

新北市 107 學年度國小數學檢測非選擇題學生解題分析及教學建議報告

一、試題內容及評閱規準：

分年細目	5-n-02 能在具體情境中，解決三步驟問題，並能併式計算。	知識向度	程序執行
評量內涵	以併式的記法紀錄並解決加、減、乘三步驟問題。	認知層次	理解
試題內容	<p>老師出了一個數學題目：「飲料店周年慶特價，水果茶、珍珠奶茶每杯都是 28 元，媽媽買了 12 杯水果茶、8 杯珍珠奶茶，付了 600 元找回多少元？」</p> <p>全班討論的做法如下：</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 10px 0;"> $12 + 8 = 20 \text{ (杯)}$ $28 \times 20 = 560 \text{ (元)}$ $600 - 560 = 40 \text{ (元)} \quad \text{答：找回 40 元}$ </div> <p>小萱將全班討論的做法用一個算式記成：</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 10px 0;"> $600 - 28 \times 12 + 8 = 40$ <p style="text-align: right;">答：找回 40 元</p> </div> <p>你覺得小萱的算式正確嗎？為什麼？把你的想法寫下來。</p> <p>作答欄：</p> <div style="display: flex; border: 1px solid black; height: 100px; margin-top: 10px;"> <div style="flex: 1; border-right: 1px solid black; padding: 10px;"> <p>(1) 小萱的算式正確嗎？</p> </div> <div style="flex: 1; padding: 10px;"> <p>(2) 我的想法：</p> </div> </div>		
評閱規準	類別	評閱說明	評閱舉隅
	2A	能正確判斷小萱錯誤，且說明併式紀錄中先算的用括號標示。	<p>小萱不正確，說明算式中 $12+8$ 少加了括號，或者直接在算式中加上括號表示。</p> $600 - 28 \times (12 + 8) = 40$ <p>認為只算了 12 杯奶茶的價錢，所以 8 杯奶茶也要乘以 28 元，並在先算的部份加上括號。</p> $600 - (28 \times 12 + 28 \times 8) = 40$

	2B	能正確判斷 <u>小萱</u> 錯誤，並從情境題意檢視併式記法的合理性	<u>小萱</u> 不正確，算式中的 8 是 8 杯，單位不一樣 $600-28\times 12+8=40$
	2C	能正確判斷 <u>小萱</u> 錯誤，說明理由是將錯誤的算式答案計算出來，察覺答案不符合。	<u>小萱</u> 不正確，因為 $600-28\times 12+8$ $=600-336+8$ $=272$ 。 272 和答案的 40 不一樣。
	2X	答題正確，但不屬於上述 2A、2B、2C 類型	
	1A	能正確判斷併式有誤，說明先算的要加括號，但未說明加在哪裡理或加括號的位置錯誤，抑或是計算錯誤。	<u>小萱</u> 不正確，認為先算的要加括號，但括號加錯地方 $600-(28\times 12+8)=40$
			<u>小萱</u> 不正確，將算式重新計算時答案錯誤 $12+8=20$ $600-(28\times 20)=42$
	1B	能正確判斷併式有誤，但說明先乘除後加減……等口訣。	<u>小萱</u> 不正確，說明先乘除後加減，先算的要加括號，但未標註括號加在哪裡。
	1C	能正確判斷併式有誤，但未說明理由或理由錯誤、不完整。	<u>小萱</u> 不正確，理由不完整或錯誤
	1X	無法判斷併式有誤，但說明理由正確	能將先算的正確用括號表示，但判斷 <u>小萱</u> 算式正確。 將算式 $28\times 12+8$ 改成 $(12+8)\times 28$ 重新計算後答案相同
	0A	認為併式正確，且說明理由不清楚。	<u>小萱</u> 正確，說明先算出總杯數再算價錢，才能找回多少錢。
	0B	認為併式正確，且理由錯誤。	<u>小萱</u> 正確，將算式重算一次，且計算錯誤 $12+8\times 28=560$ $600-560=20$
			<u>小萱</u> 正確，認為二個答案都一樣
	0X	未判斷算式是否正確，且說明理由錯誤	判斷欄和想法欄都填 40
	99	空白	

二、評閱結果：

(一)本題學生作答情形

類型	2			1				0				合計
	2A	2B	2C	1A	1B	1C	1X	0A	0B	0X	99	2897 人
人數	1076	67	197	298	299	432	25	53	232	143	75	
百分比 (%)	37.1	2.3	6.8	10.3	10.3	14.9	0.9	1.8	8.0	4.9	2.7	
人數	1340			1054				503				
百分比 (%)	46.2			36.4				17.4				

