

新北市 108 學年度國小數學檢測非選擇題學生解題分析及教學建議報告

一、試題內容及評閱規準：

分年細目	5-n-14 能認識比率及其在生活上的應用(含「百分率」、「折」)。			知識向度	數與計算
評量內涵	應用比率解決生活上的問題			認知層次	解題思考
試題內容	<p>學校舉辦班際投籃競賽，<u>小明</u>、<u>小華</u>都想代表班級參加比賽，老師請他們說明最近一次練習的情況，以作為推薦選手的依據。</p> <p><u>小明</u>：「我投進 35 球，沒投進 15 球。」</p> <p><u>小華</u>：「我共投了 60 球，進球率是$\frac{3}{5}$。」</p> <p>根據二人的說法，你會推薦哪一位選手參加比賽，為什麼？請說明原因。</p>				
評閱規準	類別	評閱規準	評閱說明		
	2A	利用投進率進行比較，並以此作為依據，說明應推薦小明參加比賽。	以百分率表示投進率 小明： $35 \div (15+35) = 70\%$ 小華： $\frac{3}{5} = 60\%$ 小明>小華		
			以小數表示投進率 小明： $35 \div (15+35) = 0.7$ 小華： $\frac{3}{5} = 0.6$ 小明>小華		
			以分數表示投進率 小明： $35 \div (15+35) = \frac{7}{10}$ 小華： $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ 小明>小華		
	2B	利用未投進率進行比較，並以此作為依據，說明應推薦小明參加比賽。	以百分率表示未投進率 小明： $1-35 \div (15+35) = 30\%$ 小華： $1-\frac{3}{5} = 40\%$ 未投進率越低，投進率越高，故小明>小華		
			以小數表示未投進率 小明： $1-35 \div (15+35) = 0.3$ 小華： $1-\frac{3}{5} = 0.4$ 未投進率越低，投進率越高，故小明>小華		

		<p>以分數表示未投進率</p> <p>小明：$1-35\div(15+35)=\frac{3}{10}$</p> <p>小華：$1-\frac{3}{5}=\frac{4}{10}$</p> <p>未投進率越低，投進率越高，故小明>小華</p>
	2X	<p>答題正確，但不屬於上述 AB 類型</p> <p>(略)</p>
	1A	<p>說明要推薦小明參加比賽，利用比率進行比較，但計算或說明有誤。</p> <p>(略)</p>
	1B	<p>說明要推薦小華參加比賽，但能利用比率進行比較，且說明正確。</p> <p>(略)</p>
	1X	<p>答題正確，但不屬於上述 ABC 類型</p> <p>(略)</p>
	0A	<p>說明要推薦小華參加比賽，利用投進或未投進的顆數來比較。</p> <p>小明：投進 35 顆</p> <p>小華：$60\times\frac{3}{5}=36$</p> <p>小華進球數比小明多，所以推薦小華參加比賽。</p>
	0B	<p>說明要推薦小華參加比賽，使用投進率或未投進率做比較，但不清楚比率的部分量或全體量。</p> <p>小明：$35-15=20$，$20\div35=\frac{4}{7}$</p> <p>小華：$\frac{3}{5}$</p> <p>小華進球率比小明高，所以推薦小華參加比賽。</p>
	0C	<p>說明要推薦小華參加比賽，用題目中較小的數除以較大的數作為要比較的比率。</p> <p>小明：$15\div35=\frac{3}{7}$</p> <p>小華：$\frac{3}{5}$</p> <p>小華進球率比小明高，所以推薦小華參加比賽。</p>
	0X	<p>其他錯誤類型，但不屬於上述 ABCD 類型</p> <p>(略)</p>
	99	<p>空白</p>

