公尺=1/1000000 立方公分)

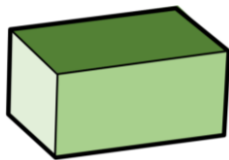
(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. **混淆長方體(正方體)的體積與表面積意義**：物體的體積指的是物質或物體所占空間的大小或佔據一特定容積的物質的量，體積是立體堆疊而成的。表面積是指一立體圖形所有表面的面積之和，用平面紙做出所需要的紙張面積總和。
2. **表面積與體積的計算方式混淆不清**：長方體或正方體的表面積和體積計算方式搞混，例如邊長 3 公尺的正方體表面積是多少立方公尺？學生容易計算為體積 $3 \times 3 \times 3 = 27$ 立方公尺。表面積正確應為 $3 \times 3 \times 6 = 54$ 平方公分
3. **長方體的體積與表面積的單位不同**：長方體的體積是多少個 1 立方公分小正方體堆疊而成，單位是多少立方公分或是多少立方公尺。表面積是多少個 1 平方公分或平方公尺鋪排而成。明顯的體積與表面積單位不同。

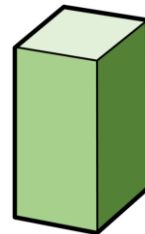
(三) 核心概念的教學重點

1. 長方體表面積和體積的區別

- (1) **表面積的比較**：「一個長 7 公分、寬 4 公分、高 3 公分的長方體，當把這個長方體擺放成【圖 1】時，表面積的總和，會與擺放成【圖 2】時表面積的總和一樣嗎？為什麼？」



【圖 1】



【圖 2】

【圖 1】和【圖 2】都是同一個長方體，構成的 6 個表面是相同的，所以這兩個長方體不管如何擺放，表面積相同。

- (2) **體積的比較**：「甲便當盒長 15 公分、寬 8 公分、高 4 公分，乙便當盒長 10 公分、寬 13 公分、高是 4 公分，請問哪一個便當盒裡可以裝比較多的白飯？為什麼？」這兩個便當盒佔有的空間是體積問題。所以可以用體積的概念（此處的體積等於內體積）來比較哪個便當盒可以裝的比較多。甲便當盒的體積是 $15 \times 8 \times 4 = 480$ 立方公分，乙便盒的體積是 $10 \times 4 \times 13 = 520$ 立方公分。

2. 長方體表面積和體積的教學


- (1) **表面積的教學**：在進行長方體的表面積教學時，學生先找一個小型的盒子，老師再給學生一張 A4 的方格紙，讓學生將紙盒每個面畫在方格紙上。接著學生再剪下這六個面，在平面上將紙盒的六個面組合起來，要能回復成原來紙盒的立體形體。透過這個活動讓學生體驗到這六個面是平面的，也是盒子的表

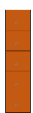
面，所以這六個面就是立體紙盒的表面積，因為六個面是平面組合的，所以表面積的大小是六個面的面積總和。

- (2) **體積的教學**：在進行長方體的體積教學時，學生先找一個小型的盒子，老師可以給學生 100 個 1 立方公分的小積木，讓學生嘗試利用小積木堆疊一個和立體盒子一樣大小的，讓學生體驗體積是一個個立方積木堆疊而成的，所以是以立方公分為單位，是體積是立體的，非平面的。

透過兩種教學活動讓學生清楚辨別體積和表面積的不同。表面積是平面圖形的組合，是物體外表的面積總和，常用的單位是平方公分；體積是立體堆疊的結果，是佔有空間有長、寬、高三維空間，常用的單位是立方公分。

3. 設計「**體積相同表面積不同**」及「**表面積相同體積不同**」的操作活動，讓學生發現形體表面積與體積之間的關係

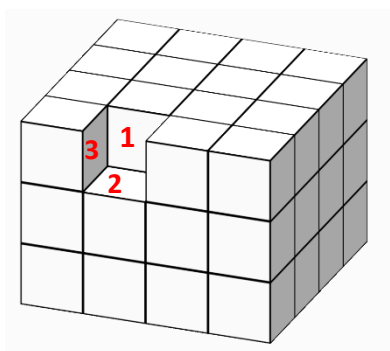
可給予學生 6 個 1 立方公分積木，讓學生堆疊出不同的形體(堆疊的規則面與面要完全疊合)，然後去點數不同形體的表面積各是多少，可讓學生發現體積相同的形體表面積不一定會相同。另外也可讓學生利用 1 立方公分積木堆疊去發現體積不同但表面積相同，例如：用 6 立方公分堆疊出  的長方體，再利用 5 個 1 立方公分

積木堆疊  的長方體，去點數表面積，會發現兩者體積不同但表面積都是 22 平方公分。

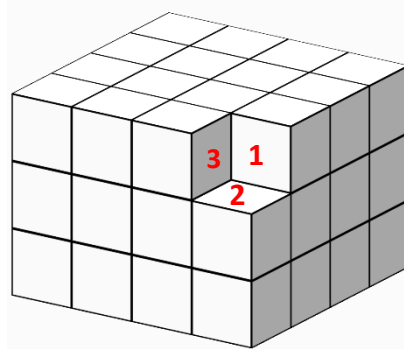
(四) 本題教學的加強重點

1. 透過挖掉及填補的操作活動，發現形體間的體積關係

運用可拿走與填補的 1 立方公分積木來進行堆疊動作，發現圖甲、圖乙二者的形體體積相同，教師可以請學生利用 1 立方公分積木堆疊出圖甲與圖乙，發現兩者使用的積木都是長方體 $4 \times 4 \times 3$ 個 1 立方公分積木再減掉 1 個 1 立方公分積木等於 47 個積木。所以體積相同。



(圖甲)



(圖乙)

2. 透過面的平移推移，發現圖甲與圖乙表面積的變化

在圖甲中，該長方體可藉由面 1 往前推移，面 2 往上推移就跟原來完整的長方體表面積相同，還多了面 3(左)及面 4(右)，所以圖甲長方體雖然體積減少了 1 立方公分但表面積卻是增加 2 個 1 平方公分的面；圖乙中的長方體可藉由面 1 往前推移，面 2 往上推、面 3 往右推移則會發現，即使圖乙少了 1 立方公分積木，表面積還是

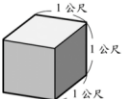
與原來完整的長方體表面積相同。

四、命題建議：

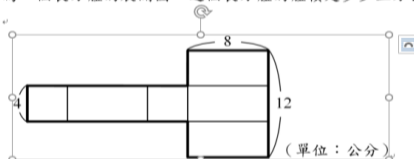
1. 處理複合形體時，教師可提供長方體與正方體組成的簡單複合形體，讓學生能應用所學，學習計算複合形體的體積，所以教師在評量複合形體時，務必先進行實體的操作活動，才能進行紙筆評量，但也僅限於體積，不做表面積。
2. 表面積本身已有複合的特性，學生可利用正方形與長方形的面積公式，計算出正方體與長方體的表面積，學生應觀察這些圖形的對稱性，用以簡化計算，表面積的算法不需要記成公式也不宜做公式的評量。
3. 此題也可以改成問是誰的表面積多？多了幾個面？或者改成不用數據的方式呈現，如：有 2 個一樣大小的長方體甲與乙，分別在不同的位置各挖掉 1 個大小相同的正方體，請問甲乙形體的體積與表面積的變化是？
4. 以往新北市的檢測題目多著重體積或表面積的計算，今年第一次考體積與表面積之間的變化關係，教師除了利用積木堆疊導出體積公式及利用展開圖或包裝紙來教導表面積，應設計相關題目讓體積與表面積之間的關係有所連結，才不會導致學生會誤認為體積大表面積就大，體積小表面積就小的迷思概念。

五、歷屆檢測試題參考：

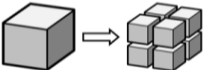
(一)106 學年度第 27 題

知識向度	量與實測	認知向度	程序執行																												
對應	5-n-20 能理解長方體和正方體體積的計算公式，並能求出長方體和正方體的表面積。(同 5-s-07)																														
題目	<p>右圖中正方體的體積，與幾個邊長 20 公分的正方體一樣大？ (1 公尺=100 公分)</p>  <p>① 5 個 ② 125 個 ③ 2500 個 ④ 50000 個</p>																														
答題表現	<table><tr><th>選 項</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>其他</th><th>答案</th></tr><tr><td>選項率</td><td>0.20</td><td>0.40</td><td>0.12</td><td>0.26</td><td>0.02</td><td>2</td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.09</td><td>0.68</td><td>0.05</td><td>0.18</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.29</td><td>0.24</td><td>0.23</td><td>0.24</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案	選項率	0.20	0.40	0.12	0.26	0.02	2	高分組	0.09	0.68	0.05	0.18	0.00		低分組	0.29	0.24	0.23	0.24	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案																									
選項率	0.20	0.40	0.12	0.26	0.02	2																									
高分組	0.09	0.68	0.05	0.18	0.00																										
低分組	0.29	0.24	0.23	0.24	0.00																										

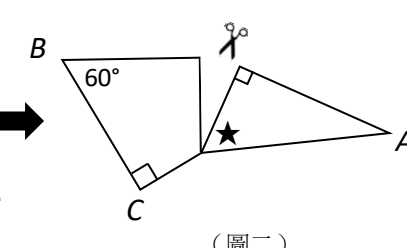
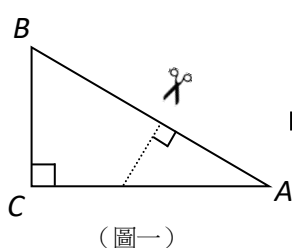
(二)105 學年度第 11 題

知識向度 ^o	幾何 ^o	認知向度 ^o	程序執行 ^o																												
對應分年細目 ^o	5-s-07 能理解長方體和正方體體積的計算公式，並能求出長方體和正方體的表面積。（同 5-n-20） ^o																														
題目 ^o	<p>下圖為一個長方體的展開圖，這個長方體的體積是多少立方公分？^o</p>  <p>(單位：公分)^o</p> <p>① 128 立方公分^o ② 160 立方公分^o ③ 256 立方公分^o ④ 384 立方公分^o</p>																														
答題表現 ^o	<table><tr><td>選 項</td><td>1^o</td><td>2^o</td><td>3^o</td><td>4^o</td><td>其他^o</td><td>答案：1^o</td></tr><tr><td>選項率^o</td><td>0.31^o</td><td>0.18^o</td><td>0.07^o</td><td>0.45^o</td><td>0.00^o</td><td></td></tr><tr><td>高分組^o</td><td>0.55^o</td><td>0.14^o</td><td>0.02^o</td><td>0.29^o</td><td>0.00^o</td><td></td></tr><tr><td>低分組^o</td><td>0.13^o</td><td>0.18^o</td><td>0.13^o</td><td>0.55^o</td><td>0.00^o</td><td></td></tr></table>			選 項	1 ^o	2 ^o	3 ^o	4 ^o	其他 ^o	答案：1 ^o	選項率 ^o	0.31 ^o	0.18 ^o	0.07 ^o	0.45 ^o	0.00 ^o		高分組 ^o	0.55 ^o	0.14 ^o	0.02 ^o	0.29 ^o	0.00 ^o		低分組 ^o	0.13 ^o	0.18 ^o	0.13 ^o	0.55 ^o	0.00 ^o	
選 項	1 ^o	2 ^o	3 ^o	4 ^o	其他 ^o	答案：1 ^o																									
選項率 ^o	0.31 ^o	0.18 ^o	0.07 ^o	0.45 ^o	0.00 ^o																										
高分組 ^o	0.55 ^o	0.14 ^o	0.02 ^o	0.29 ^o	0.00 ^o																										
低分組 ^o	0.13 ^o	0.18 ^o	0.13 ^o	0.55 ^o	0.00 ^o																										
選項分析 ^o																															

(三)104 學年度第 25 題

知識向度	幾何	認知向度	解題思考																												
對應分年細目	5-s-07 能理解長方體和正方體體積的計算公式，並能求出長方體和正方體的表面積。(同 5-n-20)																														
題目	<p>將邊長 2 公分的正方體分割成 8 個邊長 1 公分的小正方體(如下圖)，分割後所有的小正方體的表面積是原來正方體表面積的多少倍？</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>① $\frac{1}{8}$ 倍 ② 1 倍 ③ 2 倍 ④ 8 倍</p>																														
答題表現	<table border="1"> <thead> <tr> <th>選 項</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> <th>其他</th> <th>答案：3</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>選項率</td> <td>0.30</td> <td>0.10</td> <td>0.28</td> <td>0.31</td> <td>0.01</td> <td></td> </tr> <tr> <td>高分組</td> <td>0.20</td> <td>0.08</td> <td>0.53</td> <td>0.19</td> <td>0.00</td> <td></td> </tr> <tr> <td>低分組</td> <td>0.34</td> <td>0.11</td> <td>0.15</td> <td>0.38</td> <td>0.02</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：3	選項率	0.30	0.10	0.28	0.31	0.01		高分組	0.20	0.08	0.53	0.19	0.00		低分組	0.34	0.11	0.15	0.38	0.02	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：3																									
選項率	0.30	0.10	0.28	0.31	0.01																										
高分組	0.20	0.08	0.53	0.19	0.00																										
低分組	0.34	0.11	0.15	0.38	0.02																										
選項分析																															

第 17 題

知識向度	幾何	認知向度	概念理解																												
對應分年細目	5-s-01 能透過操作，理解三角形三內角和為 180 度。																														
題目	<p>一個三角形 ABC(如圖一)，沿虛線處剪開後(如圖二)，★處的角是多少度？</p> <div></div> <p>(圖一) (圖二)</p> <p>① 30 度 ② 45 度 ③ 60 度 ④ 120 度</p>																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：3</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.15</td><td>0.16</td><td>0.65</td><td>0.04</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.04</td><td>0.02</td><td>0.93</td><td>0.01</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.27</td><td>0.31</td><td>0.32</td><td>0.1</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：3	選項率	0.15	0.16	0.65	0.04	0.00		高分組	0.04	0.02	0.93	0.01	0.00		低分組	0.27	0.31	0.32	0.1	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：3																									
選項率	0.15	0.16	0.65	0.04	0.00																										
高分組	0.04	0.02	0.93	0.01	0.00																										
低分組	0.27	0.31	0.32	0.1	0.00																										

一、 試題分析

(一) 數據解析：

本題鑑別度為 0.61，全體通過率為 0.65，試題難易度 0.63。

(二) 評量目標說明：

本題評量學童是否能運用三角形內角合為 180 度來解題，學生必須知道本題中(圖一)的三個內角角 A、角 B 及角 C 其內角合為 180 度，先正確算出角 A 的角度，然後在(圖二)的三角形中，再次利用三角形內角合為 180 度算出角★的角度。

(三) 選項表現說明：

- 有 14.87%的學生選擇選項 1，本題為兩步驟解題過程，需先算角 A 再算角★，學生只完成第一步驟算出圖一中的角 A 認為角★=180 度-90 度-60 度=30 度。
- 有 15.67%的學生選擇選項 2，學生直接將裁切後的三角形以視覺直觀看成等腰直角

一、 試題分析

(一) 數據解析：

本題鑑別度為 0.61，全體通過率為 0.65，試題難易度 0.63。

(二) 評量目標說明：

本題評量學童是否能運用三角形內角合為 180 度來解題，學生必須知道本題中(圖一)的三個內角角 A、角 B 及角 C 其內角合為 180 度，先正確算出角 A 的角度，然後在(圖二)的三角形中，再次利用三角形內角合為 180 度算出角★的角度。

(三) 選項表現說明：

- 有 14.87% 的學生選擇選項 1，本題為兩步驟解題過程，需先算角 A 再算角★，學生只完成第一步驟算出圖一中的角 A 認為角★=180 度-90 度-60 度=30 度。
- 有 15.67% 的學生選擇選項 2，學生直接將裁切後的三角形以視覺直觀看成等腰直角

三角形，所以認為角★＝ $(180\text{度}-90\text{度})\div 2=45\text{度}$ 。

3. 有 65.2%的學生選擇正確選項 3，顯示有六成多的學生了解且能應用三角形三內角和為 180 度的概念解題，並利用此概念完成兩步驟解題算出角★。
4. 有 3.95%的學生選擇選項 4，想利用角★和四邊形的另一個角合為平角 180 度， $360\text{度}-90\text{度}-90\text{度}-60\text{度}=120\text{度}$ ，僅算出四邊形的另一個角＝120 度，認為角★是 120 度。

(四) 學生表現說明：

1. 本題命題設計先給予一個完整的三角形，再給予一個經過剪裁的三角形，目的希望學生能夠在不同的情況下，清楚的知道三角形的三個內角是指哪三個，並利用所學過三角形三個內角和為 180 度的觀念，求出所指定角的角角度。
2. 本題通過率為 65%。已有六成五學生清楚何謂三角形的三個內角，並且能應用三角形三個內角和為 180 度，求出所指定的三角形的內角的角角度。但仍有三成五左右的學生，無法順利求出所指定的三角形內角的角角度，亦無法從圖示中產生角度量感發現所選選項不適合。從高分組與低分組學生的表現來看，高分組有 93.12%的學生選擇正確答案 3，但低分組僅有 32.35%的學生，可見低分組的學生可能較無法判別三角形的內角究竟為哪三個內角，或者受到三角形不完整的影響，無法應用三角形內角和為 180 度此一概念，求出指定內角的角角度。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）：

(一) 評量重點：

5-s-01 能透過操作，理解三角形三內角和為 180 度。

(二) 先備的知識：

3-s-04 能認識角，並比較角的大小。(同 3-n-17)

4-s-02 能透過操作，認識基本三角形與四邊形的簡單性質。

(三) 延伸的知識：

無直接相關條目。

十二年國教課綱（學習內容）：

(一) 評量重點：

S-5-1 三角形與四邊形的性質：操作活動與簡單推理。含三角形三內角和為 180 度。三角形任意兩邊和大於第三邊。平行四邊形的對邊等、對角相等。

(二) 先備的知識：

S-3-1 角度（同 N-3-13）：以具體操作為主。初步認識、直接比較與間接比較。認識直

S-4-7 三角形：以邊與角的特徵認識特殊三角形並能作圖。如正三角形、等腰三角形、直角三角形、銳角三角形、鈍角三角形。

(三) 延伸的知識：

無直接相關條目。

三、教學建議

(一) 評量核心概念：

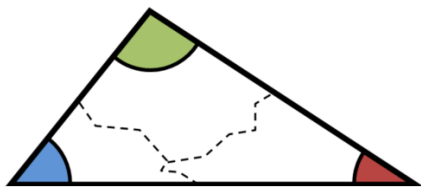
知道三角形三內角和為 180 度，並正確找到三角形的內角為哪三個角。

(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念：

亂用標示的角度作答：學生不知道三角形的內角和為 180 度，也不知道三角形的內角是指哪三個角，只是用圖上標示出的角度任意計算當作答案。

(三) 核心概念的教學重點：

1. 教學時，指導學生實際將三角形的三個內角分別剪裁，再將三個剪裁過後的角拼貼成一個平角，讓學生理解三角形的三個內角和起來是 180 度。之後，再實際操作不同的三角形(鈍角三角形、銳角三角形、直角三角形、等腰三角形……)，以及不同大小的三角形，讓學生觀察並發現歸納出「任意三角形的三內角和都是 180 度」，不宜直接向學生宣告任意三角形的三內角和為 180 度。
2. 指導學生剪裁時可讓學生在三角形上，用不同的色筆將三個內角塗上不同的顏色，如【圖 17-1】，再將三個內角剪下拼貼成一個平角，如【圖 17-2】。以避免學生剪下三個內角後，無法分辨在原三角形的位置。



【圖 17-1】



【圖 17-2】

(四) 本題教學的加強重點：

解題時教師可參考下列步驟，幫助學生解決問題：

步驟一：了解任意三角形的三個角和起來都是 180 度。教學上可和學生溝通「內角」一詞，三角形中的三個角，都在三角形的內部，因此可以稱為三角形的「三內角」，此三內角和是 180 度。

步驟二：此題需要兩步驟解題，先找到(圖一)中的三角形的三個角是指角 A、角 B 及角 C，此三個角合起來是 180 度；再找到(圖二)中的三角形的三個角是指角 A、角★及 90 度，此三個角合起來也是 180 度。

步驟三：(圖一)中利用算式知道角 A=180 度-60 度-90 度=30 度，(圖二)中利用算式知道角★=180 度-30 度-90 度=60 度，求出角★的角度為 60 度。

步驟四：另一個解題策略，找到(圖二)中剪開後變成一個四邊形和一個三角形，四邊形中，利用算式知道未知的角=360 度-90 度-90 度-60 度=120 度，再利用角★和四邊形的未知角合起來為平角 180 度，利用算式知道角★=180 度-120 度=60 度。

四、 命題建議

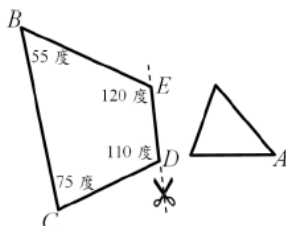
教師可將三角形變換為鈍角三角形、銳角三角形、等腰三角形……等三角形，檢視學生是否能充分運用三角形三內角和為 180 度的概念，以解決此種類題型。

五、 歷屆試題

(一) 106 學年度第 8 題

題目	<p>三角形 ABC 中角 A 是直角（如圖一），<u>小明</u> 將三角形對摺（如圖二），發現角 B 和角 C 完全疊合（如圖三），角 B 是幾度？</p> <div><p>圖一</p><p>圖二</p><p>圖三</p></div>					
	<p>① 30 度 ② 45 度 ③ 60 度 ④ 90 度</p>					
答題表現 選項分析	選 項	1	2	3	4	其他 答案：2
	選項率	0.06	0.81	0.05	0.08	0.00
	高分組	0.01	0.98	0.01	0.01	0.00
	低分組	0.13	0.60	0.10	0.17	0.00

(二) 105 學年度第 15 題

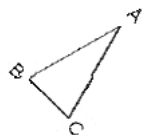
題目	三角形 ABC ，剪掉角 A ，剩下四邊形 $BCDE$ （如下圖），角 A 的角度是幾度？ 						
	① 50 度 ② 55 度 ③ 60 度 ④ 70 度						
答題表現 選項分析	選 項	1	2	3	4	其他	答案：1
	選項率	0.63	0.16	0.13	0.07	0.01	
	高分組	0.93	0.02	0.04	0.01	0.00	
	低分組	0.31	0.32	0.21	0.15	0.01	

