
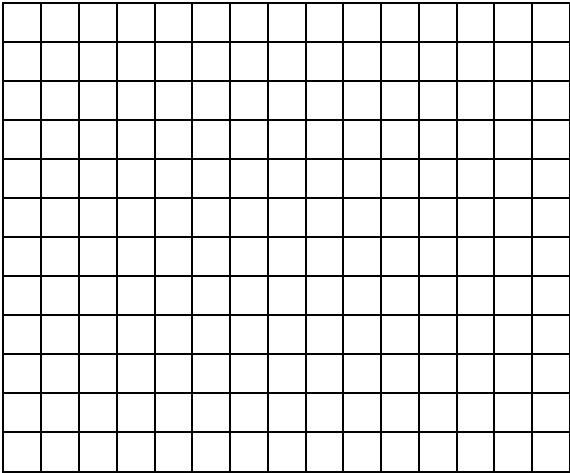
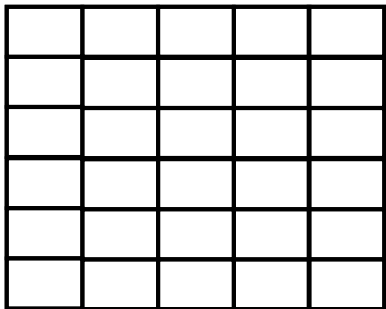


新北市 107 學年度國小數學檢測非選擇題學生解題分析及教學建議報告

一、試題內容及評閱規準：

分年細目	5-n-05 能認識兩數的公因數和公倍數、最大公因數和最小公倍數。		知識向度	數與計算
評量內涵	理解公倍數的意義，並透過列舉法應用並解決公倍數的問題。		認知層次	解題思考
試題內容	<p>柯南想要在一張長 15 公分、寬 12 公分的長方形圖畫紙上，用長 3 公分、寬 2 公分的長方形紙片，排出一個最大的正方形，請問他要用幾張長方形紙片？請寫下答案並說明你的做法。</p> <div style="display: flex; align-items: center; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;">  <p>長 3 公分、寬 2 公分的 長方形紙片</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>長 15 公分、寬 12 公分的長方形圖畫紙</p> </div> </div> <p>作答欄：</p> <p>(1) 要用幾張長方形紙片： (2) 我的做法：</p>			
評閱規準	類別	評閱說明	評閱舉隅	
	2A	能找出長方形紙片長 3 公分、寬 2 公分的公倍數 12 公分，正確計算出 24 張長方形紙片。	$3: 3、6、9、\boxed{12}、15$ $2: 2、4、6、8、10、\boxed{12}$ $12 \div 3 = 4$ $12 \div 2 = 6$ $4 \times 6 = 24$ 答：24 張	
	2B	透過排出最大正方形推理出最大邊長為圖畫紙的寬邊 12 公分，正確計算出 24 張長方形紙片。	以邊長可排張數計算： $15 - 3 = 12$ $12 \div 3 = 4$ $12 \div 2 = 6$ $4 \times 6 = 24$ 答：24 張 以面積可排張數計算： $3 \times 2 = 6$	

		$15-3=12$ $12 \times 12=144$ $144 \div 6=24$ 答：24 張
2C	利用題目紙畫畫看，正確畫出 24 張長方形紙片。	(略)
2X	答題及說明皆正確，但不屬於 2A 或 2B	
1A	能正確回答 24 張長方形紙片，但是理由不完整	$6 \times 4=24$ 答：24 張
1B	能正確回答 24 張長方形紙片，但是理由錯誤	(略)
1C	想法正確，但計算錯誤	先算出 12 公分以內 3 和 2 的公倍數，再算出正方形的面積再除以長方形紙片的面積 $3 \times 4=12$ $2 \times 6=12$ $12 \times 12=264$ $264 \div (3 \times 2)=44$ 答：44 張
0A	直接用圖畫紙的總面積除以紙片的面積來計算答案	$15 \times 12=180$ $3 \times 2=6$ $180 \div 6=30$ 答：30 張
0B	直接計算圖畫紙的長邊與寬邊各可排幾張紙片，然後將兩者相乘計算答案	$15 \div 3=5$ $12 \div 2=6$ $5 \times 6=30$ 答：30 張
0C	用畫圖的方式將長方形紙片排滿整張長方形圖畫紙	 答：30 張
0D	計算長方形紙片的面積當作排出的長方形紙張張數	$3 \times 2=6$ 答： 6 張
0E	計算長方形圖畫紙的面積當作排出的長方形紙張張數	$15 \times 12=180$ 答： 180 張
0X	其他錯誤類型	
99	空白	

