

第 1 題

知識向度	數與計算	認知向度	概念理解				
對應分年細目	5-n-11 能用直式處理乘數是小數的計算，並解決生活中的問題。						
題目	已知「 $374 \times 265 = 99110$ 」，則 $3.74 \times 2.65 = ?$ ① 9911.0 ② 991.1 ③ 9.911 ④ 0.9911						
答題表現 選項分析	<hr/>						
	選 項	1	2	3	4	其他	答案：3
	<hr/>						
	選項率	0.02	0.09	0.81	0.08	0.00	
	<hr/>						
	高分組	0.00	0.02	0.95	0.03	0.00	
	低分組	0.08	0.18	0.59	0.15	0.00	
	<hr/>						

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.36，通過率為 0.81，試題難易度 0.77。

(二) 評量目標說明

本題旨在測驗學生是否能理解小數乘以小數時，可視為整數乘以整數，算出積後再依被乘數和乘數的小數位值和，往左去移動小數點。

(三) 選項表現說明

- 有 81% 的學生選擇正確選項③，顯示大部分的學生能利用「被乘數與乘數的小數位值和」來移動小數點的位置，再劃去小數位末位的 0，得到正確答案：

$$\begin{array}{r}
 3.74 \\
 \times 2.65 \\
 \hline
 9.9110
 \end{array}$$

- 有 9% 的學生選擇選項②，這些學生可能受小數加減直式計算的影響，列出直式後對齊小數點，再省略小數位末位的 0，得到 991.1：

$$\begin{array}{r}
 3.74 \\
 \times 2.65 \\
 \hline
 991.10
 \end{array}$$

3. 有 8% 的學生選擇選項④，這些學生可能先省略小數位末位的 0，再利用「被乘數與乘數的小數位值和」來移動小數點的位置，得到 0.9911：

$$\begin{array}{r} 3.74 \\ \times 2.65 \\ \hline 0.9911\cancel{0} \end{array}$$

4. 有 2% 的學生選擇選項①，這些學生可能先利用「被乘數與乘數的小數位值和」，但卻由高位往右去移動小數點的位置，得到 9911.0：

$$\begin{array}{r} 3.74 \\ \times 2.65 \\ \hline 9911.0 \end{array}$$

(四) 學生表現說明

1. 本題的命題設計主要希望了解學生是否能理解「小數乘以小數」時，可先將其視為「整數乘以整數」，算出積後再依被乘數與乘數的小數位值和，進行小數點的移動。
2. 本題通過率為 0.81。約有 8 成的學生已能掌握小數乘小數的算則概念，但仍有近 2 成的學生不清楚概念。從高分組與低分組學生的表現來看，95% 的高分組學生能正確回答問題；而低分組學生雖有 59% 回答正確，但有 18% 的學生選擇選項②，表示仍受小數加減直式需對齊小數點的規則混淆。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

(一) 評量重點

5-n-11 能用直式處理乘數是小數的計算，並解決生活中的問題。

(二) 先備的知識

4-n-12 能用直式處理二位小數加、減與整數倍的計算，並解決生活中的問題。

(三) 延伸的知識

6-n-06 能用直式處理小數除法的計算，並解決生活中的問題。

十二年國教課綱（學習內容）

(一) 評量重點

N-5-8 小數的乘法：整數乘以小數、小數乘以小數的意義。乘數為小數的直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。處理乘積一定比被乘數大的錯誤類型。

(二) 先備的知識

N-4-7 二位小數：位值單位「百分位」。位值單位換算。比較、計算與解題。用直式計算二位小數的加、減與整數倍。

(三) 延伸的知識

1. N-5-9 整數、小數除以整數（商為小數）：整數除以整數（商為小數）、小數

除以整數的意義。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。能用概數協助處理除不盡的情況。熟悉分母為2、4、5、8之真分數所對應的小數。

2. N-6-4 小數的除法：整數除以小數、小數除以小數的意義。直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。處理商一定比被除數小的錯誤類型。

三、教學建議

(一) 評量核心概念

小數乘以小數的問題（兩位小數）。

(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. 對乘數位值為0的乘法意義不了解：乘數的位值有0時，學生對位值出現0在乘法計算上的意義不了解，因此在直式算式中不知如何紀錄，以致於其他位值的乘法計算結果的位值亦錯誤。例如： 23×4.05 的乘數十分位位值為0，在乘法直式計算時忽略了0乘以23的紀錄，直接將4乘以23的結果紀錄在錯誤的位值造成答案錯誤（如下列直式）。

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 4.05 \\ \hline 115 \\ 92 \\ \hline 10.37 \end{array} \quad \text{——} \rightarrow \text{位值錯誤}$$

2. 對小數沒有估算的數感：因此學生對於兩數乘積的小數點位置沒有概念，以致於出現小數乘法直式計算結果中積的小數點位置錯誤（如下列直式）。

$\begin{array}{r} 23 \\ \times 4.05 \\ \hline 115 \\ 920 \\ \hline 93.15 \end{array}$ <p>小數點位置正確</p>	$\begin{array}{r} 23 \\ \times 4.05 \\ \hline 115 \\ 920 \\ \hline 931.5 \end{array}$ <p>小數點位置錯誤</p>	$\begin{array}{r} 23 \\ \times 4.05 \\ \hline 115 \\ 920 \\ \hline 9.315 \end{array}$ <p>小數點位置錯誤</p>
--	--	--