(三)104 學年度第 5 題

題目	$\triangle ABC$ 中， $\angle A=35^{\circ}$ ， $\angle B=100^{\circ}$ ，請問 $\angle C$ 的角度是多少？					
	① 135°					
	② 65°					
	③ 45°					
	④ 35°					
古典理論 (CTT) 選項分析	選 項	1	2	3*	4	
	選項率	0.08	0.1	0.71	0.08	通過率：0.71
	高分組	0.01	0.01	0.96	0.01	鑑別度：0.62
	低分組	0.19	0.23	0.34	0.14	

(四)103 學年度第 15 題

15. 下圖為等腰三角形 ABC， $\angle A = 30^\circ$ 度。請問 $\angle C$ 是多少度？



①30

②45

③60

④75

選 項	1	2	3	4*	其他
選項率	10%	8%	8%	74%	0%
高分組	0.01	0.00	0.01	0.98	0.00
低分組	0.22	0.20	0.19	0.38	0.01
難 度 0.68	鑑別度 0.60				

第 18 題

知識向度	幾何	認知向度	概念理解	
對應分年細目	5-s-02 運用「三角形任兩邊和大於第三邊」解決日常生活問題。			
題目	18. 王先生有一塊三角形的土地，已知他在其中的兩邊各圍上長 3 公尺和 4 公尺的柵欄，剩下的一邊柵欄長度不可能是多少公尺？ ① 2 公尺 ② 3 公尺 ③ 5 公尺 ④ 7 公尺			
答題表現 選項分析	選 項 1 2 3 4 其他 答案：4			
	選項率 0.24 0.08 0.06 0.62 0.00			
	高分組 0.10 0.02 0.01 0.87 0.00			
	低分組 0.33 0.14 0.14 0.39 0.00			

一、 試題分析

(一) 數據解析：

本題鑑別度為 0.47，通過率為 0.62，試題難易度 0.63。

(二) 評量目標說明：

本題主要測驗學生是否理解「三角形任意兩邊和大於第三邊」，在情境中給予三角形其中的兩邊，讓學生利用「三角形任兩邊的和的大於第三邊」的性質，找出選項中，哪一個不可能是三角形土地第三邊的邊長。

(三) 選項表現說明：

1. 本題正確答案為選項④，通過率為 0.62，顯示 6 成的學生已經掌握利用「三角形任兩邊的和的大於第三邊」的概念，逆向思考判別任給二個長度的邊長，第三個邊出現哪一種長度無法組成一個三角形。
2. 有 24.06% 的學生選擇選項①，學生不理解「三角形任意兩邊和大於第三邊」的概念，認為 2 公分的長度太短，無法組成一個三角形，因此選擇選項①。
3. 有 7.22% 的學生選擇選項②，學生所理解的「三角形任意兩邊和大於第三邊」概念，是在三個邊都不相等的情形下，而忽略了三角形中也有可能是兩邊相等而形成一個等腰三角形，因此選擇選項②。
4. 有 5.8% 的學生選擇選項③，學生理解「三角形任意兩邊和大於第三邊」的概念，認為 5 公分符合「三角形任意兩邊和大於第三邊」，忽略了題目所問的是「剩下的

一邊柵欄長度不可能是多少公尺？」，因此選擇選項③。

(四) 學生表現說明：

1. 本題的命題設計主要希望了解學生，對於「三角形任意兩邊和大於第三邊」，此一概念是否完全理解。因此，除了在題目中所給出的三角形其中二邊的長度不一樣之外，在選項中也特別設計了選項② 3 公分的選項，藉以瞭解學生如果遇到其中有二個邊相同時，是否也能運用「三角形任意兩邊和大於第三邊」此一概念驗證在此題中選項②實際上是可成為三角形的第三個邊。
2. 本題的通過率為 62.31%，整體來說尚未達到精熟程度。但高分組答對率為 86.65%，低分組的答對率為 39.49%。顯示高分組的學生對於「三角形任意兩邊和大於第三邊」中大於的意義已能充分掌握住。但低分組的學生，答對率偏低，顯示出有不少學生，除了對「三角形任意兩邊和大於第三邊」的概念尚未充分掌握之外，也可能忽略了題意中「剩下的一邊柵欄長度不可能是多少公尺？」這句話。

二、教材地位分析

97 課綱 (分年細目)：

(一) 評量重點：

5-s-02 能透過操作，理解三角形任意兩邊和大於第三邊。

(二) 先備的知識：

4-s-02 能透過操作，認識基本三角形與四邊形的簡單性質。

(三) 延伸的知識：

8-s-10 能理解三角形的基本性質。

十二年國教課綱 (學習內容) (草案，送部版)：

(一) 評量重點：

S-5-1 三角形與四邊形的性質：操作活動與簡單推理。含三角形三內角和為 180 度。三角形任意兩邊和大於第三邊。平行四邊形的對邊等、對角相等。

(二) 先備的知識：

1. S-2-4 平面圖形的邊長：以操作活動與直尺實測為主。認識特殊幾何圖形的邊長關係。含周長的計算活動。
2. S-4-7 三角形：以邊與角的特徵認識特殊三角形並能作圖。如正三角形、等腰三角形、直角三角形、銳角三角形、鈍角三角形。

(三) 延伸的知識：

S-8-8 三角形的基本性質：等腰三角形兩底角相等；非等腰三角形大角對大邊，大邊對大角；三角形兩邊和大於第三邊；外角等於其內對角和；連比的紀錄；三內角為 30° 、 60° 、 90° 其邊長比紀錄為「 $1:\sqrt{3}:2$ 」；三內角為 45° 、 45° 、 90° 其邊長比紀錄為「 $1:1:\sqrt{2}$ 」。

三、教學建議

(一) 評量核心概念：

運用「三角形任意兩邊和大於第三邊」解決日常生活問題。

(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念：

1. 未檢驗三角形任意兩邊和大於第三邊的所有情形：學生常常忽略「三角形任意兩邊和大於第三邊」，所指的「任意」是指所有符合的情形，常常只是檢驗：最長邊+最短邊>次長邊，便認為符合「三角形任意兩邊和大於第三邊」的條件。
2. 認為邊長太長或太短便無法形成一個三角形：如題目出現2公尺的選項，學生認為邊長太短，不可能形成一個三角形。事實上2公尺、3公尺、4公尺，這三個長度是可以形成一個三角形。

(三) 核心概念的教學重點：

1. 對於「三角形任意兩邊和大於第三邊」一般常見的教法，是提供多個不同長度的紙條、竹籤或是使用幾何扣條，讓學生嘗試組合出一個或多個三角形，學生在嘗試的過程中有時能組成三角形，有時不能組成三角形。此時老師不妨提醒學生觀察紙條、竹籤或是幾何扣條的長度，發現能組成三角形與不能組成三角形時的邊長有什麼關係，讓學生透過觀察發現「三角形任意兩邊的和的大於第三邊」。
2. 多數的學生往往只是察覺「最長邊的邊長加上最短邊的邊長大於次長邊的邊長」，或是「較短的兩個邊的邊長加起來大於最長邊的邊長」，對於所謂「任意兩邊的和」並未察覺。此時教師可以提醒學生注意是「三角形任意兩邊的和的大於第三邊」，將所有可能出現的組合加以驗證。
3. 建議教師指導學生探討完「三角形任意兩邊的和的大於第三邊」的性質後，製作學習單一張，內容至少包含正三角形，等腰三角形，直角三角形及數個任意三角形。學生其實已經學過小數的加法，老師可以要求學生實際測量每一個三角形三個邊的長度，測量的長度可以只取到小數第一位，然後寫出算式驗證。例如：量出的長度為5.5公分、4公分、2.6公分，此時應要求學生寫出三個式子， $5.5+4>2.6$ 、 $4+2.6>5.5$ 、 $2.6+5.5>4$ ，學生對於「三角形任意兩邊的和的大於第三邊」的性質將會更為深入了解。
4. 老師確定學生對於「三角形任意兩邊和大於第三邊」的性質已能確實掌握後，可以再引導學生觀察發現其實要確定三個邊是否能形成一個三角形，其實只要驗證「最短邊長度+次短邊長度>最長邊長度」如果成立，此三個邊便能形成一個三角形。建議老師指導時，利用能形成三角形的三個邊和不能形成三角形的三個邊互相比較，讓學生發現只要驗證「最短邊長度+次短邊長度>最長邊長度」如果成立，此三個邊便能形成一個三角形。

(四) 本題教學的加強重點：

建議教師可以參考下列步驟協助學生解題：

1. 先複習「三角形任意兩邊和大於第三邊」的概念。
2. 澄清題意，題目問的是「剩下的一邊柵欄長度不可能是多少公尺？」，要注意到「不可能」是指無法形成一個三角形。
3. 對每一個選項進行檢驗，可以只驗證「最短邊長度+次短邊長度>最長邊長度」是否成立即可，並不是邊長特別短或特別長就無法形成一個三角形。

四、 命題建議

1. 老師可以修改數據，改成剩下的一邊長應該是多少？選項中的數據設計成和題目其中一邊長相同，形成一個等腰三角形。數據也可設計成為一個正三角形。
2. 如果是開放性的題型，老師不訪將數據加大一點，讓學生寫出第三邊的各種可能邊長。

五、 歷屆試題

- (一) 國家教育研究院 2014 年協助縣市辦理學生學習能力檢測－國小五年級數學科
試題

14. 三角形 ABC 中，邊 AB 長 2 公分，邊 BC 長 7 公分。下列哪一個
選項不可能是邊 AC 的長度？

① 5 公分 ② 6 公分 ③ 7 公分 ④ 8 公分

答題表現
選項分析

選項 1 2 3 4 其他 答案：1

選項率 0.49 0.07 0.11 0.33 0.01

高分組 0.77 0.01 0.03 0.18 0.00

低分組 0.28 0.14 0.21 0.36 0.01

- (二) 國家教育研究院 105 年協助縣市辦理學生學習能力檢測國一小五年級數學科
試題

24. 小傑用 3 根都不一樣長的竹籤排出了一個三角形，竹籤最長 6 公分，
最短 2 公分，第三根竹籤的長度會是幾公分？

①3 公分 ②4 公分 ③5 公分 ④6 公分

答題表現
選項分析

選項 1 2 3 4 其他 答案：3

選項率 0.13 0.27 0.40 0.20 0.01

高分組 0.07 0.13 0.68 0.11 0.00

低分組 0.18 0.36 0.18 0.26 0.02

(三) 國家教育研究院 106 年協助縣市辦理學生學習能力檢測國一小五年級數學科
試題

10. 妹妹有兩根竹籤，長度分別是 13 公分及 5 公分，妹妹想要拼出一個三角形，還需要下列哪一根長度的竹籤？

① 6 公分 ② 8 公分 ③ 10 公分 ④ 19 公分

答題表現
選項分析

選項 1 2 3 4 其他 答案：3

選項率 0.15 0.20 0.47 0.19 0.00

高分組 0.08 0.09 0.69 0.14 0.00

低分組 0.21 0.29 0.30 0.19 0.00

第 19 題

知識向度	數與計算	認知向度	程序執行				
對應分年細目	5-n-01 能熟練整數乘、除的直式計算						
題目	算式「425000×1600」的積有幾個 0？ ① 2 個 ② 5 個 ③ 6 個 ④ 7 個						
答題表現 選項分析 (預試)	<hr/>						
	<hr/>						
	選 項	1	2	3	4	其他	答案：4
	<hr/>						
	選項率	0.02	0.22	0.32	0.44	0.00	
	<hr/>						
高分組	0.00	0.07	0.23	0.70	0.00		
低分組	0.05	0.40	0.34	0.21	0.00		
<hr/>							
<hr/>							

七、試題分析

甲、數據解析

本題鑑別度為 0.49，通過率為 0.44，試題難易度 0.46。

乙、評量目標說明

本題旨在了解學生是否能掌握在整數乘法的直式計算中，處理「0」的方法

丙、選項表現說明

- 有 44% 的學生選擇正確選項④，顯示這些學生可以從題目中判斷出最少有 5 個 0，再針對 425×16 進行計算，得到此部分的積為 6800，和原來後面的 5 個 0，共有 7 個 0。
- 有 32% 的學生選擇選項③，這些學生可以從題目中判斷出最少有 5 個 0，惟對於 425×16 的部分，僅判斷 $5 \times 6 = 30$ 僅有 1 個 0，再加上原來後面的 5 個 0，共有 6 個 0。
- 有 22% 的學生選擇選項②，這些學生可能直接算被乘數有 3 個 0，乘數後面有 2 個 0，總共有 $2+3=5$ 個 0；忽略前面 425×16 的部分也會產生 0。
- 有 2% 的學生選擇選項①，可能直接計算 $425 \times 16 = 6800$ ，而忽略被乘數和乘數後面有 0 的考慮，抑或是把“ \times ”誤認為“+”，而在加法運算中將二個數字的末位部分對齊進行加法直式計算，得到末 2 位為 0。

丁、 學生表現說明

本題的命題為多位數乘法(後面有 0)的計算，主要在檢視學生能否將後面有 0 的被乘數和乘數先進行簡化計算，先算前面非” 0” 的部分，後面 0 個數則是被乘數和乘數的” 0” 個數相加，若原前面計算有 0 則再加一起算 0 的個數。

本題難易度為 0.46。本題通過率為 44%。有約四成四的學生已能熟練多位數的乘法在積後面有幾個” 0” 的問題，但仍有近五成六的學生，對於多位數乘法概念並不清楚。從高分組與低分組學生的表現，70%的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生只有 21%回答正確，其他錯誤情形：選項②低分組比率有四成，顯現學生了解在多位數的乘法中，僅重視後面的處理而忽略了前面 425×16 中是否有 0 的問題；另外有 30%的學生選擇選項③，是判定 425×16 的部分僅有 1 個 0，再加上原本後面的 5 個 0，共有 6 個 0。可見學生對於多位數的乘法(末尾有 0)的情形已有了初步的認識，但是對於熟稔度還不足

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

（一） 評量重點

5-n-01 能熟練整數乘、除的直式計算。

（二） 先備的知識

4-n-03 能熟練較大位數的乘除直式計算。

（三） 延伸的知識

6-n-07 能在具體情境中，對整數極小數在指定位數取概數（含四捨五入法），並作加、減、乘、除之估算。

十二年國教課綱（學習內容）

（一） 評量重點

N-5-1 十進位的位值系統 「兆位」至「千分位」。整合整數與校數。理解基於位值系統可延伸表示更大的數和更小的數。熟練十進位系統「乘以十」、「除以十」所延伸的計劃如「 300×1200 」與「 $600000 \div 4000$ 」之處理。

（二）先備的知識

N-4-2 較大位數之乘除計算：處理乘數與除數為多位數之乘除直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。

（三） 延伸的知識

N-5-9 整數、小數除以整數（商為小數）：整數除以整數（商為小數）、小數除

以整數的意義。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。能用概數協助處理除不盡的情況。熟悉分母為2、4、5、8之真分數所對應的小數。

N-6-5 解題：整數、分數、小數的四則應用問題：二到三步驟的應用解題。含使用概數協助解題。

三、教學建議

(一)評量核心概念

能解決多位數乘法積的末尾有幾個0的問題。

(二)學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. 誤用其他運算符號進行解題：學生未具有乘法的概念或看錯運算符號，以其熟悉的解題方式進行解題，例如：「 425000×1600 」，學生誤採用「 $425000 + 1600$ 」的方式來進行解題。
2. 直式記錄錯誤：僅留意「 425000×1600 」末尾的0有幾個，而忽略了前面的「 425×16 」答案中的0也要算進去。
3. 乘法計算判斷錯誤：判斷「 425×16 」中的 5×6 ，末尾多一個0，而忽略了425中可以用質因數分解成 $17 \times 5 \times 5$ ，16可以用質因數分解成 $2 \times 2 \times 2 \times 2$ 。其中將二數相乘的積要產生0，需要一個2和5相乘來組成；因此 425×16 可以組成2組的 2×5 ，亦即會在產生2個0。

(三)核心概念的教學重點

1. 了解乘積有0的條件：積的末尾中有0出現代表積至少為10的倍數。而積要出現10，除了直接為0外，就必須在被乘數或乘數中有2和5的因數。如 $10 = 2 \times 5$ ； $100 = 4 \times 25$ ； $1000 = 8 \times 125 \dots$ 。
2. 判斷積是否有0，可判斷被乘數和乘數有2和5的因數即可；判斷積是否有2個0，可判斷被乘數和乘數有4和25的因數即可。將被乘數與乘數分別做質因數分解來找出 2×5 有幾組，便能知道二數的乘積有幾個0。
3. 多位數乘法教學(末尾有0)的情況，可以先將非0的部分先乘，然後再加上被乘數與乘數原本有0的個數即可。如 24000×1200

$$\begin{array}{r} 24 \quad 000 \\ \times 12 \quad 00 \\ \hline 48 \\ 12 \\ \hline 288 \quad 00000 \end{array}$$

把被乘數與乘數後面有0的部分放在最右邊

被乘數的3個0和乘數的2個0共5個0

先算 24×12

直式計算先把非 0 的數先對齊，左邊依照原來乘法：再把右邊的 0 加入即可

(四)本題教學的加強重點

本題可以採取兩種不同的解題策略，教學內涵說明如下：

(1)乘法直式教學

$$\begin{array}{r} 425\ 000 \\ \times\ 16\ 00 \\ \hline 2550 \\ 425 \\ \hline 68000000 \end{array}$$

被乘數3個0和乘數2個0共5個0

共 7(2+5)個 0

(2) 質因數分解和利用「 $10=5 \times 2$ 」

將425和16因數分解。 $425=17 \times 5 \times 5$ ； $16=2 \times 2 \times 2 \times 2$ 。

而 $425 \times 16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 17$

$= \underline{2 \times 5} \times \underline{2 \times 5} \times 2 \times 2 \times 17$

$= 10 \times 10 \times 68 = 6800$

四、命題建議

1. 在被乘數與乘數相乘後，積會有幾個 0 的部分。

如 375×4 、 225×8 的積會有()個 0

2. 兩個末尾有 0 的多位數相乘，積會有幾個 0。

如 15000×1500 或 7600×3000 等末尾積會有()個 0

3. 兩個末尾有 0 的多位數相乘，且前面被乘數和乘數相乘出現 0，則積會有幾個 0。

如 425000×1600 、 1250×400 等末尾積會有()個 0

五、歷屆檢測試題參考

(一)106 學年度數學能力檢測第 25 題

第 25 題

知識向度。	數與量。	認知向度。	概念理解。																												
對應分年細目。	5-n-01 能熟練整數乘、除的直式計算。																														
題目。	小傑計算四位數除以三位數「 $5605 \div \square 65$ 」，得到商為「二位數」，除數可能是下列哪一個數？ ① 865 ② 665 ③ 565 ④ 465																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：4</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.13</td><td>0.11</td><td>0.15</td><td>0.58</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.04</td><td>0.03</td><td>0.04</td><td>0.89</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.23</td><td>0.22</td><td>0.28</td><td>0.27</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：4	選項率	0.13	0.11	0.15	0.58	0.00		高分組	0.04	0.03	0.04	0.89	0.00		低分組	0.23	0.22	0.28	0.27	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：4																									
選項率	0.13	0.11	0.15	0.58	0.00																										
高分組	0.04	0.03	0.04	0.89	0.00																										
低分組	0.23	0.22	0.28	0.27	0.00																										

第 20 題

知識向度	代數	認知向度	概念理解
對應分年細目	5-a-03 能熟練運用四則運算的性質，做整數四則混合運算		
題目	下列有關簡化運算的算式哪個是 <u>錯誤</u> 的？ ① $25 \times 199 \times 4 = 25 \times 4 \times 199$ ② $6400 \div 25 \div 4 = 6400 \div (25 \times 4)$ ③ $2001 \times 999 = 2001 \times 1000 - 2001$ ④ $9995 - 195 - 95 = 9995 - (195 - 95)$		
答題表現 選項分析	----- 選 項 1 2 3 4 其他 答案：4 -----		
	----- 選項率 24.06 7.22 5.8 62.31 0.00 -----		
	----- 高分組 10.4 1.64 1.31 86.65 0.00 低分組 32.58 14.45 13.47 39.49 0.00 -----		
	----- ----- -----		

三、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.47，通過率為 0.62，試題難易度 0.63。

(二) 評量目標說明

本命題重點在於學生是否能利用已學過的分配律、交換律、結合律來簡化計算過程，學生不一定要將答案算出，而是要判斷用甚麼方式簡化算式。

(三) 選項表現說明

1. 有 24.06% 的學生選擇選項①，顯示些學生不清楚乘法具有交換率的性質。
2. 有 7.22% 的學生選擇選項②，這些學生對於「連除二數=除以此二數的積」的概念尚未能熟悉，因此判斷本題的選項為錯誤。
3. 有 5.8% 的學生選擇選項③，這些學生未能以簡化計算的方式將「 2001×999 」看成「 $2001 \times (1000 - 1)$ 」，或未能明確知道乘法對於減法存有分配律的概念。
4. 有 62.31% 的學生選擇選項④，這些學生能明確知道「連減二數=減去此二數的和」因此判定這個選項是錯誤的。

(四) 學生表現說明

1. 本題的命題設計主要希望了解學生是否具有整數四則運算中有關「乘法交換律」、「連除二數等於除以二數的積」、「乘法對減法存有分配律」以及相關的簡化計算等概念。因此，在題目中將各個算式中的各數進行設定，藉以檢視學生能否正確作答。
2. 本題難易度為 0.63。推估有將近 6 成的學生已能正確知道「連減二數=減去此二數的和」，但仍有將近 4 成的學生，並未能掌握概念。從高分組與低分組學生的表現來看，86.65% 的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生有 39.49% 回答正確，卻也有 60.51% 的低分組學生作答錯誤。顯示低分組學生中多數未能正確理解「乘法交換律」、「連除二數等於除以二數的積」、「乘法對減法存有分配律」、「連減二數=減去此二數的和」等概念。

四、教材地位分析(檢視是否需新增或建議修改)

97 課綱 (分年細目)

(四) 評量重點

5-a-03 能熟練運用四則運算的性質，做整數四則混合計算。

(五) 先備的知識

4-a-02 能在四則混合計算中，運用數的運算性質。

(六) 延伸的知識

6-a-04 能利用常用的數量關係，列出恰當的算式，進行解題，並檢驗答案的合理性。

十二年國教課綱 (學習內容)