二、評閱結果：

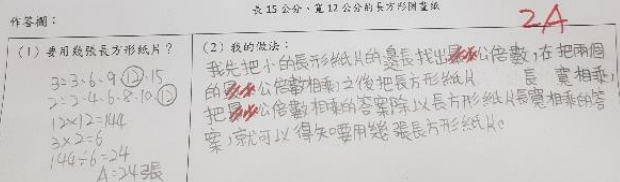
(一)本題學生作答情形

類型	2			1			0							合計
	2A	2B	2C	1A	1B	1C	0A	0B	0C	0D	0E	0X	99	398 人
人數	12	22	5	15	1	1	156	89	18	16	17	36	10	
百分比 (%)	3.0	5.5	1.3	3.8	0.5		39.2	22.4	4.5	4.0	4.3	9.0	2.5	
人數	39			17			342							
百分比 (%)	9.8%			4.3%			85.9%							

依上表可看出 2 分類型的學生只有近一成，1 分類型的學生極少數，而 0 分類型的學生佔大部分約八成五。2 分類型的學生佔 9.8%，其中半數以上都是屬於 2B 類型的，也就是由長方形圖畫紙的長和寬推理出可排的最大正方形邊長，進而正確計算出可排出的長方形紙片張數；僅近三成學生為 2A 類型，能以長方形紙片長和寬的公倍數來找出最大正方形得邊長正確解答。1 分類型的學生占 4.27%，雖然都能回答「24 張」，但其中近九成的學生是理由未敘寫清楚。

至於 0 分類型的學生佔 85.93%，其中有近八成的學生屬於 0A、0B 及 0C 這三種類型，皆是完全忽略排出最大正方形的條件，而直接計算整個長方形圖畫紙的面積排滿所需要的張數而回答「30 張」；不到一成的學生直接計算長方形紙片的面積當作排出的長方形紙張張數而回答「6 張」；亦不到一成的學生直接計算長方形圖畫紙的面積當作排出的長方形紙張張數而回答「180 張」；其餘的學生則未依題意解題，而以題目上的數字直覺計算或空白。

(二) 學生答題類型分析

得分	類型	解題範例(學生作答照片)	解題類型分析
2	2A	<p>作答圖：</p> <p>次 15 公分、寬 12 公分的長方形圖畫紙</p>  <p>(1) 要用幾張長方形紙片？ $3 \times 3 = 6, 9, 12, 15$ $2 \times 2 = 4, 6, 8, 10, 12$ $12 \times 2 = 24$ $3 \times 8 = 24$ $144 \div 6 = 24$ $A = 24$ 張</p> <p>(2) 我的做法： 我先把小的長方形紙片的邊長找出公倍數，在把兩個的公倍數相乘之後把長方形紙片長寬相乘，把公倍數相乘的答案除以長方形紙片長寬相乘的答案，就可以得知要用幾張長方形紙片。</p>	用列舉法找出長方形紙片長 3 公分、寬 2 公分的公倍數 12 公分為最大正方形的邊長，再用最大正方形除以