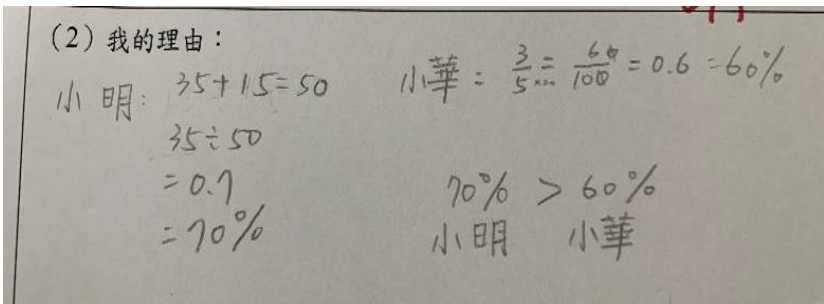
二、評閱結果：

(一)本題學生作答情形

類型	2		1			0					合計
	2A	2B	1A	1B	1X	0A	0B	0C	0X	99	476 人
人數	97	4	20	7	23	58	169	32	51	15	
百分比 (%)	20.4	0.8	4.2	1.5	4.8	12.2	35.5	6.7	10.7	3.2	
人數	101		50			325					
百分比 (%)	21.2		10.5			68.3					

依上表可看出有二成的學生得分為 2 分，一成的學生得 1 分，約七成的學生得 0 分。得分 2 分的學生佔 21.2%，其中超過九成的學生利用進球率進行比較而得出答案，不到一成的學生利用未投進球的比率進行判斷，表示他們能掌握比率關係中的部分量和全體量的關係，因而能正確回答問題。得 1 分的學生佔 10.5%，其中將近四成的學生雖然想利用比率進行比較，但計算有誤或理由有誤；約一成的學生雖能用正確的比率概念進行比較，但卻推薦進球率較低的小華作為參賽選手。至於得 0 分的學生佔 68.3%，其中五成的學生雖然試圖利用比率進行比較，但卻將題目中小明的投進球數當作全體量進行計算；約二成的學生未考慮二人的總投球數不同，利用投進的球數進行比較，而有近一成的學生未理解題目中數字代表的意思，直接以題目中的較小的數字除以較大的數字當作比率。

(二) 學生答題類型分析

類型	學生作答舉隅(照片)	作答舉隅分析
2A		計算出小明的總投球數和小華不同，因而分別算出二人進球的比率以進行比較。

2B	<p>(2) 我的理由：</p> $\text{小明} = \frac{15}{50} = \frac{30}{100} = 30\% \quad \dots \text{沒進}$ $\text{小華} = \frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{60}{100} = 60\% \quad \dots \text{進}$ $100\% - 60\% = 40\%$ $40\% > 30\%$	<p>計算出<u>小明</u>沒投進球的比率，再利用投進率與未投進率和為 100% 之概念，算出<u>小華</u>的未投進率以進行比較。</p>
1A	<p>(2) 我的理由：</p> $\text{華} \quad 2 \frac{3}{5} = \frac{60}{100} = 60\% \quad 78\% > 60\%$ $\text{明} \quad 35 + 15 = 45$ $35 \div 45 = \frac{25}{45} = 78\%$	<p>計算出<u>小明</u>的總投球數和<u>小華</u>不同，因而分別算出二人進球的比率以進行比較，但<u>小明</u>的總投球數計算錯誤。</p>
1B	<p>(1) 推薦哪一位選手？</p> <p>小華</p> <p>(2) 我的理由：</p> $35 + 15 = 50$ $\frac{35}{50} = \frac{70}{100} = 70\%$ $\frac{3}{5} = \frac{60}{100} = 60\%$ $70\% > 60\%$	<p>正確計算出<u>小明</u>的進球率高於<u>小華</u>，卻推薦進球率低的小華參加比賽。</p>
1X	<p>(2) 我的理由：</p> $35 + 15 = 50 \quad \frac{100}{100} - \frac{30}{100} = \frac{70}{100} = 70\%$ $15 \div 50 = \frac{15}{50} = \frac{30}{100}$ $\frac{60}{100} \times \frac{123}{151} = 36\%$ $70\% > 36\%$	<p>正確算出<u>小明</u>進球的比率及<u>小華</u>進球的數量，但在進球數的數字後加上百分率符號，當作是<u>小華</u>進球的比率，並對二者進行比較。</p>
0A	<p>(2) 我的理由：</p> <p>因為 $\frac{3}{5} = 3 \div 5 = 0.6$</p> <p>小華 $60 \times 0.6 = 36$</p> <p>小明 $35 + 15 = 50$</p> <p>$50 - 15 = 35$</p> <p>$36 > 35$ A: 小華</p> <p>(2) 我的理由：</p> $35 - 15 = 20$ $60 \times \frac{2}{5} = \frac{60 \times 2}{5} = \frac{120}{5} = 24$ $36 > 24$	<p>忽略二人的總投球數不同，算出<u>小華</u>進球的顆數，和<u>小明</u>進球的顆數進行比較。</p>