(四) 評量重點

R-5-2 四則計算規律 (II)：乘除混合計算。「乘法對加法的分配律」。將計算規律應用於簡化混合計算。熟練整數四則混合計算。

(五) 先備的知識

3. R-4-1 兩步驟問題併式：併式是代數學習的重要基礎。含四則混合計算的約定（由左往右算、先乘除後加減、括號先算）。學習逐次減項計算。

4. R-4-2 四則計算規律 (I)：兩步驟計算規則。加減混合計算、乘除混合計算。在四則混合計算中運用數的運算性質。

(六) 延伸的知識

R-6-1 數的計算規律：小學最後應認識 (1) 整數、小數、分數都是數，享有一樣的計算規律。(2) 整數乘除計算及規律，因分數運算更容易理解。(3) 逐漸體會乘法和除法的計算實為一體。併入其他教學活動。

三、教學建議

(一)評量核心概念

「乘法交換律」： $a \times b \times c = a \times c \times b$

「連除二數等於除以此二數的積」： $a \div b \div c = a \div (b \times c)$

「乘法對減法存有分配律」： $a \times b - a = a (b - 1)$

「連減二數=減去此二數的和」： $a - b - c = a - (b + c)$

(二)學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. **對於四則運算的算則不清楚**：學生習慣由左至右進行運算，或是從算式中看起來好算的部份先算而造成計算錯誤，也容易誤以為先乘除意指先乘再除(加減部分亦同)，如下列三個錯誤計算的算式：
 - (1) $35 - 5 \times 4 = 120$ (學生由左至右計算，因此先算 $35 - 5$ ，再算 30×4 ，所以計算錯誤。)
 - (2) $25 \times 7 - 5 = 50$ (學生先算比較好算的 $7 - 5$ ，再算 25×2 ，因此計算錯誤。)
 - (3) $32 \div 8 \times 2 = 2$ (學生先算乘的部分 8×2 ，再算除的部分，因此計算錯誤。)
2. **對於併式的過程及方式不了解**：如： $7 \times 18 = 126$ ， $7 \times 12 = 84$ ， $126 + 84 = 210$ 等三步驟混合計算，如果先算 $18 + 12 = 30$ ，再算 $7 \times 30 = 210$ ，可以簡化計算，因此可以併式為 $7 \times (18 + 12)$ 。當學生不了解這個併式過程及括號先算的意義時，就無法理解各種四則運算的算則，而只是一味的從左至右逐項運算。
3. **計算過程中忽略等號的對稱性**：學生不了解等號具有兩邊需等值的觀念，把等號當作運算結果，因此在逐次減項的算式中可能遺漏了數字，而只列出自己正在計算的數字，如： $100 - 6 \times 5 + 8 = 100 - 30 = 70 + 8 = 78$ ，此計算結果雖然正確，過程卻是錯誤的。
4. **以為分配律的反推算式就是結合律**：因為 $8 \times (3 + 2) = 8 \times 3 + 8 \times 2$ 是乘法對加法的分配律，學生誤以為 $8 \times 3 + 8 \times 2 = 8 \times (3 + 2)$ 就是乘法對加法的結合律，其實 $8 \times 3 + 8 \times 2 = 8 \times (3 + 2)$ 只是分配律的反推算式，仍然屬於分配律。
5. **因為加法和乘法有結合律，以為減法和除法也有結合律**：因為 $(8 + 2) + 5 = 8 + (2 + 5)$ 及 $(12 \times 5) \times 2 = 12 \times (5 \times 2)$ 成立，所以學生誤以為 $(32 \div 8) \div 2 = 32 \div (8 \div 2)$ 及 $(10 - 8) - 2 = 10 - (8 - 2)$ 也成立。
6. **因為加法和乘法有交換律，以為減法和除法也有交換律**：因為 $3 + 4 = 4 + 3$ 及 $5 \times 6 = 6 \times 5$ 成立，所以學生誤以為 $3 - 5 = 5 - 3$ 及 $2 \div 8 = 8 \div 2$ ，因此容易出現不去理解題意，直接用大數減小數或用大數除以小數。尤其是分數的除法，如題目是 2 個披薩分給 8 個人，學生常列成錯誤算式： $8 \div 2$ 。
7. **因為乘法對加、減法有分配律，以為除法對加、減法也有分配律**：因為乘法對加、減法有左右分配律，所以可以說乘法對加、減法的分配律成立；而除法對加、減法只有右分配律，即 $(12 + 6) \div 3 = 12 \div 3 + 6 \div 3$ ，但是 $36 \div (9 + 3) \neq 36 \div 9 + 36 \div 3$ ，所以除法對加、減法的分配律不成立。

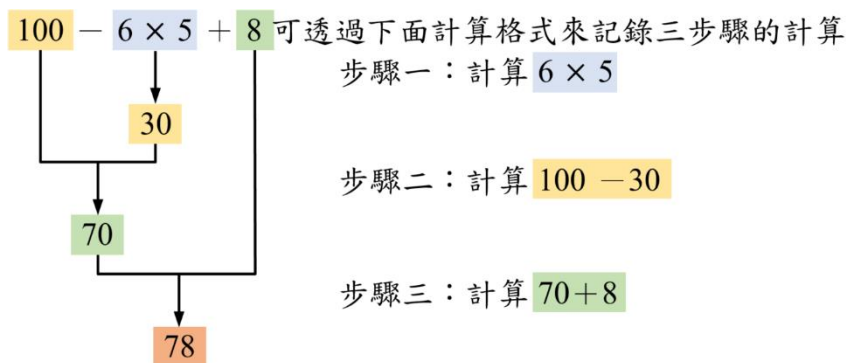
(三)核心概念的教學重點

1. 理解題意後再列式及學習併式

教師應利用多步驟問題讓學生從理解題意後「有次序」的一一系列式解題，待學生能熟練解決多步驟問題後再開始學習併式。併式教學時需同時呈現多步驟算式，再慢慢從併式過渡到能以一個算式紀錄問題。

例如：「小明口袋有 1 個 10 元硬幣和 6 個 5 元硬幣，請問小明共有多少元？」學生理解題意後多步驟解題算式可能為： $6 \times 5 = 30$ ， $10 + 30 = 40$ ；引導學生併式為 $10 + 6 \times 5 = (\quad)$ ，再討論因為乘或除是連加或連減的簡化紀錄形式，因此運算位階高於加或減，所以約定「先乘除後加減」。括號先算也是利用併式需求而產生的共同約定算則。

2. 提供層次清楚的計算格式



3. 乘法對加法的分配律

乘法對加法有右分配律及左分配律，乘號在加號右邊時，如： $(6 + 4) \times 5 = 6 \times 5 + 4 \times 5$ ，稱為乘法對加法的右分配律；乘號在加號左邊時，如： $8 \times (7 + 3) = 8 \times 7 + 8 \times 3$ ，稱為乘法對加法的左分配律。教師應用具體的情境讓學生理解乘法對加法的分配律為何會成立，情境題的數字可以設計成用分配律計算更容易，以產生使用分配律的需求。

例如：「一打鉛筆有 12 枝，小明有黃色鉛筆 8 打，小華有紅色鉛筆 2 打，兩人共有幾枝鉛筆？」引導學生發現 $12 \times 8 + 12 \times 2 = (\quad)$ 比較不容易計算，若能利用分配律改成 $12 \times 8 + 12 \times 2 = 12 \times (8 + 2) = 12 \times 10 = 120$ ，計算上會容易許多。

4. 乘法對減法的分配律

乘號在減號右邊時，如： $(8 - 5) \times 9 = 8 \times 9 - 5 \times 9$ 稱為乘法對減法的右分配律；乘號在減號左邊時，「 $10 \times (9 - 4) = 10 \times 9 - 10 \times 4$ 」稱為乘法對減法的左分配律。教師應用具體的情境讓學生理解乘法對減法的分配律為何會成立，情境題的數字可以設計成用分配律計算更容易，以產生使用分配律的需求。

例如：「一打鉛筆有 12 枝，小明有黃色鉛筆 8 打，小華有紅色鉛筆 2 打，小明比小華多幾枝鉛筆？」引導學生發現 $12 \times 8 - 12 \times 2 = (\quad)$ 比較不容易計算，若能利用分配律改成 $12 \times 8 - 12 \times 2 = 12 \times (8 - 2) = 12 \times 6 = 72$ ，計算上會容易許多。

5. 加法與乘法的結合律

在連加算式中， $(5 + 3) + 7 = 5 + (3 + 7)$ ，所以加法有結合律；在連乘算式中， $(17 \times 5) \times 2 = 17 \times (5 \times 2)$ ，所以乘法也有結合律。教師應用具體的情境讓學生理

解加法與乘法的結合律為何會成立，情境題的數字可以設計成用結合律計算更容易，以產生使用結合律的需求。

例如：「有一個長 24 公分、寬 8 公分、高 5 公分長方體，它的體積是多少？」由於長方體是由許多 1 立方公分的白色積木堆疊而成，所以計算體積＝長×寬×高時，可以先算前面「 $(24 \times 8) \times 5$ 」，也可以先算後面「 $24 \times (8 \times 5)$ 」，其體積雖然相同，但學生會發現先算 8×5 會比較容易計算。

(七) 本題教學的加強重點

1. 運用長方體的體積公式來強化對乘法交換律的認識

本題僅需依題意找出正確的算式不需計算出答案，然而在無情境的算式中，學生容易遺忘交換律使用的規約而僅靠所記憶的算則來進行判斷，因此可透過計算長方體的體積來幫助學生理解乘法交換律。教師可請學生操作長方體的教具，藉以理解乘法交換律。

例如，教師準備一個長、寬、高分別為 8cm、4cm、5cm 的長方體，請學生算出體積是多少立方公分？先由學生進行小組討論，請學生將可以求得此長方體的體積的算式記錄下來。讓學生討論可以發現：如果將這一個長方形進行翻轉，分別以不同的側面為底時，它的體積將可以寫成：「 $8 \times 4 \times 5$ 」、「 $8 \times 5 \times 4$ 」、「 $5 \times 8 \times 4$ 」、「 $5 \times 4 \times 8$ 」、「 $4 \times 5 \times 8$ 」、「 $4 \times 8 \times 5$ 」，所算出來的體積皆相同。

2. 運用長方體體積公式來認識「連除二數等於除以此二數的積」

教師進行以下命題：「有一個體積為 160 立方公分的長方體，已知它的長是 5 公分、寬為 4 公分，此一長方體的高為多少公分？」學生能知道長方體的體積為「長×寬×高」因而可以列出此題的作法為： $160 \div 5 \div 4$ ，就能算出高為 8cm。

此時，教師可提醒學生計算長方體的體積亦可以視為「底面積×高」，因此「長方體體積÷底面積」亦可以找出高的長度，而「長方體的底面積＝底面的長×底面的寬」，因此「長方體體積÷底面的長÷底面的寬＝長方體體積÷底面積＝長方體÷(底面的長×底面的寬＝高)」，從而可以強化學生認識「連除二數等於除以此二數的積」的概念。

3. 在具體情境中先理解乘法對減法的分配律，再進行抽象化的計算。

教師對於乘法對減法的分配律的教學應先以具體情境進行布題，讓學生於解題過程中明白分配律的規約，同樣是在應用的情境中產生，而非憑空出現。式以下題為例：「一盒巧克力有 80 顆，哥哥買了 7 盒，弟弟買了 4 盒，哥哥比弟弟多幾顆巧克力？」，學生可能會出現如下作法：「 $80 \times 7 - 80 \times 4$ 」，此時教師可引導學生討論並比較另一種解題方式「 $80 \times (7 - 4)$ 」，二種解題思維不同，但最後所獲得的結果是相同的，再引導學生將二個算式並列，從而瞭解 $80 \times 7 - 80 \times 4 = 80 \times (7 - 4)$ ，反之亦然。

4. 以情境布題讓學生理解「連減二數＝減去此二數的和」

教師同樣以情境布題讓學生感受簡化計算「連減二數＝減去

此二數的和」的意義。例如：「糖果店裡有 300 顆軟糖，上午賣出 100 顆，下午賣出 70 顆，還剩下幾顆軟糖？」，學生同樣會列出如下作法：「 $300-100-70=130$ 」，老師亦可引導學生能將賣出的數量相加後再進行計算，此時學生會發現：「 $300-(100+70)$ 」也是合理的求解方式，因此得到「 $300-100-70=300-(100+70)$ 」的觀念。

四、命題建議

本條細目涵括的範圍非常廣泛，可以說是整數四則運算所有性質和規約的總和，在命題時，有二個重點建議把握住：

1. 四則運算的性質著重學生對於運算規約的理解，而非強調計算能力。
2. 四則運算的性質是從生活中的數學應用情境發展而來，新北市歷年皆以選擇題的方式進行呈現，側重於對規約的熟練與判斷，或許可以非選擇題的形式，設計相關情境，藉以了解學生是否理解個規約的意義。

五、歷屆檢測試題參考

(一)105 學年度數學能力檢測第 19 題

知識向度	代數	認知向度	概念理解																												
對應分年細目	5-a-03 能熟練運用四則運算的性質，做整數四則混合計算。																														
題目	根據四則運算的規則，下列哪一個敘述是 <u>錯誤</u> 的？ ① $48 \times 199 \times 8$ 可以用 $48 \times 100 - 199 \times 8$ 來計算 ② 530×101 可以用 $53000 + 530$ 來計算 ③ 3001×99 可以用 $3001 \times 100 - 3001$ 來計算 ④ $80000 \div 32 \div 4$ 可以用 $80000 \div (32 \times 4)$ 來計算																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：1</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.50</td><td>0.21</td><td>0.14</td><td>0.14</td><td>0.01</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.84</td><td>0.07</td><td>0.04</td><td>0.04</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.23</td><td>0.28</td><td>0.23</td><td>0.24</td><td>0.02</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：1	選項率	0.50	0.21	0.14	0.14	0.01		高分組	0.84	0.07	0.04	0.04	0.00		低分組	0.23	0.28	0.23	0.24	0.02	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：1																									
選項率	0.50	0.21	0.14	0.14	0.01																										
高分組	0.84	0.07	0.04	0.04	0.00																										
低分組	0.23	0.28	0.23	0.24	0.02																										

(二)106 學年度數學能力檢測第 6 題

知識向度	代數	認知向度	程序執行				
對應分年細目	5-a-03 能熟練運用四則運算的性質，做整數四則混合計算。						
題目	下列哪一個算式能夠算出「 $24+12\div3\times4$ 」的答案？ ① $36\div3\times4$ ② $24+12\div12$ ③ $24+4\times4$ ④ $(24+12)\div(3\times4)$						
答題表現 選項分析	<hr/>						
	選 項	1	2	3	4	其他	答案：3
	<hr/>						
	選項率	0.17	0.17	0.43	0.23	0.00	
<hr/>							
	高分組	0.07	0.09	0.79	0.05	0.00	
	低分組	0.24	0.22	0.15	0.39	0.00	

第 21 題

知識向度	數與計算	認知向度	解題思考				
對應分年細目	5-n-01 能熟練整數乘、除的直式計算						
題目	「甲地每公頃稻米產量為 4901 公斤，以每 12 公斤裝成一袋販售。」下列敘述哪個正確？ ① 最多可裝滿 48 袋稻米 ② 分裝完後會剩下 5 袋稻米 ③ 已經裝袋可供販售的稻米有 4896 公斤 ④ 若再多 5 公斤的稻米就可再裝滿一袋						
答題表現 選項分析	<hr/>						
	選 項	1	2	3	4	其他	答案：3
	<hr/>						
	選項率	0.15	0.24	0.38	0.22	0.00	
	<hr/>						
	高分組	0.05	0.13	0.68	0.14	0.00	
	低分組	0.27	0.30	0.19	0.24	0.00	
<hr/>							
<hr/>							

八、試題分析-

甲、 數據解析

本題鑑別度為 0.49，通過率為 0.38，試題難易度 0.43。

乙、 評量目標說明

本題旨在了解測驗學童在除法直式計算時對於商缺位補 0，和餘數的單位理解。

丙、 選項表現說明

- 有 38%的學生選擇選項③。學生已能掌握除法的直式計算，並能運用乘除互逆的原則來檢驗答案， $12 \times 408 = 4896$ ，因此可知裝滿袋的稻米有 4896 公斤。或是 $4901 - 5 = 4896$ (全部扣除餘數 5 公斤)
- 有 24%的學生選擇選項②，代表學生能進行除法的直式計算，但未注意餘數的單位和被除數的單位應一致，誤以為餘數是 5 袋。
- 有 22%的學生選擇選項④，代表學生能進行除法的直式計算，並知道最後剩下 5 公斤，卻未能依題意掌握被除數與除數關係，誤以為再 5 公斤又可再裝成一袋。

4. 有 15% 的學生選擇選項①。在除法的直式計算時，未能正確理解位值，把正確的商 408(袋)寫成 48(袋)，忘記補 0 形成錯誤的紀錄。

丁、 學生表現說明

本題的命題主要了解學童在除法直式計算的相關概念，如：商有缺位時應補 0、餘數單位應該和被除數同單位、餘數要再增加多少時商才會多 1、「被除數－餘數＝除數×商」的概念。

本題難易度為 0.43，通過率為 38%。約有三成八的學生已能熟練除法的直式計算，並了解商和餘數所代表的意義，但仍有近六成二的學生，概念並不清楚。從高分組與低分組學生的表現來看，僅 68% 的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生只有 19% 回答正確，所以仍有再釐清與澄清除法直式計算中相關迷思概念的迫切性。

二、 教材地位分析

97 課綱（分年細目）

（一） 評量重點

5-n-01 能熟練整數乘、除的直式計算。

（二） 先備的知識

4-n-03 能熟練較大位數的乘除直式計算。

（三） 延伸的知識

6-n-07 能在具體情境中，對整數極小數在指定位數取概數（含四捨五入法），並作加、減、乘、除之估算。

十二年國教課綱（學習內容）

（二） 評量重點（N-5-1）

N-4-2 較大位數之乘除計算：處理乘數與除數為多位數之乘除直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。

（二）先備的知識

N-3-4 除法的意義與應用：基於 N-2-9 之學習，透過幾個一數的解題方法，理解如何用乘法解決除法問題。熟練十乘法的範圍的除法，作為估商的基礎。

N-3-4 除一位數：除法直式計算、老師用位直的概念說明直式計算的合理性。被除數為二，三位。

（三） 延伸的知識

N-5-1 十進位的位值系統 「兆位」至「千分位」。整合整數與校數。理解基於位值系統可延伸表示更大的數和更小的數。熟練十進位系統「乘以十」、「除

以十」所延伸的計劃如「 300×1200 」與「 $600000 \div 4000$ 」之處理。

N-5-9 整數、小數除以整數（商為小數）：整數除以整數（商為小數）、小數除以整數的意義。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。能用概數協助處理除不盡的情況。熟悉分母為2、4、5、8之真分數所對應的小數。

N-6-5 解題：整數、分數、小數的四則應用問題：二到三步驟的應用解題。含使用概數協助解題。

三、教學建議


（一）評量核心概念

能知道除法直式計算中商的表示、餘數的意義和驗算的理解。

（二）學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. **商有缺位不知道補0：**學生未具有商缺位補0的迷思概念，

如題目：「620顆巧克力，每6個裝成一包，可以裝成幾包，還剩下幾顆巧克力？」，可以除法直式計算寫成右圖算式，在計算過程中，商出現缺位，學生不知道要寫103而寫13。


$$\begin{array}{r} 103 \\ 6 \overline{) 620} \\ \underline{6} \\ 20 \\ \underline{18} \\ 2 \end{array}$$

2. **餘數錯誤認知：**以上題為例，對於餘數中的2意義，認為是剩下2包，而非剩下2顆，或是再多2顆巧克力可再組成新的一包。
3. **對驗算式子意義理解不足：**不清楚「被除數-餘數=除數 \times 商」因為除法直式中沒有出現618而不認為正確答案。

（三）核心概念的教學重點

1. **了解數值的意義：**在除法的計算過程中，學生無法辨別被除數、除數、商及餘數的關係，例如以算式「 $129 \div 15 = 8 \cdots 9$ 」為例，「129」為被除數，「15」為除數，「8」為商，「9」為餘數。

2. **了解除法直式計算的紀錄位置：**同樣以算式

「 $129 \div 15 = 8 \cdots 9$ 」為例，各個數值在除法直式紀錄中的對應位置如右：

$$\begin{array}{r} 8 \longrightarrow \text{商} \\ \text{除數} \longleftarrow 15 \overline{) 129} \longrightarrow \text{被除數} \\ \underline{120} \\ 9 \longrightarrow \text{餘數} \end{array}$$

3. **商的補0問題：**在進行解題時，應引導學生理解商為何要補0，

以右圖除法直式計算過程為例：

$$\begin{array}{r} 406 \\ 8 \overline{) 3249} \\ \underline{32} \\ 49 \\ \underline{48} \end{array}$$

因 $3200 \div 8 = 400$ ，
十位剩下4、被8除
不夠，商填0

4. **餘數問題：**餘數和被除數同單位，例如巧克力有 3249 顆，每 8 顆裝成 1 盒可以分成 406 包，剩下 1 顆巧克力；因為一盒巧克力有 8 顆，剩下 1 顆巧克力則需要再 $8-1=7$ 顆巧克力才可以裝成一盒，餘數 1 是巧克力剩下 1 顆非剩下 1 盒。
5. **驗算問題：**在除法直式驗算中：「被除數－餘數＝除數×商」。如前題舉例，算式子中的 $8(\text{除數}) \times 406(\text{商}) = 3248(\text{顆})$ 。代表全部有 3248 顆巧克力可以裝成入盒，剩下 1 顆巧克力。亦可從剩下 1 顆巧克力，代表全部有 $3249-1=3248$ 顆巧顆粒可以裝入盒中。

(四) 本題教學的加強重點

加強多位數除法的直式商與餘數和驗算的熟稔度，特別是商有缺位需補 0 和對於餘數的認知，以及「被除數－餘數＝除數×商」的程序操作。依本題為例，其算式為「 $4901 \div 12$ 」，相關解題觀念如下：

$$\begin{array}{r}
 408 \\
 12 \overline{) 4901} \\
 \underline{48} \\
 101 \\
 \underline{96} \\
 5
 \end{array}$$

- (1) $4901 \div 12$ 的商是 408，在計算過程中百位剩下 1，十位為 0，因為 10 無法被 12 除，因此商的十位部份要補 0，再進行後面的計算程序： $101 \div 12 \dots\dots$
- (2) 餘數的 5 代表是 5 公斤，因為需要 12 公斤才可以再組成一袋，所以還需要 $12-5=7$ ，需要再增加 7 公斤才可再組成一袋

- (3) 運用乘除互逆的概念來進行檢驗：

$408 \times 12 = 4896$ 公斤的米裝袋 共用了 $4901 - 5 = 4896$ 公斤的米裝袋；。

$$\begin{array}{r}
 408 \\
 \times 12 \\
 \hline
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 4896 \\
 + 5 \\
 \hline
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 4901 \\
 - 5 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 816 \quad 4901 \quad 4896 \\
 408 \\
 \hline
 4896
 \end{array}$$