			長方形紙片面積，正確計算出 24 張長方形紙片
	2B		以長方形圖畫紙的短邊做為最大正方形的邊長為 12 公分，再用最大正方形除以長方形紙片面積，正確計算出 24 張長方形紙片
	2B		先用長方形的長減去寬找出最大正方形的邊長為 12 公分，再用最大正方形除以長方形紙片面積，正確計算出 24 張長方形紙片
	2C		利用題目紙畫出最大正方形的邊長，正確畫出 24 張長方形紙片。
	1A		只說明 $6 \times 4 = 24$ 正確回答 24 張長方形紙片，但是理由不完整
	1B		用長方形圖畫紙的面積除以長方形紙片的面積計算出需用 30 張紙片，又需扣掉六個邊長才等長，所以 $30 - 6 = 24$ 。正確回答 24 張長方形紙片，但是理由錯誤。
	1C		先利用列舉法找出長方形紙片長 3 公分、寬 2 公分的公倍數 12 公分，並正確列出 $12 \div 2 \times 12 \div 3$ 的式子，但卻計算錯誤而成： $5 \times 4 = 20$ (張)

	0A	<p>長 15 公分、寬 12 公分的長方形圖畫紙</p> <p>作答欄：</p> <p>(1) 要用幾張長方形紙片？ 30片</p> <p>(2) 我的做法： 把$15 \times 12 \div (3 \times 2)$ 就可以知道共要幾張長方形圖畫紙 $(15 \times 12) \div (3 \times 2)$ $= 180 \div 6$ $= 30$</p> <p>長 15 公分、寬 12 公分的長方形圖畫紙</p> <p>作答欄：</p> <p>(1) 要用幾張長方形紙片？ $15 \times 12 = 180$ $3 \times 2 = 6$ $180 \div 6 = 30$ A: 30 個</p> <p>(2) 我的做法： $15 \times 12 = 180 \dots \rightarrow$ 大的面積 $3 \times 2 = 6 \dots \rightarrow$ 小的面積 $180 \div 6 = 30 \dots \rightarrow$ 有 30 個小的</p>	<p>直接用圖畫紙的總面積 180 平方公分除以紙片的 面積 6 平方公分而計算答 案為 30 張</p>
0	0B	<p>1. 裡面想要在一張長 15 公分、寬 12 公分的長方形圖畫紙上，用長 3 公分、寬 2 公分的長方形紙片，排出一個最大的正方形，請問他要用幾張長方形紙片？請寫下答案並說明你的做法。</p> <p>長 3 公分、寬 2 公分的長方形紙片</p> <p>長 15 公分、寬 12 公分的長方形圖畫紙</p> <p>作答欄：</p> <p>(1) 要用幾張長方形紙片？ $15 \div 3 = 5$ $12 \div 2 = 6$ $5 \times 6 = 30$ A: 30 張</p> <p>(2) 我的做法： 先算出 15 公分可以排 5 張，12 公分可以排 6 張， 所以 $5 \times 6 = 30$ 張</p>	<p>直接計算圖畫紙的長邊與 寬邊各可排 5 張和 6 張紙 片，然後將兩者相乘計算出 答案為 30 張</p>
	0C	<p>裡面想要在一張長 15 公分、寬 12 公分的長方形圖畫紙上，用長 3 公分、寬 2 公分的長方形紙片，排出一個最大的正方形，請問他要用幾張長方形紙片？請寫下答案並說明你的做法。</p> <p>長 3 公分、寬 2 公分的長方形紙片</p> <p>長 15 公分、寬 12 公分的長方形圖畫紙</p> <p>作答欄：</p> <p>(1) 要用幾張長方形紙片？ 30</p> <p>(2) 我的做法： 第一排 5 張，排在最上面</p>	<p>用畫圖的方式將長方形紙 片排滿整張長方形圖畫 紙，數出 30 張</p>
	0D	<p>長 15 公分、寬 12 公分的長方形圖畫紙</p> <p>作答欄：</p> <p>(1) 要用幾張長方形紙片？ $3 \times 2 = 6$</p> <p>(2) 我的做法： 有兩個三排， 也可以說有三個直排，但算式會變成 $2 \times 3 = 6$。</p>	<p>用「$3 \times 2 = 6$」計算長方形紙 片的面積當作排出的長方 形紙張張數為 6 張</p>
	0E	<p>(1) 要用幾張長方形紙片？ A: 180 張</p> <p>(2) 我的做法： $15 \times 12 \rightarrow$ 長 \times 寬 就可以知道有幾個因為面積 $= 180$</p>	<p>用「$15 \times 12 = 180$」計算長方 形圖畫紙的面積當作排出 的長方形紙張張數為 180 張</p>