	<p>(2) 我的理由：</p> <p>小華：$\frac{3}{5} = \frac{21}{35} = 21$球</p> <p>小明：$35 - 15 = 20$球</p> <p>$21 > 20$</p>	
0B	<p>(2) 我的理由：</p> <p>$35 - 15 = 20$ $20 \div 35 = \frac{20}{35}$</p> <p>$60 \times \frac{3}{5} = 36$ $36 \div 60 = \frac{36}{60} = \frac{3}{5} = \frac{21}{35}$ $\frac{21}{35} > \frac{20}{35}, \frac{36}{60} > \frac{20}{35}$</p>	欲利用進球的比率進行比較，但將 <u>小明</u> 進球的數量當作總投球的數量進行計算。
0C	<p>(2) 我的理由：</p> <p>華：$\frac{3}{5} = 60\%$ 明：$15 \div 35 = 42\%$ $60\% > 42\%$</p>	欲利用進球的比率進行比較，但計算 <u>小明</u> 進球的比率時，直接用數目中較小的數字除以較大的數字當作比率，進行比較。
0X	<p>(2) 我的理由：</p> <p>$15 \div 35 = \frac{15}{35} = \frac{3}{7}$ $60 \times \frac{3}{5} = 36$</p>	未了解算式及數字代表的意義，看到二個整數，用較小的數字除以較大的數字；看到一個整數與一個分數，用整數乘以分數。將二者算出的結果進行大小比較。

1. 學生正確的多元解題策略

從學生的 2 分類型中，發現以下二種解題策略：

- (1) 大部分的學生計算出二人進球率，進行比較後得出答案；
- (2) 少部分的學生計算出二人未進球的比率，進行比較後得出答案。

值得注意的是比率運算的過程，大部分的學生習慣列出算式或分數後，直接計算出小數，並以百分率作為最終答案的呈現。列式後直接計算出答案固然可以解決比率

問題，但不應視為唯一的方法，如本題中小明的進球率，可根據題目提供的數字以 $\frac{35}{50}$ 表示，而小華的進球率恰為 $\frac{3}{5}$ ，學生只要透過觀察，將 $\frac{3}{5}$ 擴分成 $\frac{30}{50}$ ，答案便一目了然；或有學生直接計算 $35 \div 50 = 0.7$ ， $3 \div 5 = 0.6$ ，以小數進行比較後，已能清楚得知哪一位選手表現較佳，但多數學生卻會再將小數換算為百分率後再進行比較，雖然百分率是最常用的比率表示法，但學生若能掌握小數亦是一種比率的表現形式，可不必再多做一道換算程序。

2. 學生常見的錯誤解題想法

從學生的1分類型及0分類型中，發現以下三種錯誤作法：

- (1)約五成的學生將題目中小明的投進球數當作整體量總投球數來計算比率；
- (2)約二成的學生利用二人投進的球數進行比較；
- (3)近一成的學生直接以題目中的較小的數字除以較大的數字當作小明的進球率。

其中最多的錯誤是將小明的投進球數當作整體量來計算比率，這些學生知道要用比率概念進行比較，卻忽略「投進幾球」和「投了幾球」所代表的意思不同，看到題目中較大的數，便當作是總投球數。而利用「投進球數」進行比較的學生，能利用總投球數乘以進球率計算出進球數，卻未能真正掌握應用比率的時機——在二人總投球數不同的情況下，進球數的多寡無法成為比較的依據，需回到整體量看部分量所佔的比率，這是比率教學相當重要的概念引導。