四、命題建議

本題的命題建議可分為三個方向

(1)商缺位補 0 的程序運算，如 $7644 \div 7$ ； $7230 \div 6$ 等

(2)餘數再增加多少可以在湊成商多 1 的問題，如有機蛋 1509 顆，每 5 顆裝成 1 盒可以裝幾盒，再多裝幾顆又可多一盒？

五、歷屆檢測試題參考

(一)106 學年度數學能力檢測第 25 題

第 25 題					
知識向度	數與量		認知向度	概念理解	
對應分年細目	5-n-01 能熟練整數乘、除的直式計算。				
題目	小傑計算四位數除以三位數「 $5605 \div \square 65$ 」，得到商為「二位數」，除數可能是下列哪一個數？ ① 865 ② 665 ③ 565 ④ 465				
答題表現 選項分析	選 項	1	2	3	4 其他 答案：4
	選項率	0.13	0.11	0.15	0.58 0.00
	高分組	0.04	0.03	0.04	0.89 0.00
	低分組	0.23	0.22	0.28	0.27 0.00

第 22 題

知識向度	數與計算	認知向度	概念理解				
對應分年細目	5-n-11 能用直式處理乘數是小數的計算，並解決生活中的問題。						
題目	已知「 $275 \times 154 = 42350$ 」，下列哪個選項的積是「42.35」？ ① 0.275×1540 ② 2.75×154 ③ 27.5×1.54 ④ 27.5×15.4						
答題表現 選項分析	<hr/> <hr/>						
	選 項	1	2	3	4	其他	答案：3
	<hr/>						
	選項率	0.13	0.12	0.58	0.16	0.00	
	<hr/>						
	高分組	0.05	0.02	0.89	0.04	0.00	
	低分組	0.19	0.24	0.29	0.28	0.00	
	<hr/>						
	<hr/>						

五、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.6，通過率為 0.58，試題難易度 0.59。

(二) 評量目標說明

本題旨在測驗學生是否能理解小數乘以小數時，可視為整數乘以整數，積算出來後再依被乘數和乘數的小數位值和，往左去移動小數點，並能從小數點的移位原則判斷積的大小。

(三) 選項表現說明

1. 有 58% 的學生選擇正確選項③，顯示有近六成的學生能直接點數被乘數 27.5 和乘數 1.54 的小數位數，和共 3 位，故積為 42.35。但學生也有可能是直接運算而求得。
2. 有 16% 的學生選擇選項④，這些學生可能直接點數被乘數 27.5 與乘數 15.4 的小數位數，和共兩位，與 42.35 相同。
3. 有 13% 的學生選擇選項①，這些學生可能直接點數被乘數 0.275 與乘數 1540 的小數位數，和共三位，所以 42350 小數點向左移三位得到的積是 42.35，但卻忽略了 1540 是 154 的 10 倍，所以積應該是 423.5。
4. 有 12% 的學生選擇選項②，這些學生直接點數被乘數 2.75 和乘數 154 的小數位數，

和共 2 位，與 42.35 相同。

(四) 學生表現說明

1. 本題的命題設計主要希望了解學生是否能理解小數乘以小數時，可視為整數乘以整數，積算出來後再依被乘數和乘數的小數位數和，往左去移動小數點。。
2. 本題通過率為 0.58。有將近 6 成的學生已能掌握小數乘小數的算則概念，但仍有超過 4 成的學生概念並不清楚。從高分組與低分組學生的表現來看，89% 的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生只有 29% 能回答正確，且有 28% 的學生選擇選項 ② 和 ④，表示學生可能只是記憶「被乘數與乘數的小數位數和就是積的小數位數」口訣，但對其意義並不了解，因此無法熟練應用。

六、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

(一) 評量重點

5-n-11 能用直式處理乘數是小數的計算，並解決生活中的問題。

(二) 先備的知識

4-n-12 能用直式處理二位小數加、減與整數倍的計算，並解決生活中的問題。

(三) 延伸的知識

6-n-06 能用直式處理小數除法的計算，並解決生活中的問題。

十二年國教課綱（學習內容）

(四) 評量重點

N-5-8 小數的乘法：整數乘以小數、小數乘以小數的意義。乘數為小數的直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。處理乘積一定比被乘數大的錯誤類型。。

(五) 先備的知識

N-4-7 二位小數：位值單位「百分位」。位值單位換算。比較、計算與解題。
用直式計算二位小數的加、減與整數倍

(六) 延伸的知識

1. N-5-9 整數、小數除以整數（商為小數）：整數除以整數（商為小數）、小數除以整數的意義。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。能用概數協助處理除不盡的情況。熟悉分母為 2、4、5、8 之真分數所對應的小數。
2. N-6-4 小數的除法：整數除以小數、小數除以小數的意義。直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。處理商一定比被除數小的錯誤類型。

七、教學建議

(一) 評量核心概念

小數乘以小數的問題（兩位小數）。

(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. **對乘數位值為0的乘法意義不了解：**乘數的位值有0時，學生對位值出現0在乘法計算上的意義不了解，因此在直式算式中不知如何紀錄，以致於其他位值的乘法計算結果的位值亦錯誤。例如： 23×4.05 的乘數十分位位值為0，在乘法直式計算時忽略了0乘以23的紀錄，直接將4乘以23的結果紀錄在錯誤的位值造成答案錯誤（如下列直式）。

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 4.05 \\ \hline 115 \\ 92 \\ \hline 10.37 \end{array} \quad \text{——} \rightarrow \text{位值錯誤}$$

2. **對小數沒有估算的數感：**因此學生對於兩數乘積的小數點位置沒有概念，以致於出現小數乘法直式計算結果中積的小數點位置錯誤（如下列直式）。

$\begin{array}{r} 23 \\ \times 4.05 \\ \hline 115 \\ 920 \\ \hline 93.15 \end{array}$	$\begin{array}{r} 23 \\ \times 4.05 \\ \hline 115 \\ 920 \\ \hline 931.5 \end{array}$	$\begin{array}{r} 23 \\ \times 4.05 \\ \hline 115 \\ 920 \\ \hline 9.315 \end{array}$
小數點位置正確	小數點位置錯誤	小數點位置錯誤

3. **在小數乘法直式計算有個位對齊的迷思：**舊經驗小數的加減直式法則，學同記憶要個位對齊個位，但在學小數乘法的直式計算，卻要先不管小數點的位置，直接最右邊對齊，此時容易受到前面舊經驗的干擾。
4. **直式計算乘積末位為「0」時小數點位置的處理：**學生受到小數點右邊末位的0省略的影響，在處理新的積數時，會出現將末位0省略後，小數位數與原來總合不同，故又將小數點向左移一位。例如在計算「 $2.6 \times 2.5 =$ 」時，先計算「 $26 \times 25 = 650$ 」，然後點數被乘數與乘數的小數位數總合為兩位，故取得新的積數為「6.50」，學生再將小數點右邊末位的0省略為「6.5」，此時發現6.5的小數位數只有一位，故又將小數點向左移一位得到「0.65」。

(三) 核心概念的教學重點

1. **使用定位板：**進行小數的加減直式運算教學時應使用定位板，並強調位值的對齊，將被加（減）數及加（減）數的小數點對齊後進行加（減）計算，而小數的乘除計算則不強調位值的對齊。
2. **加強分數和小數的連結：**在進行小數教學時，應重視分數和小數的連結，因為小數是分數的另一種表達形式。所以用 $\frac{1}{10}$ 、 $\frac{1}{100}$ 、 $\frac{1}{1000}$ 的分數來學習小數，可以幫助學生理解0.1、0.01、0.001的小數概念，並連結兩者之間的關連。

3. 小數乘法的小數點位置算則規約

- (1) 在進行小數的乘法計算教學時，先從整數乘以小數開始，例如： $23 \times 4.5 = 23 \times 4 + 23 \times 0.5 = 92 + 11.5 = 103.5$ ，讓學生對整數乘以小數倍有感覺，學生經由觀察可以發現整數乘以帶小數倍時，即是該數的整數倍加上該數的純小數倍。所以 23 的 4.5 倍，答案一定大於 23 的 4 倍，小於 23 的 5 倍。
- (2) 接著再進行小數乘以小數的教學，可以先將小數化為分數，透過分數乘法的計算法則，幫助學生理解小數乘以小數乘法直式算則解題的意義。例如：
- $$2.3 \times 4.5 = \frac{23}{10} \times \frac{45}{10} = \frac{23 \times 45}{10 \times 10} = \frac{1035}{100} = 10.35$$
- 在此連結分數乘法的計算過程中，教師可引導學生觀察發現兩個分子相乘後得到 1035，兩個分母相乘後得到 100，因此將分數的乘積換回小數時，小數點往左移 2 位，最後得到 10.35。這樣引入幫助學生建立小數乘以小數的乘積之小數點位置之算則規約。

$$\begin{array}{r} 2.3 \\ \times 4.5 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 23 \\ \times 45 \\ \hline 1035 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 2.3 \\ \times 4.5 \\ \hline 10.35 \end{array}$$

(列出直式) (算出 23×45 的乘積) (小數點往左移 2 位)

4. **培養小數估算的數感：**除了小數和分數的連結外，在進行小數教學時，另一個很重要的概念是培養小數的數感以進行積的估算，例如： 2.3×4.5 ，是 2.3 的 4 倍多，所以可以估算答案應大於 8，小於 12 左右。小數數感的估算，也可以幫助學生先以整數進行小數的乘除計算，再定出積或商的小數點位置，例如：將 2.3×4.5 當成 23×45 的整數相乘，乘積為 1035，因以小數估算 2.3×4.1 的積介於 8~12 之間，因此可知其積應為二位小數，故積為 10.35。

(四) 本題教學的加強重點

1. 本題為小數乘以小數的題目，可先視為整數乘以整數的乘法計算，再依被乘數和乘數的小數位數總和，做原積數的小數點位移，來決定新積數小數點的位置。因此正確選項③ 27.5×1.54 的小數位數總和是三位，從原積數 42350 變成新積數 42.350，再將小數點右邊末位的 0 省略，新積數寫成 42.35。
2. 當乘以 10 時，小數點往右移 1 位，當乘以 0.1 時，小數點往左移 1 位，以此類推。所以選項① 0.275×1540 ，可將 0.275 視為 275×0.001 ，需先將原積數 42350 的小數點往左移三位成為 42.350，而 1540 可視為 154×10 ，故得再將小數點往右移一位成為 423.50，最後將小數點右邊末位的 0 省略，新積數寫成 423.5。

八、 命題建議

本項指標評量目的旨在了解學生是否能用直式處理小數乘法計算，因此命題上有以下三個方向：

- (四) 以直式運算命題：能同時檢核學生的乘法直式運算紀錄及小數點位置的處理。
- (五) 以橫式紀錄命題：主要在檢核學生如何透過判斷小數點位置，將整數乘法的積變成小數乘法的積。
- (六) 以非選擇題形式命題：檢核學生是否真正理解小數乘法的小數點位置算則規約，而非僅是

口訣的背誦及應用。例如:新北市 106 檢測試題非選抽測題。

九、歷年檢測試題參考

(一) 104 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

題目	在「 18×2.07 」的直式記錄中，下列哪一個直式記錄是正確的？					
	①	②	③	④		
	$\begin{array}{r} 18 \\ \times 2.07 \\ \hline 136 \\ 26 \\ \hline 3.96 \end{array}$	$\begin{array}{r} 18 \\ \times 2.07 \\ \hline 126 \\ 36 \\ \hline 4.86 \end{array}$	$\begin{array}{r} 18 \\ \times 2.07 \\ \hline 136 \\ 260 \\ \hline 27.36 \end{array}$	$\begin{array}{r} 18 \\ \times 2.07 \\ \hline 126 \\ 360 \\ \hline 37.26 \end{array}$		
答題表現 選項分析	選 項	1	2	3	4	其他 答案：4
	選項率	0.02	0.09	0.04	0.85	0.00
	高分組	0.00	0.02	0.01	0.97	0.00
	低分組	0.05	0.21	0.09	0.65	0.01

(二) 105 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

題目	下列哪一個直式紀錄是正確的？					
	①	②	③	④		
	$\begin{array}{r} 31.55 \\ \times 500 \\ \hline 157.75 \end{array}$	$\begin{array}{r} 31.55 \\ \times 500 \\ \hline 1577500 \end{array}$	$\begin{array}{r} 500 \\ \times 31.55 \\ \hline 2500 \\ 2500 \\ 500 \\ 1500 \\ \hline 295.00 \end{array}$	$\begin{array}{r} 500 \\ \times 31.55 \\ \hline 2500 \\ 2500 \\ 500 \\ 1500 \\ \hline 15775.00 \end{array}$		
答題表現 選項分析	選 項	1	2	3	4	其他 答案：4
	選項率	0.10	0.11	0.05	0.73	0.00
	高分組	0.03	0.05	0.01	0.91	0.00
	低分組	0.18	0.17	0.10	0.55	0.00

(三) 106 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

題目	已知「 $374 \times 265 = 99110$ 」，則 $3.74 \times 2.65 = ?$						
	① 9911.0						
	② 991.1						
	③ 9.911						
	④ 0.9911						
答題表現 選項分析	選 項	1	2	3	4	其他	答案：3
	選項率	0.02	0.09	0.81	0.08	0.00	
	高分組	0.00	0.02	0.95	0.03	0.00	
	低分組	0.08	0.18	0.59	0.15	0.00	

(四) 106 學年度新北市五年級數學能力檢測非選題

試題內容	<p>老師出了一個數學問題「一條彩帶長 3.5 公尺，姊姊佈置教室用了 2.7 條，姊姊共用掉多少公尺的彩帶？」</p> <p>小平先寫了算式「$3.5 \times 2.7 =$」，再用直式計算出結果如下：</p> $ \begin{array}{r} 3.5 \\ \times 2.7 \\ \hline 245 \\ 70 \\ \hline 94.5 \end{array} $ <p>你覺得他的直式計算做對了嗎？請說明理由。</p>
------	--

類 型 [◦]	2 [◦]					1 [◦]			0 [◦]				合 計 [◦]
	2A [◦]	2B [◦]	2C [◦]	2D [◦]	2E [◦]	1A [◦]	1B [◦]	1X [◦]	0A [◦]	0B [◦]	0X [◦]	99 [◦]	367 人 [◦]
人 數 [◦]	0 [◦]	0 [◦]	98 [◦]	55 [◦]	12 [◦]	32 [◦]	98 [◦]	15 [◦]	25 [◦]	5 [◦]	22 [◦]	5 [◦]	
百分比(%) [◦]	0 [◦]	0 [◦]	27 [◦]	15 [◦]	3 [◦]	9 [◦]	27 [◦]	4. 5 [◦]	7 [◦]	1 [◦]	5. 5 [◦]	1 [◦]	
人 數 [◦]	165 [◦]					145 [◦]			57 [◦]				
百分比(%) [◦]	45% [◦]					40. 5% [◦]			14. 5% [◦]				

第 23 題

知識向度	量與實測	認知向度	概念理解																												
對應分年細目	5-n-20 能理解長方體和正方體體積的計算公式，並能求出長方體和正方體的表面積。。																														
題目	有甲乙兩個正立方體，甲的邊長為 2 公分，乙的邊長為 6 公分，比較其表面積，下列敘述哪個正確？ ① 甲的表面積為 8 平方公分 ② 乙的表面積為 36 平方公分 ③ 乙的表面積為甲的 3 倍 ④ 乙的表面積為甲的 9 倍																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：4</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.17</td><td>0.12</td><td>0.21</td><td>0.49</td><td></td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.07</td><td>0.03</td><td>0.07</td><td>0.83</td><td></td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.28</td><td>0.21</td><td>0.32</td><td>0.18</td><td></td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：4	選項率	0.17	0.12	0.21	0.49			高分組	0.07	0.03	0.07	0.83			低分組	0.28	0.21	0.32	0.18		
選 項	1	2	3	4	其他	答案：4																									
選項率	0.17	0.12	0.21	0.49																											
高分組	0.07	0.03	0.07	0.83																											
低分組	0.28	0.21	0.32	0.18																											

七、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.65，通過率為 0.49，試題難易度 0.51。

(二) 評量目標說明

本題旨在評量學生是否理解正方體的表面積公式為「邊長 \times 邊長 \times 6」，甲正方形邊長為 2 公分，表面積為 $2 \times 2 \times 6 = 24$ (平方公分)；乙正方形邊長為 6 公分，表面積為 $6 \times 6 \times 6 = 216$ (平方公分)。並在以甲為基準的情況下做比較，發現乙正方形表面積為甲正方形表面積的 9 倍。

(三) 選項表現說明

- 有 49% 的學生選擇正確選項④，顯示半數學生已經掌握正方體的表面積公式，能計算出甲正方形的表面積為 24 平方公分，乙正方形的表面積為 216 平方公分，並能以甲正方形為基準比較出乙正方形的表面積為甲正方形的 9 倍。

2. 有 17% 的學生選擇選項①，這些學生誤認表面積為體積，而將表面積計算成 $2 \times 2 \times 2 = 8$ (平方公分)。
3. 有 12% 的學生選擇選項②，這些學生誤認表面積為面積，而將表面積計算成 $6 \times 6 = 36$ (平方公分)。
4. 有 21% 的學生選擇選項③，這些學生誤認乙邊長為甲邊長的 3 倍，則乙表面積就為甲表面積的 3 倍。

(四) 學生表現說明

1. 本題的命題設計為主要希望了解學生，對於「正方體的表面積計算」，概念是否完全理解。因此，在選項設計上，以體積、面積及長度概念作為誘答，藉以了解學生是否知道何謂正方體的表面積，以及在學習表面積概念時與其他量的混淆情形。
2. 本題難易度為 0.49。有近五成的學生能清楚從正方體的表面積計算方式，並比較出兩個正方形的倍數關係。但仍有五成多的學生無法解題。從高分組與低分組學生的表現來看，83% 的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生只有 18% 回答正確，有 82% 的低分組學生可能將「表面積」與「體積」、「面積」搞混，而選擇錯誤的選項。其中低分組又有 32% 的學生以為表面積的倍數關係與邊長的倍數關係相同，完全不清楚面積倍數是邊長倍數相乘。低分組有 28% 的學生選擇①，有 21% 的學生選擇②，顯示學生對於正方體的邊長和體積、表面積之間的關係並未充分掌握。平日教學應加強從正方體展開圖辨識出正方體邊長的能力，以及正方體表面積與體積差異的概念。

八、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

(二) 評量重點

1. 5-n-19 能認識體積單位「立方公尺」、「立方公分」及「立方公尺」間的關係，並做相關計算。
2. 5-n-20 能理解長方體和正方體體積的計算公式，並能求出長方體和正方體的表面積。

(三) 先備的知識

1. 2-n-15 能認識長度單位「公分」、「公尺」及其關係，並能做相關的實測、估測與同單位的計算。
2. 3-n-14 能認識長度單位「毫米」及「公尺」、「公分」、「毫米」間的關係，並做相關的實測、估測與計算。
3. 4-n-19 能認識體積及體積單位「立方公分」。

(四) 延伸的知識

6-n-15 能理解簡單直柱體的體積為底面積與高的乘積。

十二年國教課綱（學習內容）

(四) 評量重點

1. S-5-5 正方體和長方體：計算正方體和長方體的體積與表面積。正方體與長方體的體積公式。

(五) 先備的知識

1. N-4-12 體積與「立方公分」：以具體操作為主。體積認識基於 1 立方公分之正方體。

(九) 連結的知識

4. N-5-14 體積：「立方公尺」。簡單實測、量感、估測與計算。
5. N-5-15 解題：容積。容量、容積和體積間的關係。知道液體體積的意義。
6. R-5-3 以符號表示數學公式：國中代數的前置經驗。初步體驗符號之使用，隱含「符號代表數」、「符號與運算符號的結合」的經驗。應併入其他教學活動。

(四) 延伸的知識

S-6-4 柱體體積與表面積：含角柱和圓柱。利用簡單柱體，理解「柱體體積＝底面積 \times 高」的公式。簡單複合形體體積。

九、教學建議

(一) 評量核心概念

能計算正方體的表面積

(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. 表面積與體積概念混淆不清：

- (1) 正方體的體積與表面積意義不同：物體的體積指的是物質或物體所占空間的大小或佔據一特定容積的物質的量，體積是立體堆疊而成的。表面積是指一立體圖形所有表面的面積之和，用平面紙做出所需要的紙張面積總和。
- (2) 正方體的體積公式與表面積公式不同：1 個正方體的體積是有幾層、每一層有幾排、每一排有幾個 1 立方公分的方式計算體積。而正方體的表面積是正方體 6 個表面的面積總和，6 個表面是一面面積的 6 倍。所以正方體的表面積公式是「邊長 \times 邊長 \times 6(理解但不記公式)」。27 立方公尺。

(三) 核心概念的教學重點

1. 正方體表面積和體積的教學

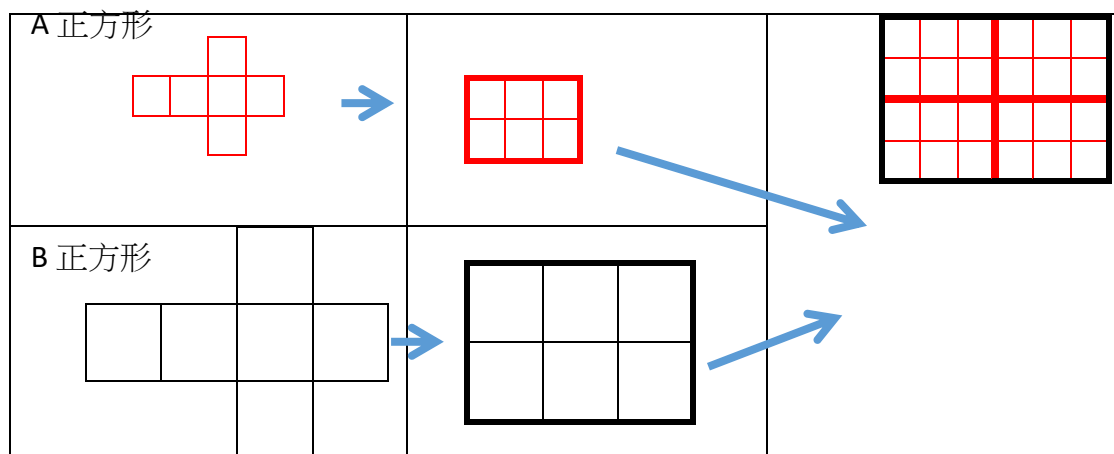
(1)表面積的教學：在進行正方體的表面積教學時，學生用正方體模型(或展開圖)，利用面積公式，並觀察圖形的對稱特性，計算出正方體的表面積。老師可以再給學生一張 A4 的方格紙，讓學生將模型每個面畫在方格紙上。接著學生再剪下這六個面，在平面上將紙盒的六個面組合起來，要能回復成原來正方體模型的立體形體。透過這個活動讓學生體驗到這六個面是平面的，也是盒子的表面，所以這六個面就是正方體模型的表面積，因為六個面是平面組合的，所以表面積的大小是六個面的面積總和。