		<p>(1) 要用幾張長方形紙片？</p> $15 \times 12 = 180$ <p>A: 180 張</p>	<p>(2) 我的做法：</p> <p>因為長有 15 張紙片在去乘寬的 12 張就是答案。</p>	
--	--	--	--	--

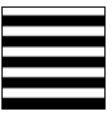



1. 學生正確的多元解題策略

從學生的 2 分類型中，可看出學生在作答上不同層次的思維。此類學生大部分都能先從題意中判斷「排出一個最大的正方形」的意思，並先確認出所排出的最大正方形邊長。而在如何確認出所排出的最大正方形邊長的方法上，這些學生主要的做法主要可區分為三種策略：

- (1) 約三分之一的學生是透過小長方形紙片的長和寬，去找出 12 公分以下最大的公倍數為最大正方形邊長。
- (2) 半數以上的學生則由大長方形圖畫紙的長和寬推理出最大正方形邊長為寬邊長。
- (3) 其他極少部分是直接利用題目中的圖示進行畫圖再點數張數。

其中比較值得提出來討論的是學生計算張數的做法，做法大致可分為兩類：「最大正方形一邊可排張數相乘」以及「最大正方形總面積除以長方形紙片面積」。因為本題是在排出最大正方形的條件下計算可排張數，所以這兩種做法剛好都可以計算出正確的可排張數；但是若是在其他題目中(如給定地面範圍求可排滿的磁磚邊長尺寸、磁磚不可切割的情況)，以用地面範圍總面積除以磁磚面積此做法則無法正確判斷磁磚邊長尺寸，如下 102 學年度非選題第二題：

小明想用同一種磁磚鋪滿長方形的客廳地板，地板長為 5 公尺、寬為 8 公尺。建材行的磁磚規格如下圖，在不切割磁磚的情形下，A、B、C、D 四種規格的磁磚哪些可以符合小明的需要？請勾選在下面的表格內，並將你的理由寫出來。

			
A 25cm×25cm	B 30cm×30cm	C 40cm×40cm	D 50cm×50cm

將你的理由寫出來：

上題中，使用「地面範圍總面積除以磁磚面積」此做法的學生，則皆認為磁磚 C 亦是排滿地板的磁磚尺寸，卻未能察覺以地板邊長而言，磁磚 C 的邊長未能排滿 5

公尺的長邊。這在後續的延伸教學上，讓學生思考「最大正方形一邊可排張數相乘」以及「最大正方形總面積除以長方形紙片面積」這兩種做法的意涵，是評量後相當有意義的教學討論。

2. 學生常見的錯誤解題想法

在學生的 1 分類型中，絕大部分學生都能說出正確答案但原因回答不清楚。這類型的學生可能是清楚計算出正確答案的方法，但是無法有系統說理的將判斷的原因說明清楚，可見平時在課堂上明顯缺少用數學語言表達溝通解題過程的練習，所以到了需要寫下解題想法時無法完整說明自己的思考內容或是不知如何表達，缺乏溝通的能力。

至於學生的 0 分類型主要可區分為三類想法：

- (1) 計算排滿整張大長方形圖畫紙的張數(30 張)；
- (2) 計算小長方形紙片的面積當作排滿的張數(6 張)；
- (3) 計算大長方形圖畫紙的面積當作排滿的張數(180 張)。

其中絕大部分的錯誤想法為(1)「計算排滿整張長方形圖畫紙的張數」認為答案是「30 張」，完全忽略題目中「排出最大正方形」的條件，而直接以排滿整張大長方形圖畫紙進行計算。這類型的學生他們只看到題目中「長 15 公分、寬 12 公分的長方形圖畫紙」以及用「長 3 公分、寬 2 公分的長方形紙片」去排，完全忽略題目中敘述要排出的條件為何，而他們算出張數的做法與 2 分類型的學生用「邊長可排張數相乘」、「總面積相除」以及「畫圖」完全一致，卻是將應計算的最大正方形算成整張大長方形圖畫紙。