另外，直接以較小的數除以較大的數，和以下的作答方式亦值得深思；當題目出現「投進35球，沒投進15球」時，以 $15 \div 35 = 0.429 \cdots$ 當作進球率，而部分學生在看見「共投了60球，進球率是 $\frac{3}{5}$ 」，又以 $60 \times \frac{3}{5} = 36$ 當作進球率，當發現0.429和36相差懸殊時，便隨意調整數字呈現的形式，以跟另一數進行比較——將小數0.429變成整數42.9，或將0.429換算為42.9%，而將整數36加上百分比符號成為36%。這些學生看到數字能夠反射性的進行運算，卻忽略所運算算式及數字代表的意義為何。

三、評量內涵及本題的教學建議：

(一)教學應從比率概念引入的需求，而非僅強調比率的計算方式

學生未學比率概念之前，是以運算後的數量做比較，如：甲、乙二人要比投籃技術，便限定投球的總數，以投進的顆數做為比較的根據。而五年級所要引入的比率概念，是要引導學生察覺，日常生活情境進行二量比較時，在全體量不一定相同的情況下，僅依部分量的數量多寡來判斷並不恰當，需關注部分量和全體量的關係才能解決問題。因此，比率概念教學的引入應從「需求感」著手，例如：以二人投球總數不同、進球數亦不同的情境布題，讓學生察覺總量不同的情境不應僅以投進的顆數做比

較，並了解比率是表示「部分量佔全體量」多寡的意涵。

學生一旦了解比率的意義後，利用分數的舊經驗「部分/全體」概念，分別表徵二者「部分量佔全體量」的多寡，就能順利進行分數的大小比較。因此，比率概念的引入，初始需著重比率的需求感，以穩固用比率表徵二量關係的意涵，即使不強調計算方式(部分量 \div 整體量=比率)，學生只要能判斷比率應用的時機，利用分數的基礎概念便能進行解題。

(二)比率的概念教學應重視數字和整體量、部分量的關係

比率的原始應用情境指的是「部分量佔全體量」的多寡，待學生清楚比率的意涵，用分數表徵並比較後，再透過異分母分數不易比較的數字安排，引入比率計算公式的需求感，並發現小數也可用來表示比率。

教師此時應連結分數與小數的意義，都是能用來表徵「部分量佔全體量的多寡」，並強調「1」與分數、小數的關係，讓學生理解此時的分數、小數和「1」所代表的意義。為確認學生對於比率概念的理解，可用小數進行部分量和全體量的命題，例如：一杯紅茶牛奶是0.5公升，牛奶是0.1公升，牛奶所佔的比率是 $0.1 \div 0.5 = 0.2$ 。教師可提問：「牛奶是0.1公升，為何算出來會是0.2？」去澄清0.2代表的是以全部的紅茶牛奶當作1份，牛奶所佔為0.2份的比率意涵，強調0.2與1的關係($0.1 \div 0.5 = \frac{1}{5}$ 亦應強調 $\frac{1}{5}$ 與1的關係)，經由提問讓學生明白比率概念的學習不僅僅是運用公式計算出答案，更應重視比率中的數字和整體量、部分量的關係。

(三)比率的表徵和小數、分數、百分率間轉換的應用

當引入百分率後，學生應理解比率的表徵除了小數和分數外，百分率也可以用來表示比率，因為它們都可以表示「部分量佔全體量的多寡」，教師此時應提供多元的情境，讓學生發現因應情境所提供的數據不同，可選擇不同的表徵方式，不盡然都要再轉換為百分率。以本題而言，題目已說明小華的進球率是 $\frac{3}{5}$ ，只要再算出小明的進球率是 $\frac{15}{50}$ ，透過觀察，將 $\frac{3}{5}$ 擴分成 $\frac{30}{50}$ 便可比較，不必用公式計算，也不必以百分率表示，也能輕鬆得出二者比較的結果。