(2)體積的教學：在進行正方體的體積教學時，在整數邊長的情況下，巧妙利用堆疊

過程學習如何以乘法快速計算正方體的體積，並學會公式。老師亦可以給學生足夠數量的 1 立方公分的小積木，讓學生嘗試利用小積木堆疊一個和正方體模型一樣大小的，讓學生體驗體積是一個個立方積木堆疊而成的，所以是以立方公分為單位，是體積是立體的，非平面的。

透過兩種教學活動讓學生清楚辨別體積和表面積的不同。表面積是平面圖形的組合，是物體外表的面積總和，常用的單位是平方公分；體積是立體堆疊的結果，是佔有空間有長、寬、高三維空間，常用的單位是立方公分。

2. **兩個正方體的表面積比較：**在進行兩正方體的表面積比較教學時，老師可以給學生 A4 的方格紙，讓學生將兩個模型每個面畫在方格紙上(如下圖 A、B 兩正方形，B 正方形邊長為 A 正方形邊長的 2 倍)。透過將展開圖的切格重組，讓學生觀察發現，兩正方體的表面積比較，其倍數關係不是邊長的倍數關係，而是邊長的倍數相乘。



(四) 本題教學的加強重點

1. **畫圖或操作解題：**建議老師畫準備正方體模型，讓學生依上面建議之步驟，讓學生實際操作後，分別去找正方體模型的邊長、面積、體積以及表面積，釐清這四種量的差異，以及邊長與面積的關係。
2. **兩正方體的表面積比較：**準備兩個正方體展開圖，兩個模型的邊長為整數倍，透過展開圖的切割、平移後，讓學生觀察討論兩方體邊長的倍數與面積、表面積的倍數之間有何關係。
3. 本概念之建構，必須透過操作，並與同儕討論，讓學生充分進行實體操作活動後，才能理解計算立體圖形各種量的算式意義與約定。

十、 命題建議



- (一) 本條目在這四年的命題類型，完全不同(例一)。
- (二) 參照 104-107 的命題發現，本條目看似容易，但歷年的通過率皆不到五成。光是在單純計算體積、表面積大小、應用的題目上已表現不佳，若是再加入立體圖形的切割、比較，通過率會更低，尤其是在低分組，通過率只有兩成左右。所以在命題建議上，應聚焦在學生是否能理解、分辨「面積」、「體積」及「表面積」這些量的意涵與差別，並藉由檢測結果讓老師理解基本操作的重要性。

【基本題命題範例一】

有一個邊長為 4 公分的正方體，請問正方體的表面積為多少平方公分？

- ① 4 ② 16 ③ 64 ④ 96

【基本題命題範例二】

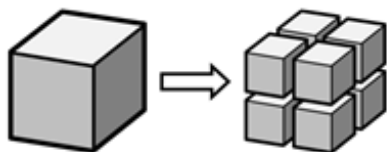
有一個邊長為 6 公分的正方體，這個正方體的表面積是 216 ，被  遮住的單位應該填什麼才對？

- ① 毫公分 ② 公分 ③ 平方公分 ④ 立方公分

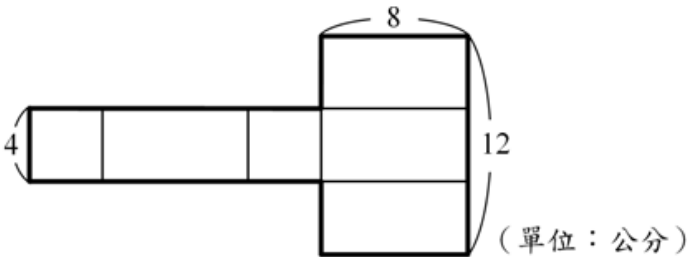
(三) 待學生對於基本概念的通過率提升後，再進行應用、比較類型之命題。

十一、歷屆檢測題參考

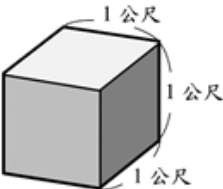
(一) 104 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

題目	將邊長 2 公分的正方體分割成 8 個邊長 1 公分的小正方體（如下圖），分割後所有的小正方體的表面積是原來正方體表面積的多少倍？						
							
	①	$\frac{1}{8}$ 倍					
	②	1 倍					
	③	2 倍					
答題表現 選項分析	④	8 倍					
	選 項	1	2	3	4	其他	答案：3
	選項率	0.30	0.10	0.28	0.31	0.01	
	高分組	0.20	0.08	0.53	0.19	0.00	
	低分組	0.34	0.11	0.15	0.38	0.02	

(二) 105 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

題目	<p>下圖為一個長方體的展開圖，這個長方體的體積是多少立方公分？</p>  <p>(單位：公分)</p> <p>① 128 立方公分 ② 160 立方公分 ③ 256 立方公分 ④ 384 立方公分</p>																												
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：1</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.31</td><td>0.18</td><td>0.07</td><td>0.45</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.55</td><td>0.14</td><td>0.02</td><td>0.29</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.13</td><td>0.18</td><td>0.13</td><td>0.55</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>	選 項	1	2	3	4	其他	答案：1	選項率	0.31	0.18	0.07	0.45	0.00		高分組	0.55	0.14	0.02	0.29	0.00		低分組	0.13	0.18	0.13	0.55	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：1																							
選項率	0.31	0.18	0.07	0.45	0.00																								
高分組	0.55	0.14	0.02	0.29	0.00																								
低分組	0.13	0.18	0.13	0.55	0.00																								

(三) 106 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

題目	<p>右圖中正方體的體積，與幾個邊長 20 公分的正方體一樣大？ (1 公尺 = 100 公分)</p> <div></div> <p>① 5 個 ② 125 個 ③ 2500 個 ④ 50000 個</p>																												
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：2</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.20</td><td>0.40</td><td>0.12</td><td>0.26</td><td>0.02</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.09</td><td>0.68</td><td>0.05</td><td>0.18</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.29</td><td>0.24</td><td>0.23</td><td>0.24</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>	選 項	1	2	3	4	其他	答案：2	選項率	0.20	0.40	0.12	0.26	0.02		高分組	0.09	0.68	0.05	0.18	0.00		低分組	0.29	0.24	0.23	0.24	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：2																							
選項率	0.20	0.40	0.12	0.26	0.02																								
高分組	0.09	0.68	0.05	0.18	0.00																								
低分組	0.29	0.24	0.23	0.24	0.00																								

知識向度	數與計算	認知向度	概念理解				
對應分年細目	5-n-06 能以約分、擴分的方式找到等值分數						
題目	下列哪個分數是 $10\frac{15}{20}$ 的等值分數？ ① $2\frac{3}{4}$ ② $10\frac{7}{16}$ ③ $10\frac{21}{28}$ ④ $20\frac{30}{40}$						
答題表現 選項分析	<hr/>						
	選 項	1	2	3	4	其他	答案：3
	<hr/>						
	選項率	0.24	0.09	0.34	0.33	0.00	
	<hr/>						
高分組	0.08	0.03	0.72	0.17	0.00		
低分組	0.35	0.15	0.12	0.38	0.00		
<hr/>							

六、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.6，通過率為 0.34，試題難易度 0.42。

(二) 評量目標說明

本題是等值分數的換算問題，旨在評量學童是否能以約分、擴分的方式找到新的等值分數。

(三) 選項表現說明

- 有 34% 的學生選擇選項③，此一部分的學生已經能先將 $10\frac{15}{20}$ 約分成最簡分數 $10\frac{3}{4}$ ，再擴分成 $10\frac{21}{28}$ ，即 $10\frac{15}{20} = 10\frac{15 \div 5}{20 \div 5} = 10\frac{3}{4} = 10\frac{3 \times 7}{4 \times 7} = 10\frac{21}{28}$ 。
- 有 33% 的學生選擇選項④，這些學生可能不理解帶分數在進行擴分時，只需就分數部分的分子和分母同時乘以一個相同的整數即可，即再等分割的概念，整數部分的值不變，因此誤認為 $10\frac{15}{20} = 10 \times 2 \frac{15 \times 2}{20 \times 2} = 20\frac{30}{40}$ ，得到的分數為等值分數。
- 有 24% 的學生選擇選項①，這些學生可能不理解帶分數在進行約分時，只需就分數部分的分子和分母同時除以一個相同的整數即可，即再等合成的概念，整數部分的值不變，因此誤認為 $10\frac{15}{20} = 10 \div 5 \frac{15 \div 5}{20 \div 5} = 2\frac{3}{4}$ ，得到的分數為等值分數。
- 有 9% 的學生選擇選項②，這些學生誤以為在進行擴分時，分子需加上分母所乘以

的整數，因此認為 $10\frac{15}{20}=10\frac{15\div5}{20\div5}=10\frac{3}{4}=10\frac{3+4}{4\times4}=10\frac{7}{16}$ ，得到的分數為等值分數。

(四) 學生表現說明

1. 本題命題設計題幹中的分數並非最簡分數，所以學生無法透過將給定分數直接乘以（或除以）整數倍後就能在選項中找到等值分數。因此學生需先將給定分數先約分成最簡分數後再擴分以找到等值分數。希望透過本題能了解學生是否理解等值分數的概念，並能靈活運用擴分及約分的方式找到等值分數。
2. 本題通過率為 0.34。只有約三成多的學生能靈活運用等值分數的概念來解決問題，但仍有近七成的學生無法正確解題。從高分組與低分組學生的表現來看，72%的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生只有 12% 回答正確，卻有 73% 的低分組學生選①和④，顯示低分組學生對於帶分數在進行用擴(約)分找等值分數時，整數部分值不變的概念並未充分理解。

七、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

(一) 評量重點

5-n-06 能用約分、擴分處理等值分數的換算。

(二) 先備的知識

4-n-09 能認識等值分數，進行簡單分母分數的比較，並用來做簡單分數與小數的互換。

(三) 延伸的知識

1. 5-n-07 能用通分做簡單異分母分數的比較與加減。
2. 5-n-08 能理解分數乘法的意義，並熟練其計算，解決生活中的問題。

十二年國教課綱（學習內容）

(一) 評量重點

N-5-4 異分母分數：用約分、擴分處理等值分數並做比較。用通分做異分母分數的加減。養成利用約分化簡分數計算的習慣。

(二) 先備的知識

N-4-6 等值分數：由操作活動中理解等值分數的意義。簡單異分母分數的比較、加、減的意義。簡單分數與小數的互換。

(三) 延伸的知識

N-5-5 分數的乘法：整數乘以分數、分數乘以分數的意義。知道用約分簡化乘法計算。處理乘積一定比被乘數大的錯誤類型。透過分數計算的公式，知道乘法交換律在分數也成立。

八、教學建議

(四) 評量核心概念

能用擴分、約分處理等值分數。

(五) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. 給定的分數的分母和指定分母的數值不成整數倍的關係：例如： $\frac{21}{35} = \frac{(\quad)}{15}$ ，學生可能先將 $\frac{21}{35}$ 化為最簡分數 $\frac{3}{5}$ 後，再進行擴分的換算。但擴分時容易因為概念不清楚而產生計算錯誤，如：學生可能是認為 $21 \div 7 = 3$ ，所以答案寫7；也可能是因為計算 $\frac{3}{5} = \frac{(\quad)}{15}$ 時，將 3×3 看成 $3 + 3$ ，所以答案寫6；也可能是因為約成最簡分數卻忽略了題目中分母的條件，而答案寫3。
2. 不理解擴（約）分的換算方法：分子和分母並非同乘（除）一個整數，而任意列其因倍數當作等值分數。：例如： $\frac{8}{12} = \frac{16}{36}$ ， $\frac{8}{12} = \frac{2}{4}$ 。
3. 混淆擴分與約分：不理解擴分的意義，而誤用約分的方法進行擴分的換算。例如： $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ 。
4. 擴（約）分表示方式錯誤：學了分數乘（除）法後，將擴（約）分和分數乘（除）法的算法混淆，例如： $\frac{8}{12} \times 2 = \frac{16}{24}$ ， $\frac{8}{12} \div 2 = \frac{4}{6}$ 。
5. 不理解擴分和約分的意義：在處理帶分數的等值分數時，學生有可能將擴分連結成擴大的含義，因此整數部分也同時乘以整數，而約分連結成縮小的含義，所以整數部分也同時除以整數。例如： $2\frac{4}{5} = 6\frac{12}{15}$ ； $15\frac{5}{10} = 3\frac{1}{2}$ 。

(六) 核心概念的教學重點

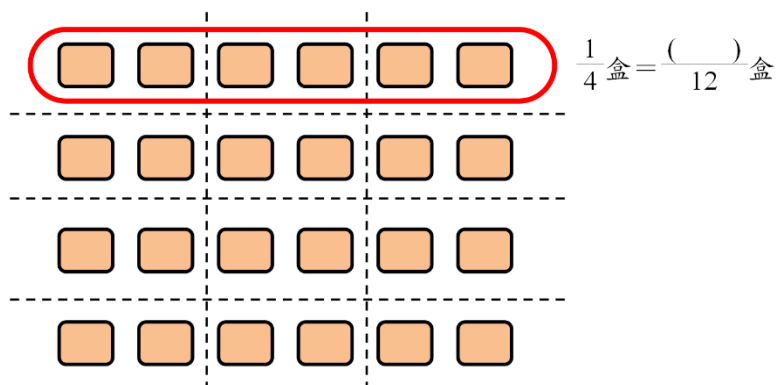
學生學習擴分與約分的方法找出等值分數時，先要有完整的理解等值分數的概念，才能學習使用擴分與約分的方法快速地找出分數的等值分數，否則會有上面的錯誤類型和迷思概念產生。

1. 先穩固等值分數的概念：先複習讓學生熟悉簡單等值分數的概念，例如 $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$ 。透過具體物或圖形表徵（必須是精準的比例，可善用電腦繪製或教具輔助教學）解說等值分數的概念，學生也可以實際操作疊合看看是否一樣大。讓學生透過具體物或圖像表徵觀察發現：互為等值分數的分數有不同的「等分割」及可再「合成」其數份的數量，但其值或量是一樣大的，藉此穩固等值分數的概念。

2. 經驗擴分的意義：要在真實情境之下，引出擴分的經歷。

(1) 將單位分數轉換為指定分母的等值分數：以「24 顆巧克力裝成一盒， $\frac{1}{4}$ 盒和 $\frac{(\quad)}{12}$ 盒一樣多？」為例，學生可能的解題策略：

- i. 以內容物的觀點進行解題活動：學生先決定 $\frac{1}{4}$ 盒有 6 顆巧克力，再決定十二分之多少盒有 6 顆巧克力，因题目的指定分母是 12，表示一盒巧克力做 12 等分割，而一份是 2 顆，進而決定 $\frac{3}{12}$ 盒有 6 顆巧克力。
- ii. 由等分割份數的觀點進行解題活動：如【圖 24-1】，12 恰好是 4 的整數倍，因此可以將 $\frac{1}{4}$ 所表示的整體橫切的 4 等份，每一份再縱切平分成 3 小份，也就是 $4 \times 3 = 12$ 小份，而原本 4 等份的每一份也變成 $1 \times 3 = 3$ 小份，也就得到 $\frac{3}{12}$ 的解答。



【圖 24-1】

由 $\frac{1}{4}$ 的分子、分母同乘以 3 得到等值分數 $\frac{3}{12}$ ，就是擴分。教師可以多布置類似情境題，讓學生多累積擴分的經驗。而分數的分母從是整數倍到不是整數倍的練習。引導學生對找等值分數的歷程，看見離散量情境擴分或約分計算的法則。

(2) 連續量情境，將分數轉換為指定分母的等值分數：因為分母是整數倍的例題如上所介紹大同小異，此部分舉例不成整數倍的問題。

以「 $\frac{2}{8}$ 個披薩和 12 分之多少個披薩一樣大？和 4 分之多少個披薩一樣大？」為例，由等分割份數的觀點進行解題活動：學生從操作圓形分數片中經驗 $\frac{2}{8}$ 的圓和分成 12 等分的圓疊在一起，發現 $\frac{2}{8}$ 和 $\frac{3}{12}$ 一樣大，記作 $\frac{2}{8} = \frac{3}{12}$ ； $\frac{2}{8}$ 個圓和 $\frac{1}{4}$ 個圓一樣大，記作 $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ 。由 $\frac{2}{8}$ 的分子、分母同除以

2 得到等值分數 $\frac{1}{4}$ ，再分子、分母同乘以 3 得到等值分數 $\frac{3}{12}$ ，就是分母不為整數倍的擴分。

(3) **離散量情境，帶分數轉換成指定分母的分數的活動：**以「12 顆乒乓球裝成一盒， $1\frac{1}{3}$ 盒和 6 分之多少盒一樣多？」為例，學生可能的解題策略：

i. 將帶分數看成整數與分數兩部分的合成結果，先處理分數部分，把單位分數或真分數表示成指定分母的等值分數後，再加上原先的整數部分，以獲得新的等值帶分數，而本題的做法是把 $1\frac{1}{3}$ 看成是 1 和 $\frac{1}{3}$ 的合成結果，再決定 $\frac{1}{3}$ 轉換成等值分數 $\frac{2}{6}$ ，新的等值分數就是 $1\frac{2}{6}$ 。

ii. 學生也可能將帶分數先化為假分數，再比照將真分數轉換為指定分母等值分數的方式，進行解題活動。如本題把 $1\frac{1}{3}$ 轉換成 $\frac{4}{3}$ ，將 $\frac{4}{3}$ 轉換成等值分數 $\frac{8}{6}$ ， $\frac{8}{6}$ 再轉換為帶分數 $1\frac{2}{6}$ 。由 $\frac{1}{3}$ 的分子、分母同乘以 2 得到等值分數 $\frac{2}{6}$ ，再加上原先的整數部分就是帶分數的擴分。

3. 介紹擴分與約分的名詞

(1) 擴分是指把分數的分母和分子同乘一個大於 1 的整數，而得到一個分割份數變多的等值分數的方法。

(2) 約分是指把分數的分母和分子同除以大於 1 的公因數，而得到一個分割份數變少的等值分數的方法。

4. 從概念理解進入程序性知識，學生多練習以熟練用擴(約)分找等值分數的方法。

(七) 本題教學的加強重點

本題的重點在評量學生是否能以擴分或約分的方式找出其等值分數。等值分數的意義在表示雖然實物樣式不同，但其值一樣大，不論是擴分或約分並不會影響分數數值的大小。選項④已經擴大分數數值，選項①已經縮小分數數值，這兩個選題都可以直接從整數部分看出其數值大小已經改變，顯然，學生有可能將擴分連結成擴大的含義，因此整數部分也同時乘以整數，而約分連結成縮小的含義，所以整數部分也同時除以整數。

綜合以上，學生需要多一些擴分和約分的活動經驗，建議教師在教學上能透過圓形分數板加強擴分和約分的具體操作以鞏固等值分數概念，也需要熟練擴分和約分的程序性知識，自然就能隨時掌握分子和分母同乘(除)以一整數不改變其值的概念。

九、 命題建議

本題評量的核心在測驗學生能用擴分與約分的方法找出等值分數，教師在命題時應考慮以下幾點：

(一) 分數的類型:應包含真(假)分數及帶分數等類型,例如: $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$; $\frac{3}{2}=\frac{6}{4}$; $1\frac{2}{3}=1\frac{4}{6}$

(二) 運算的類型:包含擴分型和約分型,例如: $1\frac{2}{3}=1\frac{4}{6}$; $2\frac{6}{15}=2\frac{2}{5}$

(三) 分母間的倍數:從整數倍到非整數倍,例如: $\frac{3}{8}=\frac{6}{16}$; $\frac{6}{10}=\frac{9}{15}$

(四) 題型的種類:可用圖形表徵(圓形分數板或長方形分數板)、裸題或生活情境題等類型來命題。

十、 歷年檢測題目參考

(七) 104 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

題目	下列哪一個選項的數值,是由「 $1\frac{2}{3}$ 」擴分而成? ① $\frac{5}{3}$ ② $2\frac{2}{3}$ ③ $1\frac{4}{6}$ ④ $2\frac{4}{6}$					
答題表現 選項分析	選 項	1	2	3	4	其他 答案: 3
	選項率	0.25	0.04	0.52	0.19	0.01
	高分組	0.06	0.00	0.82	0.11	0.00
	低分組	0.47	0.10	0.23	0.20	0.01

(八) 105 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

題目	一杯奶茶由紅茶和牛奶調配而成，紅茶占全部的 $\frac{9}{15}$ ，牛奶占全部的 $\frac{6}{15}$ ，這杯奶茶與下列哪一個選項的調配方式相同？ ① 300 毫公升的奶茶裡含有 180 毫公升的紅茶 ② 250 毫公升的奶茶裡含有 100 毫公升的紅茶 ③ 150 毫公升的奶茶裡含有 30 毫公升的牛奶 ④ 90 毫公升的奶茶裡含有 60 毫公升的牛奶					
答題表現	選 項	1	2	3	4	其他
選項分析	選項率	0.43	0.14	0.17	0.25	0.00
	高分組	0.71	0.07	0.06	0.16	0.00
	低分組	0.23	0.21	0.25	0.30	0.00

(九) 106 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

題目	下列選項何者是 $\frac{15}{39}$ 的等值分數？					
	① $\frac{51}{93}$ ↓					
	② $\frac{35}{91}$ ↓					
	③ $\frac{41}{65}$ ↓					
	④ $\frac{2}{26}$ ↓					
答題表現 選項分析	選 項	1	2	3	4	其他 答案：2
	選項率	0.16	0.53	0.13	0.14	0.00
	高分組	0.08	0.83	0.05	0.05	0.00
	低分組	0.22	0.30	0.23	0.25	0.00

第 25 題

知識向度	數與計算	認知向度	概念理解				
對應分年細目	5-n-03 能熟練整數四則混合計算。						
題目	算式「 $(35 \times 90 - 35 \times 86) \div (93 - 86)$ 」的答案與下列哪個算式的答案 <u>不同</u> ？ ① $3150 - 3010 \div 7$ ② $35 \times (90 - 86) \div (93 - 86)$ ③ $140 \div 7$ ④ $35 \times 4 \div 7$						
答題表現 選項分析							
	選 項	1	2	3	4	其他	答案：1
	選項率	0.37	0.25	0.18	0.19	0.00	
	高分組	0.69	0.15	0.07	0.09	0.00	
	低分組	0.16	0.28	0.30	0.26	0.00	