依據上表學生作答情形來看，2 分類型的學生不到五成，近四成的學生為 1 分類型，另有近二成的學生為 0 分類型。2 分類型的學生占 46.25%，約八成的學生能正確判斷併式紀錄有錯誤，指出先算的部分要加括號且括號標示位置正確；約有一成的學生將併式紀錄重新再計算一次算出答案後再判斷併式錯誤；另有不到一成的學生從情境題意檢視併式紀錄的合理性。

1 分類型的學生占 36.38%，約八成學生能判斷併式錯誤，但大部分未將理由敘寫清楚或敘寫的理由錯誤。其中一成的學生回答要加括號，但括號的位置錯誤；另有一成的學生只以「先乘除後加減」等口訣做說明；另有不到一成的學生將併式紀錄中的括號正確標示出來，但是在判斷併式時卻回答算式正確。

至於 0 分類型的學生占 17.36%，大多以答案都是 40 做說明，而判斷算式為正確，另有少部分學生判斷算式正確的理由是因為小萱有合併算式。

(二) 學生答題類型分析

得分	類型	解題範例(學生作答照片)	解題類型分析
2	2A		<p>能正確判斷<u>小萱錯誤</u>，指出併式紀錄中 $12+8$ 少了括號，或者直接在算式中加上括號表示。</p> $600 - 28 \times (12 + 8) = 40$ <p>或者</p> $600 - (28 \times 12 + 28 \times 8)$
	2B		<p>能正確判斷<u>小萱錯誤</u>，並從情境題意檢視併式後算式的合理性</p> <p>(1)算式中的8是8杯，單位不一樣</p> <p>(2)算式中沒有算到8杯珍珠奶茶的價錢。</p>
	2C		<p>能正確判斷<u>小萱錯誤</u>，將併式的答案計算出來，察覺答案不符合。</p> $600 - 28 \times 12 + 8$ $= 600 - 336 + 8$ $= 272$

1	1A	<p>你覺得小萱的算式正確嗎？為什麼？把你的想法寫下來。</p> <p>作答欄：</p> <div> <div>(1) 小萱的算式正確嗎？ 不正確</div> <div>(2) 我的想法： 因為他沒有把 $28+12+8$ 用括號括起來 $600-(12+8 \times 28)=40$</div> </div>	<p>小萱不正確，認為先算的要加括號，但括號加錯地方 $600-(12+8 \times 28)=40$</p>
		<p>作答欄：</p> <div> <div>(1) 小萱的算式正確嗎？ 不正確</div> <div>(2) 我的想法： $28 \times (12+8)-600=40$</div> </div>	<p>小萱不正確，重新將算式修正後依然錯誤 $28 \times (12+8)-600=40$</p>
	1B	<p>作答欄：</p> <div> <div>(1) 小萱的算式正確嗎？ 不對</div> <div>(2) 我的想法： 因為要先乘除再加減。</div> </div>	<p>能正確判斷併式有誤，但說明「先乘除後加減」……等口訣。</p>
	1C	<p>(1) 小萱的算式正確嗎？ 不對</p> <p>(2) 我的想法： 因為 $+8$ 是等於加 8 元或 8 杯的意思，應該 算 $600-(28 \times 12)+(28 \times 8)=40$</p> <p>作答欄：</p> <div> <div>(1) 小萱的算式正確嗎？ 不正確。</div> <div>(2) 我的想法： 因為像她那樣算，就和原來的意思不同了。</div> </div>	<p>(1) 能正確判斷併式有誤，但誤將二個括號中間的符號寫成加法 $600-(28 \times 12)+(28 \times 8)$</p> <p>(2) 能正確判斷併式有誤，說明理由不清楚，認為併式後和原來的意思不同。</p>
	1X	<p>你覺得小萱的算式正確嗎？為什麼？把你的想法寫下來。</p> <p>作答欄：$600-(12+8) \times 28=600-460=40$ 元</p> <div> <div>(1) 小萱的算式正確嗎？ A: 正確</div> <div>(2) 我的想法： $600-(12+8) \times 28=600-460=40$ 元</div> </div>	<p>能將先算的正確用括號表示出來，但判斷小萱算式正確。</p>