另外兩類是少數 0 分類型學生的想法，一類是「計算長方形紙片的面積」、一類是「計算長方形圖畫紙的面積」。這兩類學生都是對題目內容無法明確掌握資訊，看到題目中有長和寬就相乘，並不清楚算出來的結果是面積或是題目所需要的張數(未注意單位的意涵)，也未能從題目中正確判斷要計算的對象為何。

三、評量內涵及本題的教學建議：

本題評量重點為了解學生是否能理解公倍數的意義，並透過公倍數的應用解決問題。學生於給定長寬的小長方形紙片下，在另一個給定長寬的長方形圖畫紙上排出一個最大的正方形的條件下，能否判斷出需要排出幾張小長方形紙片是本題的評量重點。本題之教學建議如下：

1. 應強調倍數與因數之間的關係，幫助學生從具象意義到數字關係的抽象化

因數問題是指定一個正整數，詢問以哪些正整數為單位，可以「整數倍合成」這個指定的正整數。乘法性組成整數的元素，數學上稱之為因數。所以，學生初步認識因數時，建議由包含除的情境理解因數的意義及名稱，如：「6 個蘋果要分裝成禮盒，每盒裝一樣多。幾個裝一盒可以剛好裝完？」以 2 個蘋果為單位量，可以整數倍合成 6 個蘋果，所以 2 個蘋果是 6 個蘋果的因數。先由包含除的情境，讓學生理解「1 個」、「2 個」、「3 個」、「6 個」都是「6 個蘋果」的因數。接著再討論等分除的情境，如：「6 個蘋果要分裝成禮盒，每盒裝一樣多。平分成幾盒可以剛好裝完？」此時連結「平分成幾盒」與「一次分掉幾顆」的相同意義，將因數問題抽象至數字關係。

$$6(\text{個}) \div 1(\text{個}) = 6(\text{盒})$$

$$6(\text{個}) \div 2(\text{個}) = 3(\text{盒})$$

$$6(\text{個}) \div 3(\text{個}) = 2(\text{盒})$$

$$6(\text{個}) \div 6(\text{個}) = 1(\text{盒})$$

由上面的式子引導學生觀察「1 個」、「2 個」、「3 個」、「6 個」是「6 個」的因數，而「1 盒」、「2 盒」、「3 盒」、「6 盒」轉化後的意義與「一次分掉 6 個」、「一次分掉 3 個」、「一次分掉 2 個」、「一次分掉 1 個」同樣意義，所以可以抽象到只要可以整除 6 的數字都是 6 的因數(此時就可不強調單位)。

同樣的倍數問題是指定一個正整數做為單位量，詢問以此正整數為單位量可以「整數倍地生成」哪些正整數。例：以 2 為單位量，可以乘法性地合成 4 和 6，所以 4 和 6 都是 2 的倍數。當學生理解 4 和 6 都是 2 可以乘法性合成的數字時，同時也表示了 2 可以整數倍的合成出 4 和 6，所以 2 也一定是 4 和 6 的因數。此時，教師須引導學生發現因倍數之間的關係，如「2 是 6 的因數 \longleftrightarrow 6 是 2 的倍數」。教師應透過上述歷程幫助學生從具象意義到數字關係的抽象化，並理解因倍數之間的關係。

2. 公倍數的意涵應強調情境轉換與數字關係的連結

通常五年級學生在剛學習倍數及公倍數的意義時，一開始都強調「找出倍數及公倍數的純數字練習」，如下題目所示：

例一、在下面各數中，把 8 的倍數圈起來。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40

例二、(1) 4 的倍數： (2) 6 的倍數： (3) 4 和 6 的公倍數：

而學生在如上述完全脫離生活情境的例子中認識並熟練「何為倍數?何為公倍數?」當之後開始要進行倍數及公倍數的應用時，卻無法從情境中抽離出倍數及公倍數在其中的涵義，如下列例題：