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.53，通過率為 0.37，試題難易度 0.43。

(二) 評量目標說明

本題旨在評量學生是否理解並熟練四則運算規則，先乘（或除）再加（或減），從左而右計算，並計算出正確答案。

(三) 選項表現說明

- 有 37% 的學生選擇選項①，顯示只有三成七的學生能清楚掌握並熟練四則運算的算則，包含：先乘（或除）再加（或減）、由左至右計算，而且清楚知道有無括號在運算中的差別。
- 有 25% 的學生選擇選項②，這些學生對於「乘法對減法有分配律」概念不清楚，所以無法判定算式 $(35 \times 90 - 35 \times 86) = 35 \times (90 - 86)$ 。或是認為：因為括號位置改變，答案也就不同，因而選擇這個選項。
- 有 18% 的學生選擇選項③，這些學生對於四則運算規則不甚清楚，只記得背誦的口訣（有括號要先算），因此將兩邊括號裡的答案算出，但可能計算錯誤，因此誤認為選項③是答案。
- 有 19% 的學生選擇選項④，這些學生可能對倍數概念不清楚， 35×90 表示是有 90 個 35 也可以說是 35 的 90 倍、 35×86 表示是有 86 個 35 也可以說是 35 的 86 倍、兩者相差 4 個 35

也可以說是相差了 35×4 ，因為不清楚此概念，故選擇錯誤。

(四) 學生表現說明

1. 本題的命題設計為基本題，主要希望了解學生對於四則運算規則，包含「由左至右、先乘（或除）再加（或減）、有括號要先算」的概念是否完全清楚，以及了解學生能否應用乘法對減法的分配律來解題，概念正確即可判斷出正確答案，不需計算。
2. 本題的通過率為 0.37，表示只有三成七的學生對於四則運算規則的概念清楚，可運用這些概念判斷出正確答案，但仍有高達六成三的學生，因為概念並不清楚而造成判斷上的錯誤。從高分組與低分組學生的表現來看，高分組學生的答對率有 69%，低分組學生的答對率只有 16%，代表有超過八成四以上的低分組學生對於四則運算的規則並不熟悉或一知半解，以及有近三成一的高分組學生也作答錯誤。教師在進行相關教學時，因此從生活情境中引導學生去理解各種算則的意義。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

(一) 評量重點

5-n-03 能熟練整數四則混合計算。

(二) 先備的知識

1. 4-n-04 能在具體情境中，解決兩步驟問題，並學習併式的記法與計算。
2. 4-n-05 能做整數四則混合計算（兩步驟）。

(三) 延伸的知識

1. 6-n-05 能在具體情境中，解決分數的兩步驟問題，並能併式計算。
2. 6-n-08 能在具體情境中，解決小數的兩步驟問題，並能併式計算。

十二年國教課綱（學習內容）

(一) 評量重點

R-5-2 四則計算規律 (II)：乘除混合計算。「乘法對加法或減法的分配律」。將計算規律應用於簡化混合計算。熟練整數四則混合計算。

(二) 先備的知識

1. R-4-1 兩步驟問題併式：併式是代數學習的重要基礎。含四則混合計算的約定（由左往右算、先乘除後加減、括號先算）。學習逐次減項計算。
2. R-4-2 四則計算規律 (I)：兩步驟計算規則。加減混合計算、乘除混合計算。在四則混合計算中運用數的運算性質。

(三) 延伸的知識

R-6-1 數的計算規律：小學最後應認識 (1) 整數、小數、分數都是數，享有一樣的計算規律。
(2) 整數乘除計算及規律，因分數運算更容易理解。(3) 逐漸體會乘法和除法的計算實為一體。併入其他教學活動。

三、教學建議

(一) 評量核心概念

熟練解決整數加、減、乘、除混合計算的問題。

(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. 一律由左至右計算

學生可能對於整數四則運算順序的規約並不了解，因此不論算式中是否同時具有加、減、乘、除或是有括號，皆由左至右逐一進行計算。

例如：「 $20+4\times 5-3=$ 」，學生可能會先計算 $20+4=24$ ，接著將 $16\times 5=80$ ，再算 $80-3=77$ ，因此而得到錯誤的結果，此即學生了解其運用四則運算規約，而只知由左至右逐步計算。

2. 以為先算乘法，再算除法

學生可能因為背誦口訣「先乘除後加減」，誤解口訣中的運算規則，以為乘法的運算順序先於除法。另外也有可能是因為括號通常先教，所以學生最熟悉，因此容易忽略其他的運算規則。

例如：「 $48\div 6\times 2=$ 」，學生可能先算 $6\times 2=12$ ，再算 $48\div 12=4$ ，所以誤算答案為 4。

3. 以為先算加法，再算減法

學生可能因為背誦口訣「先乘除後加減」，誤解口訣中的運算規則，以為加法的運算順序先於減法。

例如：「 $20-3+7=$ 」，學生可能先算 $3+7=10$ ，再算 $20-10=10$ ，所以誤算答案為 10。

4. 對於併式的過程及方式不了解

當學生不了解併式的意義及算則規約產生的情況時，學生不容易理解「括號先算」、「先算乘或除，後算加或減」等算則的意義。

例如： $7\times 18=126$ ， $7\times 12=84$ ， $126+84=210$ ，如果先算 $18+12=30$ ，再算 $7\times 30=210$ ，可以簡化計算，因此可以併式為 $7\times (18+12)$ 。當學生不了解這個併式過程及括號先算的意義時，就無法理解各種四則運算的算則，而只是一味的從左至右逐項運算。

5. 對多步驟問題的題意理解有困難：五年級整數混合運算學習的是三步驟應用問題，學生對複雜的應用問題情境不能充分理解題意，因此容易錯誤列式。

6. 不理解括號的有無與對算式的影響

學生在學習四則運算的算則時，會記得有括號要先算，但為什麼要先算或者括號位置的改變對於運算過程有無影響，則不甚清楚，例如： $100-(3\times 31)=100-3\times 31$ ，此算式使用先乘除後加減的算則判斷，得知有無括號不會影響答案，故應鼓勵學生不使用括號。又如： $1000-(400+300)$ 與 $1000-400+300$ ，有括號與無括號計算的答案是不同的。括號使用的需求性及必要性應從生活情境問題去引導學生理解。

7. 無法充分理解括號的位置與對運算結果的影響

以 $(1000 \times 400) \div 100$ 與 $1000 \times (400 \div 100)$ 二個算式為例，括號位置的改變對算式無影響；而比較 $(1000 - 400) \div 100$ 與 $1000 - (400 \div 100)$ 二個算式，括號位置的改變對算式是有影響。教師在教學時應讓學生在情境問題中解釋，括號位置的改變對算式的影響，再利用純計算題讓學生能熟練運用四則運算規則，自行發現括號位置的改變對算式的影響。

(三)核心概念的教學重點

學生在學習四則運算的算則時，應該利用生活化的情境，讓學生理解為了簡化複雜的列式及運算過程，因此逐漸形成運算規則的共識：

1. 由左至右計算

學生在學習整數四則運算之前即具有「先算左邊，再算右邊」的舊經驗。唯先前的學習情境是較為單純的單步驟或二步驟解題，在進入較為複雜的情境（多步驟）之後，人們首先形成「由左至右計算」的規約。

例如：「 $23 - 30 + 15 =$ 」和「 $3 \times 15 \div 5 =$ 」，因為式子中的運算符號為「+」、「-」與「 \times 」、「 \div 」與學生先前的計算經驗雷同，因此學生多數能執行由左至右計算，部分學生可能會先進行「 $30 + 15$ 」以及「 $15 \div 5$ 」的運算，雖然答案相同，唯在進行教學時，應適當檢視計算方式與題意是否相符。

2. 括號部分先計算

在一個算式中如果出現括號，則表示「必須先處理的部分」，教師應從情境布題，再輔以提問，讓學生產生「某部分必須先處理」的體會，亦即出現「使用括號的需求感」。例如：「包子店新開幕，每個包子特價一律5元，媽媽用500元買了6個肉包，8個菜包，應該找回多少元？」學生依據題意，可分別列出下列算式： $5 \times 6 = (\quad)$ （買6個肉包的錢），及 $5 \times 8 = (\quad)$ （買8個菜包的錢）。

這時老師可輔以提問：「媽媽買包子一共花多少錢？」多數學生會將兩者相加，以「 $5 \times 6 + 5 \times 8$ 」合併算式，教師再提問：「媽媽付了500元，應該找回多少錢？」，學生可能會寫成： $500 - 5 \times 6 + 5 \times 8 = (\quad)$ 。

此時，即應請學生思考這個算式的計算是否符合題意，學生提出應該要「先算」肉包和菜包一共要多少錢，再用500元減去花費的總額，即是老師提問之應該找回的金額。在情境設計及教師的提問引導下產生「括號先算」的需求，因此，我們可以使用括號將上述算式寫成： $500 - (8 \times 5 + 6 \times 5)$ 。

3. 先算乘或除，後算加或減

隨著運算情境的複雜，為了減少括號的使用，人們約定當算式中同時出現加、減或乘、除在一個算式中時，要先算乘除再算加減，因此在這個運算歸約的學習，亦應設計生活化的情境，協助學生理解「先算乘（或除），後算加（或減）」歸約的產生。

以 $53 - 3 \times 15$ 為例，在解題時，應先算「 3×15 」的部分，得到45，再計算 $53 - 45 = 8$ 。

4. 理解題意後再列式及學習併式

教師應利用多步驟問題讓學生從理解題意後有次序的一一系列式解題，待學生能熟練解決多步驟問題後再開始學習併式。併式教學時需同時呈現多步驟算式，再慢慢併式過渡到能以一個算式記錄問題。

5. 例如：「小明口袋有1個10元硬幣和6個5元硬幣，請問小明共有多少元？」學生理解題意後多步驟解題算式可能為： $6 \times 5 = 30$ ， $10 + 30 = 40$ ；引導學生併式為 $10 + 6 \times 5 = (\quad)$ ，再討論因為乘或除是連加或連減的簡化記錄形式，因此運算位階高於加或減，所以約定「先算乘或除，後算加或減」的算則。

(二) 本題教學的加強重點

在課堂中帶著學生討論選項②③④為什麼是對的？如下所述：

1. 計算的過程中理解「括號有無」對運算的影響

選項① $3150 - 3010 \div 7$ 與算式「 $(35 \times 90 - 35 \times 86) \div (93 - 86)$ 」的答案不同。選項① $3150 - 3010 \div 7$ 是根據四則運算規則先乘後減將題目的 $(35 \times 90 - 35 \times 86)$ 計算出，但少了括號，因此要讓學生判斷此2個算式 $(3150 - 3010) \div 7$ 與 $3150 - 3010 \div 7$ 的在解題的過程中，有括號的算式要先算，所以會得到選項③ $140 \div 7$ ，沒有括號的情形則要先算 $3010 \div 7$ 的部分，列式會變成 $3150 - 430 = 2720$ ，二個算式答案不同，藉以讓學生明白括號的有無對算式的影響。

2. 透過情境問題理解乘法分配律

選項②是在評量算式 $35 \times (90 - 86)$ 與 $(35 \times 90 - 35 \times 86)$ 是否相同，教師可透過情境問題，如：一盒巧克力球有35顆，媽媽訂了90盒，其中86盒送客戶，請問還剩下幾顆巧克力球？讓學生從情境中去辨別 $35 \times (90 - 86)$ 與 $(35 \times 90 - 35 \times 86)$ 的不同，進而理解乘法分配律的意義。

3. 透過乘法倍的語言去理解 $(35 \times 90 - 35 \times 86) = 35 \times 4$

在二年級學習乘法問題時，學生知道： $2 + 2 + 2 = 2 \times 3$ ，所以 2×3 會解釋成有「3個2」等於「2的3倍」。相同的情形： 35×90 表示有「90個35」等於「35的90倍」，「 35×86 」表示有86個35等於「35的86倍」，兩者相減剩下4個35等於「35的4倍」，寫成算式為「 35×4 」

4. 在課堂中帶著學生討論選項②③④為什麼是對的？

四、 命題建議：

1. 診斷學生能否正確判斷「應加括號而未加」或「不應去括號而去掉」對題意的影響

學生對於括號的有無在四則混合計算上的影響，常感到混淆，因此在評量時可以診斷學生是否能理解：「應加括號而未加」或「不應去括號而去掉」和原意會有所不同。例如： $(3150 - 3010) \div 7$ 與 $3150 - 3010 \div 7$ ，兩者計算結果不同。

2. 運用分配律簡化計算

本題 $(35 \times 90 - 35 \times 86)$ 可運用乘法分配律寫成 $35 \times (90 - 86) = 35 \times 4$ ，學生對於乘法分配律運用於四則混合計算中不甚理解，故評量時可以診斷學生是否會運用分配律來簡化計算，如： 9999×1001 可以寫成 $9999 \times (1000 + 1)$ 等於 $9999 \times 1000 + 9999$ ，可以檢驗學生是否知道上述

3個算式，算出來的答案相同。如果學生能知道 $9999 \times 1001 = 9999 \times (1000 + 1) = 9999 \times 1000 + 9999$ ，即代表能理解乘法分配律。

3. 命題參考：

四則運算的性質是從生活中的數學應用情境發展而來，新北市歷年皆以選擇題的方式進行呈現，側重於對規約的熟練與判斷，或許可以非選擇題的形式，設計相關情境，藉以了解學生是否理解規約的意義。

五、歷屆檢測試題參考：

(一)106 學年度第 9 題

知識向度。	數與計算。	認知向度。	程序執行。																														
對應分年細目。	5-n-03 能熟練整數四則混合計算。																																
題目。	求 $49-42\div7\times3+4=?$ 。 ① 133。 ② 51。 ③ 35。 ④ 7。																																
答題表現。 選項分析。	<table><tr><td>選 項。</td><td>1。</td><td>2。</td><td>3。</td><td>4。</td><td>其他。</td></tr><tr><td>答案：</td><td>3。</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>選項率。</td><td>0.04。</td><td>0.11。</td><td>0.66。</td><td>0.19。</td><td>0.00。</td></tr><tr><td>高分組。</td><td>0.01。</td><td>0.04。</td><td>0.93。</td><td>0.02。</td><td>0.00。</td></tr><tr><td>低分組。</td><td>0.08。</td><td>0.18。</td><td>0.31。</td><td>0.43。</td><td>0.00。</td></tr></table>			選 項。	1。	2。	3。	4。	其他。	答案：	3。					選項率。	0.04。	0.11。	0.66。	0.19。	0.00。	高分組。	0.01。	0.04。	0.93。	0.02。	0.00。	低分組。	0.08。	0.18。	0.31。	0.43。	0.00。
選 項。	1。	2。	3。	4。	其他。																												
答案：	3。																																
選項率。	0.04。	0.11。	0.66。	0.19。	0.00。																												
高分組。	0.01。	0.04。	0.93。	0.02。	0.00。																												
低分組。	0.08。	0.18。	0.31。	0.43。	0.00。																												

(二)105 學年度第 24 題

知識向度。	數與計算。	認知向度。	解題思考。																														
對應分年細目。	5-n-03 能熟練整數四則混合計算。																																
題目。	一個機器人模型賣 180 元，買 4 個機器人模型比買 6 輛汽車模型的價錢少了 30 元，一輛汽車模型賣多少元？ ① 90 元。 ② 115 元。 ③ 125 元。 ④ 150 元。																																
答題表現。 選項分析。	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td></tr><tr><td>答案</td><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.14</td><td>0.38</td><td>0.35</td><td>0.12</td><td>0.00</td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.05</td><td>0.37</td><td>0.55</td><td>0.03</td><td>0.00</td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.22</td><td>0.32</td><td>0.22</td><td>0.23</td><td>0.00</td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案	3					選項率	0.14	0.38	0.35	0.12	0.00	高分組	0.05	0.37	0.55	0.03	0.00	低分組	0.22	0.32	0.22	0.23	0.00
選 項	1	2	3	4	其他																												
答案	3																																
選項率	0.14	0.38	0.35	0.12	0.00																												
高分組	0.05	0.37	0.55	0.03	0.00																												
低分組	0.22	0.32	0.22	0.23	0.00																												

(三)104 學年度第 2 題

知識向度	數與計算	認知向度	程序執行
對應分年細目	5-n-03 能熟練整數四則混合計算		
題目	求 $30-4\times 5+3\times 2=?$ ① 266 ② 136 ③ 26 ④ 16		
答題表現 選項分析	選 項 1 2 3 4 其他 答案：4		
	選項率 0.03 0.04 0.06 0.86 0.00		
	高分組 0.00 0.00 0.01 0.98 0.00		
	低分組 0.08 0.10 0.14 0.67 0.00		

第 26 題

知識向度	數與計算	認知向度	程序執行				
對應	5-n-08 能理解分數乘法的意義，並熟練其計算，解決生活中的問題。						
題目	一瓶沙拉油是 $\frac{5}{6}$ 公升，用去了 $\frac{2}{3}$ 瓶後，還剩下多少公升？ ① $\frac{5}{18}$ 公升 ② $\frac{8}{18}$ 公升 ③ $\frac{5}{9}$ 公升 ④ $\frac{6}{9}$ 公升						
答題表現 選項分析	<hr/>						
	選 項	1	2	3	4	其他	答案：1
	<hr/>						
	選項率	0.32	0.16	0.30	0.21	0.00	
	<hr/>						
	高分組	0.42	0.09	0.36	0.13	0.00	
	低分組	0.27	0.25	0.27	0.22	0.00	
	<hr/>						
	<hr/>						

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.15，通過率為 0.32，試題難易度 0.34。

(二) 評量目標說明

本題是分數乘法問題，評量學生能否理解分數乘法意義，並熟練其計算，解決生活中的問題。

(三) 選項表現說明

1. 本題正確答案為選項①，通過率為 0.32，顯示三成二的學生已經掌握分數乘以整數的運算能力，且理解題意，知道是要求剩下的沙拉油量。

$$\frac{5}{6} \times (1 - \frac{2}{3}) = \frac{5 \times 1}{6 \times 3} = \frac{5}{18}$$

2. 有 30% 的學生選擇選項③，學生可能未注意題意要求，只求用去的多少的沙拉油，沒有進一步計算剩下的油。

$$\frac{5}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{5 \times 2}{6 \times 3} = \frac{5}{9}$$

3. 有 21% 的學生選擇選項④，學生可能有注意到題意是要求剩下的 $\frac{1}{3}$ 瓶沙油的量，但因學生未理解分數乘法的意義，分數相乘時，直接將分母相加、分子相加。

$$\frac{5}{6} \times (1 - \frac{2}{3}) = \frac{5}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{5+2}{6+3} = \frac{7}{9}$$

4. 有 16% 的學生選擇選項②，學生可能未理解題意，誤認為原沙拉油是 1 公升，求用去的多少的沙拉油，然後，直接用 1 公升減去用掉的油。

$$\frac{5}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{5 \times 2}{6 \times 3} = \frac{10}{18} \quad (\text{or } \frac{5}{9})$$

$$1 - \frac{10}{18} = \frac{8}{18}$$

(四) 學生表現說明

1. 本題命題的選項設計主要在檢測學生是否能理解題意，判斷題目中的單位分數(一瓶沙拉油的容量)及分數倍的單位數($\frac{2}{3}$ 瓶)，並能運用其概念解決分數乘法的兩步驟問題。
2. 本題的通過率雖然只有 32%，但選項①、選項③和選項②的作答有 78%，顯示有七成八的學生可能已經能進行連續量情境下，分數的分數倍的解題。但近三成的學生選答選項③，表示他們未理解題意要求解剩餘的沙拉油量，只算了用掉的沙拉油。依學生作答也發現，約有一成六的學生知道題意要求解剩餘沙拉油量，但不知道原沙拉油的總量並不是 1 公升。由本題也可以看見仍有二成一的學生，可能尚未理解分數乘法的意義，在分數的分數倍時，直接分子 1+分子 2 放分子位置，分母 1+分母 2 放分母位置。本題顯示部分學生未能在本情境題中掌握題目意涵而誤選答案，是教師可以加強的教學重點。

二、教材地位分析

97 課綱 (分年細目)

(一) 評量重點

5-n-08 能理解分數乘法的意義，並熟練其計算，解決生活中的問題。

(二) 先備的知識

1. 4-n-08 能認識真分數、假分數與帶分數，熟練假分數與帶分數的互換，並進行同分母分數的比較、加、減與整數倍的計算。
2. 5-a-01 能在具體情境中，理解乘法對加法的分配律，並運用於簡化計算。

(三) 延伸的知識

1. 5-n-09 能理解除數為整數的分數除法的意義，並解決生活中的問題。
2. 6-n-04 能理解分數除法的意義及熟練其計算，並解決生活中的問題。

十二年國教課綱（學習內容）

(一) 評量重點

N-5-5 **分數的乘法**：整數乘以分數、分數乘以分數的意義。知道用約分簡化乘法計算。處理乘積一定比被乘數大的錯誤類型。透過分數計算的公式，知道乘法交換律在分數也成立。

(二) 先備的知識

1. N-4-5 **同分母分數**：一般同分母分數教學（包括「真分數」、「假分數」、「帶分數」名詞引入）。假分數和帶分數之變換。同分母分數的比較、加、減與整數倍。
2. R-5-2 **四則計算規律（II）**：乘除混合計算。「乘法對加法的分配律」。將計算規律應用於簡化混合計算。熟練整數四則混合計算。

(三) 延伸的知識

1. N-5-7 **分數除以整數**：分數除以整數的意義。最後將問題轉化為乘以單位分數。
2. N-6-3 **分數的除法**：整數除以分數、分數除以分數的意義。最後理解除以一數等於乘以其倒數之公式。

三、教學建議

(一) 評量核心概念

分數乘以分數的問題

(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. 分數×整數

- (1) 真分數×整數時，和擴分的算法混淆，將分子和分母同乘以整數，例如： $\frac{2}{3} \times 5$
 $= \frac{2 \times 5}{3 \times 5} = \frac{10}{15}$ 。也有可能誤將分母乘以整數，例如：
 $\frac{2}{3} \times 5 = \frac{2}{3 \times 5} = \frac{2}{15}$ 。