		<p>你覺得小萱的算式正確嗎？為什麼？把你的想法寫下來。</p> <p>作答欄： 正確， $600 - (28 \times 12 + 28 \times 8)$</p> <table><tr><td>(1) 小萱的算式正確嗎？</td><td>(2) 我的想法：</td></tr><tr><td>正確</td><td>$600 - (28 \times 12 + 28 \times 8)$</td></tr></table>	(1) 小萱的算式正確嗎？	(2) 我的想法：	正確	$600 - (28 \times 12 + 28 \times 8)$	
(1) 小萱的算式正確嗎？	(2) 我的想法：						
正確	$600 - (28 \times 12 + 28 \times 8)$						
0	0A	<table><tr><td>(1) 小萱的算式正確嗎？</td><td>(2) 我的想法：</td></tr><tr><td>對</td><td>可以把 $(12+8) = 20$, 再用 $28 \times 20 = 560$ 600 減 560 就算 = 40</td></tr></table>	(1) 小萱的算式正確嗎？	(2) 我的想法：	對	可以把 $(12+8) = 20$, 再用 $28 \times 20 = 560$ 600 減 560 就算 = 40	認為併式正確，說明理由是將三步驟的運算次序再說明一次。
	(1) 小萱的算式正確嗎？	(2) 我的想法：					
	對	可以把 $(12+8) = 20$, 再用 $28 \times 20 = 560$ 600 減 560 就算 = 40					
	0B	<table><tr><td>(1) 小萱的算式正確嗎？</td><td>(2) 我的想法：</td></tr><tr><td>正確</td><td>因為答案都對</td></tr></table>	(1) 小萱的算式正確嗎？	(2) 我的想法：	正確	因為答案都對	認為答案都一樣，判斷小萱算式正確，
(1) 小萱的算式正確嗎？	(2) 我的想法：						
正確	因為答案都對						
		<table><tr><td>(1) 小萱的算式正確嗎？</td><td>(2) 我的想法：</td></tr><tr><td>40</td><td>40</td></tr></table>	(1) 小萱的算式正確嗎？	(2) 我的想法：	40	40	二個填答欄都寫 40
(1) 小萱的算式正確嗎？	(2) 我的想法：						
40	40						
	0X	<table><tr><td>小萱的算式正確嗎？</td><td>(2) 我的想法：</td></tr><tr><td>正確</td><td></td></tr></table>	小萱的算式正確嗎？	(2) 我的想法：	正確		認為小萱算式正確，但未寫理由
小萱的算式正確嗎？	(2) 我的想法：						
正確							
		<p>作答欄：</p> <table><tr><td>(1) 小萱的算式正確嗎？</td><td>(2) 我的想法：</td></tr><tr><td>正確</td><td>因為他只是把算式合併了。</td></tr></table>	(1) 小萱的算式正確嗎？	(2) 我的想法：	正確	因為他只是把算式合併了。	小萱有把算式合併，所以判斷算式正確。
(1) 小萱的算式正確嗎？	(2) 我的想法：						
正確	因為他只是把算式合併了。						

1. 學生正確的多元解題策略：

從 2 分類型中，可看出學生不同的解題思考，大致上可分為三個面向：

- (1) 大部分學生能觀察三步驟算式與併式記法之間的關係，正確判斷小萱的併式錯誤，說明理由先算的要用括號標示，且將括號標示在正確的位置。
- (2) 少部分學生將併式重新計算一次算出答案 272，察覺與三步驟所呈現的答案 40 不同，以此做為判斷算式的錯誤。
- (3) 另有極少數學生從情境題意中檢視併式記法的合理性，認為 $600 - 28 \times 12 + 8 = 40$ 算式中 $+8$ 的單位為「杯」不符合題意，或者認為小萱的併式中少算 8 杯的錢，並且將算式修正成 $600 - 28 \times 12 + 28 \times 8 = 40$ 才合理。

從學生的解題思維來看，大致上已具有三步驟併式的能力，但仍有學生習慣看到數字就想要計算，無法直接判斷算式與題意、算式與併式之間的關聯性。

2. 學生常見的錯誤解題想法：

學生 1 分類型中，雖能正確回答算式錯誤，但是回答的理由大多錯誤或不清楚，大致可分為以下解題想法：

- (1) 能回答要加括號，但是括號的位置加錯或是未說明括號加在何處。
- (2) 部分學生只回答「先乘除後加減」，未說明其他原因。
- (3) 少部分學生擷取情境中的文字說明，但理由敘述不完整。
- (4) 另有極少數學生能正確標出括號的位置，但判斷算式時卻寫成正確，這些學生都是將已標示好括號的算式重新計算一次，發現答案都一樣，才誤判斷算式正確。