例三：小明有三十幾顆彈珠，平分成 4 堆，剛好分完，小明可能有幾顆彈珠？

例四：花花有一些糖果，平分成 6 堆、9 堆，都剛好分完，花花最少有幾顆糖果？

上述例三及例四這兩題都是一開始整體量未知，而學生須理解「平分成 4 堆」、「平分成 6 堆或 9 堆」剛好分完即表示整體量的數字一定會是「4 的倍數」及「6、9 的公倍數」。但是我們可以發現從純數字的倍數、公倍數的練習，與從有情境的描述中發現倍數、公倍數意涵的辨識，學生在學習上脈絡是斷裂、不連續的。以例一、例二中在純數字的倍數、公倍數練習都是以累單位量 1 倍、2 倍…來找出倍數及公倍數，但是在例三、例四情境上卻選擇平分的除法情境來察覺倍數及公倍數的意涵，之間並無相關的連貫活動。如果老師能透過實際操作活動讓學生將平分活動(等分除情境)轉換為分裝活動(包含除情境)，則學生能較容易察覺「累單位量 1 倍、2 倍…來找出倍數及公倍數的方式」與情境中的關係。

此外，以本題評量為例，本題情境並非為平分的除法情境，而是標準的累單位量問題，但學生仍然無法理解為倍數問題。「在一張長 15 公分、寬 12 公分的長方形圖畫紙上，用長 3 公分、寬 2 公分的長方形紙片，排出一個最大的正方形，請問他要用幾張長方形紙片？」題目描述中最主要的其實是要「用長 3 公分、寬 2 公分的長方形紙片，排出一個最大的正方形」，學生如果能在心中(或本題提供的圖示上)想像一下排列的樣貌，可以很快得知排成的圖形中一邊長會是 3 的倍數，另一邊長會是 2 的倍數，如果是正方形兩邊等長，那就會是 2 和 3 的公倍數。

但從本題答題狀況來看，大部分學生卻都直接以「長 15 公分、寬 12 公分」及「長 3 公分、寬 2 公分」開始進行鋪排，未能從情境以及操作中連結題意的理解及抽象化，這是倍數及公倍數教學需要多加強之處。也就是教師應該讓學生在生活情境中透過實際操作來認識倍數及公倍數的意涵，而非僅是純數字上找倍數及公倍數的反覆練習，實無助於學生實際回到情境中的生活應用。這同時也是學生遇到 102 學年度非選題第二題的鋪排問題就容易用面積的除法來計算可鋪排的個數，因為學生之前大部分面的鋪排經驗都是以面積來思考處理，少有無法剛好鋪滿的情況產生，而學生對公倍數在情境中的意涵又無法判別，所以才會造成前述的錯誤想法。

3. 透過連結題目資訊與圖示之間的關係理解題意

由本題學生作答的錯誤想法中，發現大部分學生是忽略題目中「排出最大的正方形」重要的解題訊息，而導致於錯誤。可見學生在讀題時並未有效運用題目所提供的

圖示來理解題意，而是看到圖示就開始直覺性解題。建議老師可以帶著學生逐句讀題，每句都確認題目的意思以及配合圖示進行說明，有效建立學生掌握題目中「排出最大的正方形」等重要訊息及圖示與題目的關係。尤其當題目沒有圖示時，也可以請學生逐句讀題時，同步將題意表徵成圖示來確認題意，將有效改進學生讀題的習慣以及提升題意理解的能力。

此外，學生 2 分類型中「用長方形的寬邊為正方形邊長，而切出來的最大的正方形」未必是可「排出最大的正方形」，本題用長方形的寬邊 12 公分為正方形邊長，剛好可以被提供的小長方形紙片的長(3 公分)和寬(2 公分)整除，所以可以用此策略成功解題；但若題目提供的是小長方形紙片長和寬、或甚至提供小正方形紙片的邊長皆無法整除 12 公分時，用上述策略將未是可「排出最大的正方形」。最終，學生仍需理解本題中真正的公倍數意義應由小長方形紙片的長(3 公分)和寬(2 公分)作為單位量，在給定範圍內而能同時整數倍生成的最大數字，才是是可「排出最大的正方形」的邊長。