- (2) 帶分數×整數時，只將帶分數的整數乘以倍數，例如： $1\frac{2}{3} \times 5 = 5\frac{2}{3}$ ；或只將帶分數的分子乘以倍數，例如： $1\frac{2}{3} \times 5 = 1\frac{10}{3}$ ；或誤將帶分數的整數、分子和分母全部乘以倍數，例如： $1\frac{2}{3} \times 5 = 5\frac{10}{15}$ 。

2. 整數×分數

- (1) 約分錯誤，誤將整數和分子約分，例如： $12 \times \frac{4}{5} = 12^3 \times \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$ 。
- (2) 受分數×分數的口訣「分子 1 乘以分子 2，分母 1 乘以分母 2」影響，誤將整數同乘以分母和分子，例如： $6 \times \frac{5}{7} = \frac{6 \times 5}{6 \times 7} = \frac{30}{42} = \frac{5}{7}$ ，結果計算的結果還是乘數 $\frac{5}{7}$ 。
- (3) 受整數乘法經驗影響，以為「乘積一定比被乘數大」。

(三)核心概念的教學重點

分數乘法的一般教學程序，依序是**分數乘以整數**、**整數乘以分數**，最後是**分數乘以分數**。學生較易背誦分數乘法法則，但對分數乘法概念的理解，會有難以理解的困境。避免學生只是背公式計算，例如做分數乘以整數時，使用口訣「整數乘以分數的分子」，為了避免落於只是數字符號的操弄而已，因此教師教學要特別著重概念性的理解，學生才能做有意義的計算。

教學活動要先複習四年級已經學過得真（假）分數的整數倍、單位分數的整數倍的題型，再進入到帶分數的整數倍的題型。分數計算的教學最好在一開始可以輔以圖形表徵以幫助學生理解分數四則運算的概念。

1. 分數乘以整數（倍）

真（假）分數乘以整數教學，可以從三個不同的概念導入，一個是套用分數的加法概念、一個是從單位分數的觀點切入、另一個是訴諸內容物的觀點引入，舉例如下：「一包糖果有 54 顆，一位小朋友分得 $\frac{2}{9}$ 包，3 位小朋友共分得幾包？」

- (1) **以同分母分數的連加活動解題**：題意是在問「3 個 $\frac{2}{9}$ 是多少？」也可說成「 $\frac{2}{9}$ 的 3 倍是多少？」，因此， $\frac{2}{9} \times 3 = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{2+2+2}{9} = \frac{2 \times 3}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ 。
- (2) **以單位分數為計數單位的方式解題**： $\frac{2}{9}$ 是 2 個 $\frac{1}{9}$ ，「2 個 $\frac{1}{9}$ 」的 3 倍，共是 2×3 個 $\frac{1}{9}$ ，6 個 $\frac{1}{9}$ 是 $\frac{6}{9}$ ， $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ 。所以， $\frac{2}{9} \times 3$ （分母 9、分子 2×3 ） $= \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ 。
- (3) **單位分數的內容物是整數個，訴諸內容物的解題策略**：學生可以算出一個小朋友分得 $\frac{2}{9}$ 包就是 12 顆，3 個小朋友共分得 36 顆，而 36 顆是把一包平分

成 9 份中的 6 份，或把一包平分成 54 份中的 36 份，而得到的結果是 $\frac{6}{9}$ 包
 $=\frac{36}{54}$ 包。在一開始接觸分數整數倍的情境提時，學生可以使用分數的原始
 意義和整數的乘法解題能力即可以進行解題。

- (4) **布題討論：**教師可以布不同的情境題給學生思考，再讓學生思考討論發現計
 算的法則，當分數乘以整數時，用整數去乘分數的分子得到的積當作新分
 子，而新分母仍是原分母： $\frac{b}{a} \times c = \frac{b \times c}{a}$ 。

學生通常喜愛一看到帶分數的乘法，立即將題目中的帶分數全部轉換為假分
 數處理計算，但時常是將計算過程變為更複雜。計算

$9\frac{1}{5} \times 4$ ，若學生採用的解題策略是帶分數轉換成假分數再來做乘法的運算，

$9\frac{1}{5} \times 4 = \frac{46}{5} \times 4 = \frac{46 \times 4}{5} = \frac{184}{5} = 36\frac{4}{5}$ ，可以清楚看見分子乘以整數

(46×4) 之後數字變大了，最後還要再轉為帶分數的繁雜計算，容易造成計
 算錯誤或計算沒有效率。為了簡便計算，如果學生直接採用分配律的概念解
 題，就會變得輕鬆許多，如

$$9\frac{1}{5} \times 4 = 9 \times 4 + \frac{1}{5} \times 4 = 36 + \frac{4}{5} = 36\frac{4}{5}。$$

2. 整數×分數(倍)：這是學生第一次接觸「分數倍」，可以從整數倍的情境開始，再
 自然帶入不到 1 倍的「分數倍」情境，「分數倍」即是「部分整體」的概念。例
 如：「一盒糖果有 12 顆 $\frac{1}{4}$ 盒是幾顆？」、「 $\frac{2}{4}$ 盒是幾顆？」、「 $\frac{2}{4}$ 盒是幾顆？」，
 以引導學生思考：因為不到 1 倍，所以乘積會小於被乘數。
3. 分數×分數(倍)：同前面分數乘以整數倍問題的延伸，但是因為變成分數倍，學生
 的理解變得困難。教師還可以利用「面積表徵」及「線段表徵」、字面意義的方式
 來幫助學生理解分數×分數(倍)的概念，以引導學生發現「分母乘以分母，分子乘
 以分子」的算則。

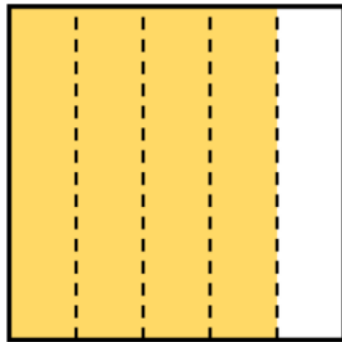
(1) 面積表徵

以面積的圖象表徵來幫助學生理解分數乘以分數倍的概念。例如：「一塊地有 $\frac{4}{5}$

公畝，其中的 $\frac{2}{3}$ 種玉米，請問種玉米的部份是幾公畝？」若把全部長方形面積

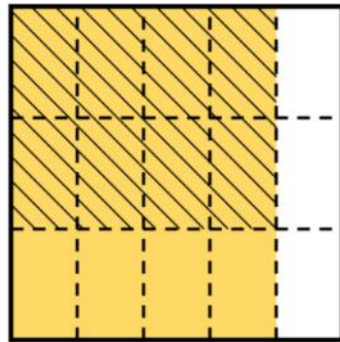
當作 1 公畝所以黃色部份面積即 $\frac{4}{5}$ 公畝，如【圖 26-1】；斜線部份種玉米： $\frac{4}{5}$

$\times \frac{2}{3}$ 公畝，如【圖 26-2】，所以種玉米的部份是 $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4 \times 2}{5 \times 3} = \frac{8}{15}$ 公畝。



全部面積：1 公畝

黃色部分： $\frac{4}{5}$ 公畝



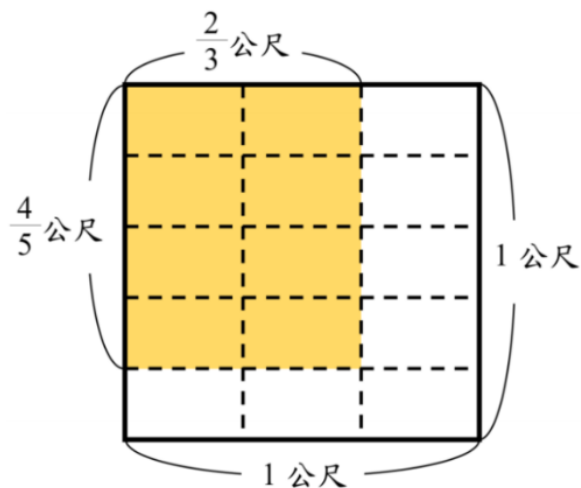
黃色部分： $\frac{4}{5}$ 公畝

斜線部分種玉米： $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$ 公畝

【圖 26-1】

【圖 26-2】

另一種面積表徵方式是在以邊長 1 公尺，面積為 1 平方公尺的正方形土地中，取一塊邊長只有 $\frac{4}{5}$ 公尺，及 $\frac{2}{3}$ 公尺的長方形土地，面積是多少平方公尺？

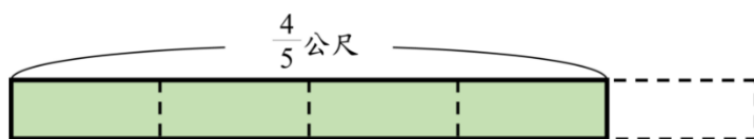


【圖 26-3】

如上【圖 26-3】，所以面積還是 $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4 \times 2}{5 \times 3} = \frac{8}{15}$ （平方公尺）。

(2) 線段表徵

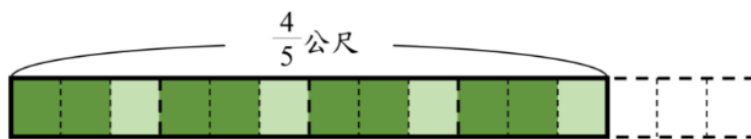
以線段的圖象表徵來幫助學生理解分數乘以分數倍的概念，例如：一條緞帶長 $\frac{4}{5}$ 公尺，如【圖 26-4】，剪下其中的 $\frac{2}{3}$ 做一個蝴蝶結，請問做蝴蝶結的緞帶長幾公尺？



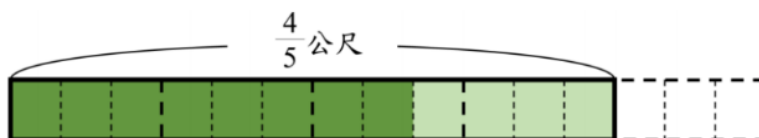
【圖 26-4】

每個 $\frac{1}{5}$ 皆取其中的 $\frac{2}{3}$ ，如【圖 26-5】，則做蝴蝶的緞帶長度即為深綠色長度的總和：

$$\left(\frac{1}{5} \times \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} \times \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} \times \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} \times \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{15}。$$



【圖 26-5】



【圖 26-6】

所以【圖 26-6】深綠色部份的總長度為 $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4 \times 2}{5 \times 3} = \frac{8}{15}$ 公尺。

(四)本題教學的加強重點

本題主要的教學重點是透過情境內容，先澄清題意，再引導學生如何解讀並處理分數的整數倍問題：

1. 先以面積的圖象表徵沙拉油的總量：本題情境內容，1 瓶沙拉油是 $\frac{5}{6}$ 公升，可以先將沙拉油分乘 6 等分，再取其中 5 分，如【圖 26-7】。

2. 再以面積的圖象表徵用去的沙拉油量：依題意說要用去 $\frac{2}{3}$ 瓶，也就是要其分成三份，用去二份，所以，用去的油就是 $\frac{5}{6}$ 公升的 $\frac{2}{3}$ 倍，用算式紀錄為

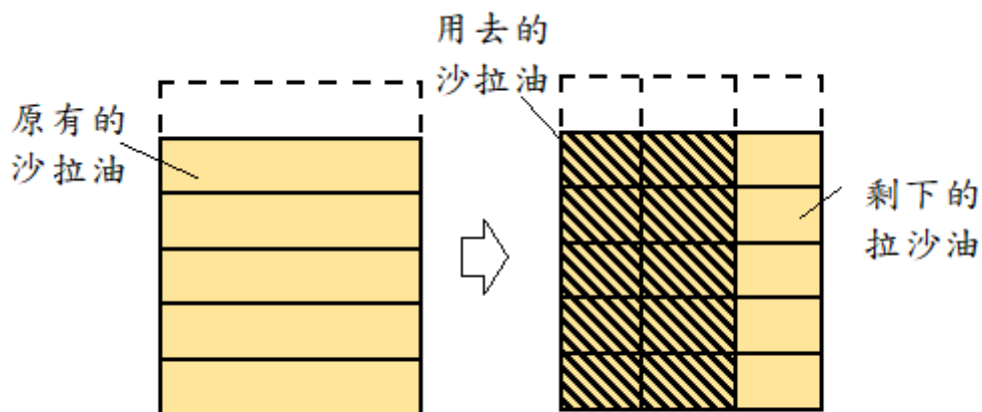
$$\frac{5}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{10}{18}。斜線塗色部分就是用去的沙拉油量，如【圖 26-8】。$$

3. 再透過題意澄清，以面積的圖象表徵要求解剩餘的沙拉油量：

(1)引導學生看清楚題目原有的沙拉油量為 $\frac{5}{6}$ 公升，現在用掉了 $\frac{10}{18}$ 公升，那麼剩下的沙拉油量就會是 $\frac{5}{6} - \frac{10}{18} = \frac{15}{18} - \frac{10}{18} = \frac{5}{18}$ 。

(2)也可以引導學生看澄清題目中用去 $\frac{2}{3}$ 瓶(斜線部分)，表示剩下為 $1 - \frac{2}{3} =$

$\frac{1}{3}$ 瓶(剩下無斜線部分)，而一瓶沙拉油有 $\frac{5}{6}$ 公升，剩下 $\frac{1}{3}$ 瓶，用算式紀錄為 $\frac{5}{6} \times (1 - \frac{2}{3}) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{18}$ 。



【圖 26-7】

【圖 26-8】

九、命題建議

- (一) 本題主要在評量學生能否理解分數乘法意義，並熟練其計算，解決生活中的問題。但選項的設計並未針對分數乘法常有的迷思概念來設計，導致多數學生其實可能理解分數乘法意義並進行計算，但僅是未能理解題意中求剩下的沙拉油造成選項錯誤。故建議未來評量設計時，應針對分數乘法的迷思，如設計答案選項為倒數相乘的答案，因為，在乘數為分數的教學中，學童認為「乘積一定比被乘數大」：

$$\frac{5}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{6} \times \frac{3}{2} = \frac{15}{12}。$$

- (二) 選項④主要評量學生可能因未理解分數乘法的意義，分數相乘時，直接將分母相加、分子也相加。但因為選項中，卻沒有 $\frac{7}{9}$ 的答案。

十、歷屆檢測試題參考

甲、 104 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

題目	「粉刷 1 面牆需要 2 桶油漆，媽媽想粉刷 $1\frac{1}{3}$ 面牆，需要 <u>多少桶油漆</u> ？」下列哪一個算式是 <u>錯誤</u> 的？					
	① $1\frac{1}{3} \times 2 = \frac{4}{3} \times 2$					
	② $1\frac{1}{3} \times 2 = 1 + \frac{1}{3} \times 2$					
	③ $1\frac{1}{3} \times 2 = (1 + \frac{1}{3}) \times 2$					
	④ $1\frac{1}{3} \times 2 = 1 \times 2 + \frac{1}{3} \times 2$					
答題表現 選項分析	選 項	1	2	3	4	其他 答案：2
	選項率	0.12	0.50	0.17	0.20	0.00
	高分組	0.02	0.87	0.05	0.05	0.00
	低分組	0.21	0.19	0.28	0.31	0.01

乙、 105 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

題目 ↴	下列哪一個算式的計算結果在 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{4}{6}$ 之間？ ↴					
	① $\frac{4}{6} \times \frac{6}{4}$ ↴					
	② $\frac{4}{6} \times \frac{4}{6}$ ↴					
	③ $\frac{1}{3} \times \frac{4}{6}$ ↴					
	④ $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$ ↴					
答題表現 ↴ 選項分析 ↴	選 項 ↴	1 ↴	2 ↴	3 ↴	4 ↴	其他 ↴ 答案：2 ↴
	選項率 ↴	0.09 ↴	0.41 ↴	0.29 ↴	0.20 ↴	0.00 ↴ ↴
	高分組 ↴	0.03 ↴	0.75 ↴	0.13 ↴	0.09 ↴	0.00 ↴ ↴
	低分組 ↴	0.15 ↴	0.18 ↴	0.40 ↴	0.28 ↴	0.00 ↴ ↴

丙、 106 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

題目	<p>綁一個蝴蝶結要用 $4\frac{3}{7}$ 公分的緞帶，全班共有 12 位小朋友，每人要綁一個蝴蝶結，老師要準備多長的緞帶？</p> <p>① $4\frac{36}{84}$ 公分</p> <p>② $9\frac{1}{7}$ 公分</p> <p>③ $48\frac{36}{84}$ 公分</p> <p>④ $53\frac{1}{7}$ 公分</p>				
答題表現 選項分析	<div> 選 項 1 2 3 4 其他 答案：4 </div> <hr/> <div> 選項率 0.08 0.08 0.29 0.53 0.00 </div> <hr/> <div> 高分組 0.02 0.02 0.11 0.86 0.00 </div> <div> 低分組 0.17 0.18 0.46 0.19 0.00 </div>				

第 27 題

知識向度	數與計算	認知向度	概念理解									
對應分年細目	5-n-14 能認識比率及其在生活中的應用。											
題目	在一場籃球比賽當中，投籃的數據如下：											
	<table><tr><td></td><td>投籃次數</td><td>投籃命中率</td></tr><tr><td>上半場</td><td>20 次</td><td>60%</td></tr><tr><td>下半場</td><td>15 次</td><td>40%</td></tr></table>				投籃次數	投籃命中率	上半場	20 次	60%	下半場	15 次	40%
		投籃次數	投籃命中率									
	上半場	20 次	60%									
	下半場	15 次	40%									
	下列敘述哪個 <u>錯誤</u> ？											
① 上半場投進 12 球												
② 下半場投不進的百分率為 60%												
③ 整場投進球數 > 整場投不進的球數												
④ 整場投籃命中率為 100%												
答題表現 選項分析	<hr/> <hr/>											
	選 項	1	2	3	4	其他	答案：4					
	<hr/> <hr/>											
	選項率	0.18	0.15	0.35	0.32	0.00						
	<hr/> <hr/>											
	高分組	0.05	0.04	0.32	0.59	0.00						
低分組	0.28	0.25	0.30	0.17	0.00							
<hr/> <hr/>												

一、 試題分析

（一） 數據解析

本題鑑別度為 0.42，通過率為 0.32，試題難易度 0.38。

（二） 評量目標說明

本題是比率與百分率的換算問題，評量學生是否能理解比率、百分率的意義，並能處理應用問題。

（三） 選項表現說明

- 只有 32% 的學生選擇正確選項④，顯示只有約 3 成的學生能理解比率概念並能解決生活問題，因此能正確計算及判斷本題和比率相關的描述：

(1)上半場進球數： $20 \times 60\% = 12$ （球），因此選項①正確；

(2)下半場投不進百分率： $1 - 40\% = 60\%$ ，因此選項②正確；

(3)整場進球數： $20 \times 60\% + 15 \times 40\% = 18$ ，整場不進球數： $20 + 15 - 18 = 17$ ，所以整場進球數(18)>整場不進球數(17)，因此選項③正確；

(4)整場投籃命中率：整場進球數÷整場投球數 $= 18 \div 35 \cong 51\%$ ，因此選項④錯誤。認為選項④正確的學生誤以為把上下半場的進球率相加即為整場命中率。學生對於上下半場的命中率和整場命中率的關係產生混淆。

2. 有 35% 的學生選擇選項③，這些學生可能無法正確計算百分率所表示的整場進球數及投不進球數，因此認為選項③錯誤。但學生也有可能是忽略題目所要求的選擇錯誤選項。
3. 有 18% 的學生選擇選項①，這些學生可能認為投籃次數 20 次即為進球數，也可能計算錯誤，所以認為選項①錯誤。但學生也有可能是忽略題目要求而選擇錯誤選項。
4. 有 15% 的學生選擇選項②，這些學生可能以為 60% 是上半場的投籃命中率或不了解命中率與不中率總和為 1 的概念，所以認為選項②錯誤。但學生也有可能是忽略題目所要求的選擇錯誤選項。

(四) 學生表現說明

1. 本題的命題設計，主要希望了解學生對於比率為部份量佔全體量的關係及兩個部份量的比率和為 1 的概念是否理解，並能應用比率概念解決生活問題。
2. 本題通過率為 32%。只有約 3 成的學生熟練比率與百分率的互換及其應用，但有約 7 成的學生對於比率與百分率的概念不夠清楚或容易產生迷思；也有可能沒有注意到本題為選擇錯誤選項的影響。有高達 35% 的學生選擇錯誤選項③，除了表示學生可能對比率與百分率應用不夠熟練外，複雜的多步驟計算及題目要求選擇「錯誤選項」也會增加學生的錯誤率。從高分組與低分組學生的表現來看，59% 的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生只有 17% 回答正確，其他錯誤選項有 83% 的低分組學生選擇。顯示低分組學生中有許多學生對於比率與百分率互換的概念並不了解，或者沒有注意到本題是要選擇錯誤選項，看到其中一個正確選項就選擇。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

（一）評量重點

5-n-14 能認識比率及其在生活中的應用（含「百分率」、「折」）。

（二）先備的知識

4-n-08 能理解等值分數，進行簡單異分母分數的比較，並用來做簡單分數與小數的互換。

（三）延伸的知識

6-n-09 能認識比和比值，並解決生活中的問題。

十二年國教課綱（學習內容）

（一）評量重點

N-5-10 解題：比率與應用。整數相除的應用。含「百分率」、「折」、「成」。

（二）先備的知識

N-4-6 等值分數：由操作活動中理解等值分數的意義。簡單異分母分數的比較、加、減的意義。簡單分數與小數的互換。

（三）延伸的知識

1. N-6-6 比與比值：異類量的比與同類量的比之比值的意義。理解相等的比中牽涉到的兩種倍數關係（比例思考的基礎）。解決比的應用問題。
2. N-6-8 解題：基準量與比較量。比和比值的應用。含交換基準時之關係。

三、教學建議

（一）評量核心概念

學生能理解百分率的意義，並處理應用問題。

（二）學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. 對於比率的概念不了解：比率表示的是部份佔全體的多少的關係，因此比率的值常小於 1 或等於 1，且 1 即代表全部。學生對於比率的概念不了解，因此不了解比率所代表的意義。
2. 對於比率的值的不同表示方式無法互相換算：比率可以用分數、小數及百分率的方式來表示，學生因為對比率的概念不了解，或對分數、小數之間的換算不熟悉，因此無法進行比率的不同表示方式之間的換算。
3. 不了解全體中不同部份量的比率總和為 1：若某班男生人數比率為 55%，女生人數比率則為 $1-55\%=45\%$ ，反之男女生人數之比率相加其和必為 1（100%）。
4. 當全體量不同時，容易混淆部份量所佔的比率：比率表示的是部份佔全體的多少的關係，因此當全體量不同時，部份量所佔的比率也會不同，如某班男生人數為 15 人，佔全班的比率、佔全五年級男生的比率及佔五年級總人數的比率都會不同。
5. 不了解打折的意義：學生不了解打七五折的意義是付給定價 75% 的價錢，不能讀作「七十五折」。
6. 不了解加成的意義：學生對於加成是指在全體量之外，加上一定比率的價錢的意思並不了解。