學生 0 分類型共可區分為三種想法：

- (1) 多數學生從三步驟與併式運算結果的答案都是 40 作為判斷的理由，認為併式正

確。

- (2) 少部分學生認為併式正確，並將三步驟的運算次序再說明一次。
- (3) 有極少數學生認為小萱有合併算式或將算式變短，而判斷小萱正確。

這些學生對併式尚未建立概念，且不知道括號在併式中表示先算的部分。

三、評量內涵及本題的教學建議：

本題評量的內涵是以併式記法解決三步驟問題，且在併式中用括號表示先算的部分。本題在三步驟中先算的是「 $12+8$ 」，在併式紀錄中第三步驟才出現，不能正確解題的學生對於先算的「 $12+8$ 」在併式紀錄中要加括號不理解，會依算式由左而右檢查，因此受到先乘除後加減的影響而產生判斷困難。在正確解題的學生中仍有部分學生將併式紀錄重新計算一次，並非與三步驟算式做連結而理解併式的意義。本題的教學建議如下：

1. 透過多步驟的解題及算式替換的動態過程，了解併式的意義

教師帶領學生由題意中理解何者先算、以及再算什麼、最後再算什麼，讓學生察覺三步驟問題的存在，接著透過三步驟的列式記錄，再引導合併為一個算式。先讓學生觀察三步驟列式中各個運算結果與下一個算式的關係，利用運算結果可由算式替代的方法進而理解併式的意義。以本題為例「飲料店周年慶特價，水果茶、珍珠奶茶每杯都是 28 元，媽媽買了 12 杯水果茶、8 杯珍珠奶茶，付了 600 元找回多少元？」

先算； $12+8=20$ (杯)	→	飲料的總杯數
再算； $28 \times 20 = 560$ (元)	→	20 杯飲料所需付的錢
後算； $600 - 560 = 40$ (元)	→	找回的錢

若依題意列出三步驟算式後直接併式，學生很難理解如何併成一個算式。所以建


議老師應透過算式替換的動態過程進行併式教學。教師帶領學生觀察算式中的 20、560 的數字在題意中未曾出現，它是從何而來？接著討論 560 是 28×20 算出來的結果，560 由 28×20 替代，所以 $600 - 560 = 40$ 可替代為 $600 - 28 \times 20 = 40$ ，其中 20 再由 $(12+8)$ 替代，所以 $600 - 28 \times 20 = 40$ 可替代為 $600 - 28 \times (12+8) = 40$ ，強調括號表示先算的 20 杯飲料。藉由算式替代運算結果的方式，讓學生熟悉併式的意義。

先算； $12+8=\boxed{20}$ (杯)

再算； $28 \times \boxed{20}=\boxed{560}$ (元) 20 由 $(12+8)$ 替換，變成 $28 \times (12+8)$

後算； $600-\boxed{560}=40$ (元) 560 由 $28 \times (12+8)$ 替換

併式： $600-28 \times (12+8)=40$

 先算的要加括號

2. 強化學生多步驟算式中能判斷併式的合理性，不應透過計算併式的答案來判斷

從學生解題的思維中發現，仍有部分學生將併式重新計算一次算出答案 272，察覺與三步驟所呈現的答案 40 不同，以此做為判斷算式的錯誤，而非直接從多步驟中判斷併式的合理性。因此，教師除了引導學生從題意分步驟解題，先算出飲料的總杯數為 20 杯，再算 20 杯飲料的價錢，最後算出付 600 元後找回的金額之外。更需加強學生關注多步驟算式與併式各數值間的關係，進而判斷併式的合理性，學生藉由不須計算併式的答案來判斷算式的經驗，強化判斷算式的能力。

3. 從問題情境中併式可有多元方式，教學時宜提升至有效的併式，但評量時應接受多元的解法

進行多步驟解題活動時併式不一定是單一方式，學生可能依據問題情境呈現多元的併式方法，教師在教學時宜鼓勵學生使用有效的併式，以本題為例，學生解題時可能出現的併式如下：

併式①： $600-28\times 12-28\times 8$

併式②： $600-(28\times 12+28\times 8)$

併式③： $600-28\times (12+8)$

教師可以帶領學生討論上述三個併式的運算順序，發現併式①先算 28×12 和 28×8 的答案後再用 600 連減，必須做二次的二位數乘法，運算的複雜度較高；併式②是算出 28×12 和 28×8 的答案後加起來，再用 600 減去相加後的答案，一樣也要做二次的二位數乘法，運算的複雜性也較高；併式③可由 $28\times (12+8)$ 直接看出是 28×20 答案是 560，再用 600 減掉 560 得知答案為 40，運算的複雜度相對比併式①及併式②減少許多。教師在討論後宜提升學生使用有效的併式，評量時若學生仍出現多種併式，教師仍應接受多元解法。