（三）核心概念的教學重點

1. 從生活情境中了解比率的意義：比率代表的是「部份量佔全體量」的關係。可從生活中常見的比率情境及用語連結到比率概念的學習，如：近視不良率（近視人數佔總人數的比率）、打擊率（安打數佔總打數的比率）、投籃命中率（進籃球數佔總投球數的比率）、得票率（得票數佔總投票數的比率）…等生活情境來讓學生學習及理解比率的意義。
2. 比率不同的表示方式

- (1) **以分數表示：**比率是部份量佔全體量的關係，因此可以連結分數概念以分數表示。如：「小明投籃投了 20 球，進了 12 球，小明投中的比率（命中率）是多少？」小明投中的比率： $\frac{12 \text{ (投中球數)}}{20 \text{ (總投球數)}} = \frac{3}{5}$ 。
- (2) **以小數表示：**比率是部份量佔全體量的關係，也可以用包含除的關係來列式。如：小明投籃投了 20 球，進了 12 球，小明投中的比率（命中率）是多少？小明投中球數，是總投球數的幾倍： $12 \div 20 = 0.6$ 。
- (3) **以百分率表示：**比率以分數或小數的方式計算出來之後，再轉化百分率的表示方式。如：小明投籃投了 20 球，進了 12 球，小明投中的比率（命中率）是多少？
- 方法一： $\frac{12 \text{ (投中球數)}}{20 \text{ (總投球數)}} = \frac{3}{5} = \frac{60}{100} = 60\%$ ，
- 方法二： $12 \div 20 = 0.6$ ， $0.6 \times 100\% = 60\%$ 。（ $100\% = \frac{100}{100}$ ）

另外教師還可以引導學生觀察發現：比率用百分率的方式表示時，分母皆為 100，最容易比較及計算不同的比率。

3. **不同類量的比率總合為 1：**連結生活情境讓學生理解不同類量的比率總合為 1 的概念。如：小明投籃投了 20 球，進了 12 球，小明的投球命中率是 $12 \div 20 \times 100\% = 60\%$ ；小明的沒投進的球為 8 球，小明的不中球率為 $8 \div 20 \times 100\% = 40\%$ 。進球率和不進球率的總和為 1（ $\frac{100}{100}$ ）。
4. **當全體量不同時，部份量所佔的比率亦不同：**連結生活情境讓學生理解當全體量不同時，部份量所佔的比率亦不同。如：五年一班男生人數 13 人，佔全班人數、全五年級男生人數及全五年級總數的比率因為全體量不同，所以所佔比率也隨著改變(如下表)。讓學生理解比率的意義和確認全體量是多少的重要性。

	全班人數	全五年級男生人數	全五年級總人數
	25	65	120
五年一班男生所佔比率	$\frac{12}{25} = 0.48 = 48\%$	$\frac{12}{65} \approx 0.18 = 18\%$	$\frac{12}{120} = 0.1 = 10\%$

5. 打折的意義

- (1) 透過生活情境讓學生了解打折、折扣的意義、計算方式和生活應用。如：「書店全面七折」的意思是售價以定價的十分之七計價，若 200 元的書，則需付 $200 \times \frac{7}{10} = 140$ （元）。由分數的概念切入學生較容易了解打折的意思，再帶入「七五折」即乘以 $\frac{75}{100}$ 、75%。打七五折的書只要付 $200 \times 75\% = 150$ （元）；反之，打七五折即節省了 $1 - 75\% = 25\%$ ， $200 \times 25\% = 50$ （元）。
- (2) **國外折扣的表示方式：**打七五折在國外的表示方式為「25% off」，因為生

活中(如百貨公司的標示)也很常見,教師可作為教學目標但不宜列入評量。

6. **加成的意義**：教師可結合日常生活中的加成經驗讓學生理解加成的意義，如：「到餐廳點了 600 元的餐點，用餐完結帳時，要付給餐廳餐點費及加一成的服務費，共要付多少錢？」

$$600 \times (1 + 10\%) = 600 + 60 = 660 \text{ (元)}。$$

7. **連結一維、二維表格佈題**：可以讓學生更容易理解部份量和全體量的關係，也可以連結比率(分數、小數)和百分率的換算，如：

	男生	女生	合計
人數	14	11	25
比率(小數)	0.56	0.44	1
比率(分數)	$\frac{14}{25}$	$\frac{11}{25}$	1
百分率	56%	44%	100%

(四) 本題教學的加強重點

1. **使用二維表格的解題策略**：可以讓學生更清楚看出部份量和全體量的關係，也更容易理解整場投籃命中率的算法，避免產生迷思，如下表：

	進球次數	投籃次數	投籃命中率
上半場	(12)	20	60%
下半場	(6)	15	40%
合計	(18)	(35)	約(51%)

2. **使用二維表格的解題策略**：可以讓學生更清楚看出不同部份量的比率總和為 1，如下表：

	進球次數	不進球次數	投籃次數
上半場	(12)	(8)	20
和總投籃次數的比率	$\frac{12}{20} = 60\%$	$\frac{8}{20} = 40\%$	$\frac{20}{20} = 100\%$

四、 命題建議

- (一) 本題答對率只有 32%，根據試題分析可能原因之外，最重要的原因是學生對於上下半場的命中率和整場命中率的關係產生混淆，即學生對於全體量改變時，部份量所佔的比率也會跟著改變的概念理解及應用較不熟悉，和 106 學年度的命題全體量是固定的不同。
- (二) 評量時需檢測學生對於比率的意義是否真正了解，因此在選項的設計上會放入學生容易產生迷思的地方，如本題選項④「整場投籃命中率为 100%」即在檢測學生是否真正了解整場投籃命中率應為整場投球數÷整場中球數的比率，而不是看到兩個命中率就直接相加，表示學生不理解比率的意義；如下列第 2 題(106 檢測題)的錯誤選項④則在檢測學生是否了解比率差的意義。

- (三) 102-103 學年度的打折問題答對率只有 3-4 成，學生對於將原價及折扣價轉換為比率的算法及折的語言並不熟悉，故題目可再簡化，因為五年級剛開始學習比率概念，較有變化的題目可以放在六年級。

五、歷屆檢測題參考

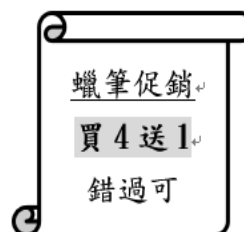
(一) 102 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

題 目	31.(4)便利商店定價 10 元的關東煮買 4 送 1，小讚買了 4 個關東煮送 1 個，相當於總價打幾折？ ①2 折②2.5 折③5 折④8 折							
	區 域	答對率	難易度	鑑別度	答①%	答②%	答③%	答④%
	全市	0.4	0.46	0.56	20.18	18.88	18.48	40.21
	高分組				9.9	9.9	6.3	73.9
	低分組				28.8	25.58	27.53	18.09

(二) 103 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

題 目	26.(2)四位小朋友比賽投籃， <u>甲投 5 次命中 1 球</u> ， <u>乙投 10 次命中 3 球</u> ， <u>丙投 20 次命中 5 球</u> ， <u>丁投 25 次命中 6 球</u> ，誰的命中率最高？ ① 甲 ② 乙 ③ 丙 ④ 丁							
	區 域	答對率	難易度	鑑別度	答①%	答②%	答③%	答④%
	全市	0.61	0.57	0.65	8.54	60.67	14	13.21
	高分組				1.34	89.81	6.77	2.07
	低分組				20.25	24.82	21.52	33.42

題 目	29.(4)蠟筆一盒 30 元，老師只需要買 20 盒蠟筆當獎品。下圖是某文具店的最新促銷活動，這家店的蠟筆促銷折扣是多少？ ① 打二折 ② 打二五折 ③ 打七五折 ④ 打八折							
	區 域	答對率	難易度	鑑別度	答①%	答②%	答③%	答④%
	全市	0.32	0.38	0.32	13.39	28.4	22	32.08
	高分組				9.5	21.39	15.43	53.67
	低分組				19.36	31.03	27.82	21.8



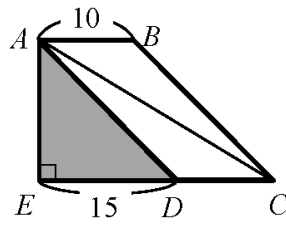
(三) 104 年協助縣市辦理學生學習能力檢測--五年級數學試題(國教院)

題目	下列算式何者 <u>不正確</u> ？					
	① $\frac{4}{10}=40\%$					
	② $27.5\%=0.275$					
	③ $\frac{1}{4}=25\%$					
	④ $0.01=10\%$					
古典理論 (CTT) 選項分析	-----					
	選 項	1	2	3	4*	
	選項率	0.1	0.08	0.12	0.67	通過率：0.67
	高分組	0.02	0.02	0.01	0.95	鑑別度：0.64
	低分組	0.16	0.15	0.28	0.31	

(四) 106 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

題目	昆蟲國小今年飼養蝴蝶 300 隻，其中 60%是樺斑蝶，其餘是無尾鳳蝶。下列敘述何者 <u>錯誤</u> ？ ① 無尾鳳蝶的數量比樺斑蝶少 ② 無尾鳳蝶數量占蝴蝶飼養總量的 $\frac{2}{5}$ ③ 平均每 100 隻蝴蝶中有 60 隻是樺斑蝶 ④ 無尾鳳蝶與樺斑蝶的數量相差 20 隻						
答題表現 選項分析	選 項	1	2	3	4	其他	答案：4
選項率		0.09	0.13	0.20	0.58	0.00	
高分組		0.01	0.05	0.09	0.85	0.00	
低分組		0.20	0.30	0.21	0.29	0.00	

第 28 題

知識向度	幾何	認知向度	解題思考																												
對應分年細目	5-s-05 平行四邊形及三角形複合圖形面積的問題。																														
題目	<p>有一個平行四邊形 ABCD (如下圖)，三角形 ACD 面積是 60 平方公分，灰色三角形 ADE 的面積是多少平方公分？</p> <div></div> <p>(單位：公分)</p> <p>① 45 平方公分 ② 60 平方公分 ③ 90 平方公分 ④ 180 平方公分</p>																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：3</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.19</td><td>0.21</td><td>0.42</td><td>0.18</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.11</td><td>0.10</td><td>0.66</td><td>0.13</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.24</td><td>0.27</td><td>0.25</td><td>0.24</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：3	選項率	0.19	0.21	0.42	0.18	0.00		高分組	0.11	0.10	0.66	0.13	0.00		低分組	0.24	0.27	0.25	0.24	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：3																									
選項率	0.19	0.21	0.42	0.18	0.00																										
高分組	0.11	0.10	0.66	0.13	0.00																										
低分組	0.24	0.27	0.25	0.24	0.00																										

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.41，通過率為 0.42，試題難易度 0.46。

(二) 評量目標說明

本題旨在測驗學童是否能從圖形的切割重組進行平行四邊形及三角形面積的計算。。

(三) 選項表現說明

1. 本題僅約 42%的學生選擇正確選項③，顯示許多學生對於平行四邊形及三角形進行切割或重組的複合圖形概念並未完全掌握。

2. 有 21.03%的學生選擇選項②，這些學生認為三角形 ADE 和三角形 ACD 是相同的三角形，未注意到題目所給的三角形 ADE 的底邊長是 15 公分，三角形 ACD 的底邊長是 10

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.41，通過率為 0.42，試題難易度 0.46。

(二) 評量目標說明

本題旨在測驗學童是否能從圖形的切割重組進行平行四邊形及三角形面積的計算。。

(三) 選項表現說明

1. 本題僅約 42% 的學生選擇正確選項③，顯示許多學生對於平行四邊形及三角形進行切割或重組的複合圖形概念並未完全掌握。
2. 有 21.03% 的學生選擇選項②，這些學生認為三角形 ADE 和三角形 ACD 是相同的三角形，未注意到題目所給的三角形 ADE 的底邊長是 15 公分，三角形 ACD 的底邊長是 10

公分，因此選擇選項②。

3. 有 18.9% 的學生選擇選項①，這些學生利用三角形面積反推求高時，未留意三角形面積的計算方法是「底 \times 高 $\div 2$ 」，直接認為 $60 \div 10 = 6$ 所求出的 6 公分即是高，忘記必須將 6 再乘以 2 得到 12 公分才是三角形 ACD 及三角形 ADE 高的長度。但計算三角形 ADE 的面積時，又直接將 6 公分當作高，帶入三角形面積的計算方法「底 \times 高 $\div 2$ 」得到面積是 45 平方公分，而選擇選項①。
4. 有 18.1% 的學生選擇選項④，這些學生利用三角形面積反推求高時，正確求出三角形 ACD 及三角形 ADE 高的長度是 12 公分。但計算三角形 ADE 的面積時，直接計算 $15 \times 12 = 180$ ，忘記 180 必須除以 2 得到 90 平方公分才是正確的面積。直接將 180 平方公分當作三角形 ADE 的面積，而選擇選項④。

(四) 學生表現說明

1. 本題的命題設計中，希望學生除了能理解三角形面積公式的由來之外，對於利用三角形面積公式反推求高或求底的長度時，必須注意除以 2 的意義是什麼？進而反推求高或求底的長度時，才能注意到必須乘以 2，所求出的長度才是真正的高或底的長度。
2. 本題難易度為 0.46。只有將近 4 成 2 的學生通過。低分組的學生中未選擇正確選項的學生將近 75%，高分組的學生亦高達 60% 為選擇正確選項③，表示這些學生對於利用三角形面積公式直接求面積均有相當的熟練度，但遇到利用三角形面積公式反推求高或求底的長度時，掌握度則有待加強。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

(一) 評量重點

5-s-05 平行四邊形及三角形複合圖形面積的問題。（同 5-n-18）。

(二) 先備的知識

1. 4-n-18 能理解長方形和正方形的面積公式與周長公式。
2. 4-s-07 能認識平行四邊形和梯形。

(三) 延伸的知識

6-s-05 能理解簡單直柱體的體積為底面積與高的乘積。

十二年國教課綱（學習內容）

(一) 評量重點

S-5-2 三角形與四邊形的面積：操作活動與推理。利用切割重組，建立面積公式，並能應用。

(二) 先備的知識

1. N-3-14 面積：「平方公分」。實測、量感、估測與計算。
2. S-4-3 正方形與長方形的面積與周長：理解邊長與周長或面積的關係，並能理解其

公式與應用。簡單複合圖形。

3. S-4-7 三角形：以邊與角的特徵認識特殊三角形並能作圖。如正三角形、等腰三角形、直角三角形、銳角三角形、鈍角三角形。

(三) 延伸的知識

S-6-4：柱體體積與表面積：含角柱和圓柱。利用簡單柱體，理解「柱體體積 = 底面積 \times 高」的公式。簡單複合形體體積。

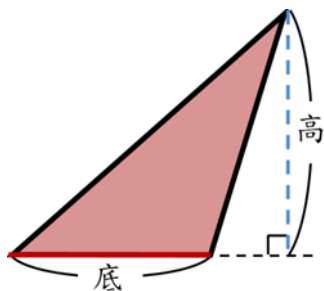
三、教學建議

(一) 評量核心概念

由實際切割重組中，認識三角形的面積公式 = (底 \times 高) $\div 2$ 。

(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. 無法利用三角形面積公式反推求高或底：三角型的面積公式為「底 \times 高 $\div 2$ 」，如果只求三角形面積時，學生較容易利用三角型的面積公式求出三角形面積。但反推求高或底時，常常忘記要 $\times 2$ ，才能求出正確的高或底。
2. 無法找出在三角形外的高：學生遇到求三角形面積時，對於如何畫出三角形的高不是很清楚。如果可以從頂點順利做垂直線段到底邊，便能找出三角形的高。但如果是如【圖 1】的三角形，便無法找出三角形的高，因此也無法順利求出三角形的面積。



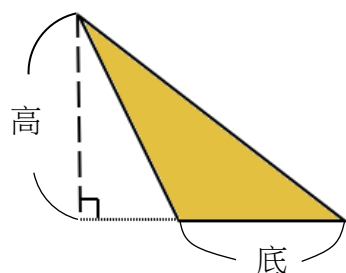
【圖 1】

(三) 核心概念的教學重點

1. 國小五年級的學生，對於平行四邊形面積公式的由來及意義應該較易熟悉。一般來說，可以利用切割及拼湊的方式將三角形，變形成平行四邊形後導出三角形面積公式，並探討如何找出三角形的高及底。
2. 接下來可分為兩個面向探討：
 - (1) 知道面積及其中一個底邊長度如何找出對應的高及其長度。
 - (2) 底或高其中一個固定另一個改變後，面積會如何改變及其之間的關係。
3. 知道面積及其中一個底邊長度如何找出對應的高及其長度：

學生知道三角形的面積公式為「底 \times 高 $\div 2$ 」，和學生探討利用已知的面積和底邊的長度求出對應高的長度。如【圖 2】，如果知道三角形的面積及底邊的長度必

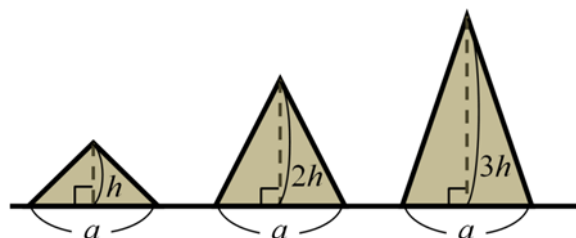
須知道要將三角形的面積先 $\times 2$ ，找出由兩個相同的三角形所拼成的平行四邊形面積。



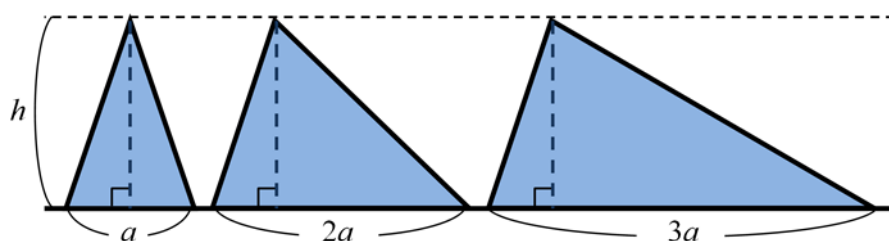
【圖 2】

4. 底或高其中一個固定另一個改變後，面積會如何改變及其之間的關係：

學生知道三角形的面積公式為「底 \times 高 $\div 2$ 」之後，再和學生探討當三角形的底不變，高增加幾倍，三角形的面積就會變為原來面積的幾倍，如【圖 3】，三角形的高不變，底增加幾倍，三角形的面積就會變為原來面積的幾倍。如【圖 4】。



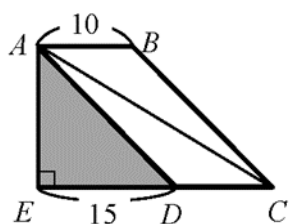
【圖 3】



【圖 4】

(四) 本題的教學重點

1. 讓學生回想三角形面積的計算公式為（底 \times 高） $\div 2$ 。
2. 引導學生觀察找出本題中三角形 ACD 中如果以邊 CD 為底邊所找出的高和三角形 ADE 以邊 DE 為底邊所找出的高二者之間的關係。發現邊 AE 是兩個三角共同的高。



3. 引導學生發現三角形 ACD 中底邊 CD 的長度和邊 AB 的長度相同都是 10 公分。

4. 因為三角形 ACD 面積是 60 平方公分。因此可由三角形面積的計算公式（底 \times 高） $\div 2$ 反推求出高的長度。
5. 因此高的長度為 $60 \times 2 \div 10 = 12$ ，再利用三角形面積的計算公式求出三角形 ADE 的面積為 $15 \times 12 \div 2 = 90$ 平方公分。

四、 命題建議：

- 老師可以改為給予平行四邊形 ABCD 的面積後，讓學生求出三角形 ADE 或梯形 ABCE 的面積
- 亦可改為給予三角形 ADE 的面積後，讓學生求出平行四邊形 ABCD 的面積。

五、 歷屆試題：

（一）國家教育研究院 2014 年協助縣市辦理學生學習能力檢測—國小五年級數學科 試題

7. 平行四邊形甲的底是 6 公分，高是 4 公分，平行四邊形乙的底是甲的 2 倍，高是甲的 3 倍，請問平行四邊形乙的面積為甲的多少倍？
 ① 2 ② 3 ③ 5 ④ 6

答題表現
選項分析

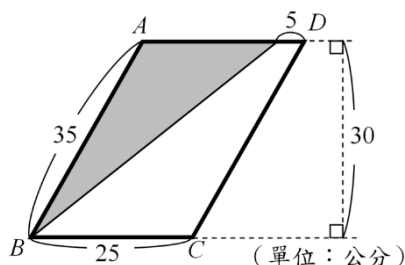
選項	1	2	3	4	其他	答案：4
選項率	0.07	0.07	0.12	0.72	0.00	
高分組	0.01	0.00	0.02	0.97	0.00	
低分組	0.17	0.20	0.26	0.36	0.01	

（二）國家

教育研究院 106 年協助縣市辦理學生學習能力檢測國一小五年級數學科
試題

9. 一個平行四邊形 ABCD 中，灰色三角形(如下圖)的面積是多少平方公分？

- 300 平方公分
- 350 平方公分
- 600 平方公分
- 700 平方公分



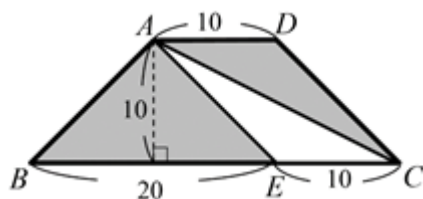
答題表現
選項分析

選項	1	2	3	4	其他	答案：1
----	---	---	---	---	----	------

選項率	0.34	0.31	0.18	0.17	0.00
高分組	0.61	0.22	0.12	0.06	0.00
低分組	0.16	0.35	0.24	0.26	0.00

(三) 新北市 106 學年度學生能力檢測五年級數學試題

21. 有一個梯形 ABCD(如下圖)，灰色部分的面積是多少平方公分？



(單位：公分)

- ① 100 平方公分 ② 150 平方公分
③ 300 平方公分 ④ 350 平方公分

選項	1	2	3	4	其他 答案：2
選項率	0.12	0.64	0.16	0.08	0.00
高分組	0.04	0.91	0.03	0.02	0.00
低分組	0.21	0.31	0.31	0.17	0.00