3. 在小數乘法直式計算有個位對齊的迷思：舊經驗小數的加減直式法則，學童記憶要個位對齊個位，但在學小數乘法的直式計算，卻要先不管小數點的位置，直接靠右邊對齊，此時容易受到前面舊經驗的干擾。

混淆小數乘法與加減直式計算的小數點位置擺放規則：學習小數的加減直式計算時，運算過程均要個位對齊個位；但在學習小數乘法的直式計算時，運算過程卻要對齊直式最右邊，最後運算結果再處理小數點的位置。兩種不同的概念容易相互混淆。

(三) 核心概念的教學重點

1. 使用定位板：進行小數的加減直式運算教學時應使用定位板，並強調位值的對齊，將被加（減）數及加（減）數的小數點對齊後進行加（減）計算，而小數的乘除計算則不強調位值的對齊。
2. 加強分數和小數的連結：在進行小數教學時，應重視分數和小數的連結，因

為小數是分數的另一種表達形式。所以用 $\frac{1}{10}$ 、 $\frac{1}{100}$ 、 $\frac{1}{1000}$ 的分數來學習小數，可以幫助學生理解 0.1、0.01、0.001 的小數概念，並連結兩者之間的關連。

3. 小數乘法的小數點位置算則規約

- (1) 在進行小數的乘法計算教學時，先從整數乘以小數開始，例如： $23 \times 4.5 = 23 \times 4 + 23 \times 0.5 = 92 + 11.5 = 103.5$ ，讓學生對整數乘以小數倍有感覺，學生經由觀察可以發現整數乘以帶小數倍時，即是該數的整數倍加上該數的純小數倍。所以 23 的 4.5 倍，答案一定大於 23 的 4 倍，小於 23 的 5 倍。
- (2) 接著再進行小數乘以小數的教學，可以先將小數化為分數，透過分數乘法的計算法則，幫助學生理解小數乘以小數乘法直式算則解題的意義。例如： $2.3 \times 4.5 = \frac{23}{10} \times \frac{45}{10} = \frac{23 \times 45}{10 \times 10} = \frac{1035}{100} = 10.35$ 。在此連結分數乘法的計算過程中，教師可引導學生觀察發現兩個分子相乘後得到 1035，兩個分母相乘後得到 100，因此將分數的乘積換回小數時，小數點往左移 2 位，最後得到 10.35。這樣引入幫助學生建立小數乘以小數的乘積之小數點位置之算則規約。

$\begin{array}{r} 2.3 \\ \times 4.5 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 23 \\ \times 45 \\ \hline 1035 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2.3 \\ \times 4.5 \\ \hline 10.35 \end{array}$
(列出直式)	(算出 23×45 的乘積)	(小數點往左移 2 位)

4. **培養小數估算的數感：**除了小數和分數的連結外，在進行小數教學時，另一個很重要的概念是培養小數的數感以進行積的估算，例如： 2.3×4.5 ，是 2.3 的 4 倍多，所以可以估算答案應大於 $9(2 \times 4.5)$ ，小於 $15(3 \times 5)$ 左右。小數數感的估算，也可以幫助學生先以整數進行小數的乘除計算，再定出積或商的小數點位置，例如：將 2.3×4.5 當成 23×45 的整數相乘，乘積為 1035，因以小數估算 2.3×4.5 的積介於 9~15 之間，因此可知其積應為二位小數，故積為 10.35。

(四) 本題教學的加強重點

本題可以採取兩種不同的解題策略，教學內涵說明如下：

1. 算則規約

- (1) 本題為二位小數乘以二位小數的題目，可先視為整數乘以整數的乘法計算，再依被乘數和乘數的小數位數總和，做原積數的小數點位移，來決定新積數小數點的位置。 3.74 和 2.65 的小數位位數總和共 4 位。在此連結分數乘法的計算過程中，教師可引導學生觀察發現兩個分子相乘後得到 99110，兩個分母相乘後得到 10000，因此將分數的乘積換回小數時，小數點往左移 4 位，最後得到 9.9110。這樣引入幫助學生建立小數乘以小數的乘積之小數點位置之算則規約。算則規約如下：

$$3.74 \times 2.65 = \frac{374}{100} \times \frac{265}{100} = \frac{374 \times 265}{100 \times 100} = 9.911\cancel{0} = 9.911$$

直式算則如下：

$$\begin{array}{r} 374 \\ \times 265 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 374 \\ \times 265 \\ \hline 1870 \\ 2244 \\ 748 \\ \hline 99110 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3.74 \\ \times 2.65 \\ \hline 1870 \\ 2244 \\ 748 \\ \hline 9.911\cancel{0} \end{array}$$

(列出直式)

(算出乘積)

(小數點位移)

(2) 當乘以 0.1 時，小數點往左移 1 位，乘以 0.01 時，小數點往左移 2 位，依此類推。本題小數點需往左移 4 位，原積數 99110 的小數點在個位數字 0 的右邊，往左移 4 位後得到新的積數為 9.9110。

(3) 小數點右邊末位的 0 可以省略，所以 9.9110 可以寫成 9.911。

2. **估算：**本題由於是選擇題，所以也可利用估算的策略就能輕易的找到正確答案。計算 3.74×2.65 時，利用整數估算可以先進行 3×2 的心算得到估算值 6 後進行 4×3 的心算得到估算值 12，所以可以知道 3.74×2.65 的答案應該大於 6，小於 12 左右。而題目選項中就以③ 9.911 和估測區間最相近，故為本題答案。

第 2 題

知識向度	數與計算	認知向度	概念理解																												
對應分年細目	5-n-05 能認識兩數的公因數、公倍數、最大公因數與最小公倍數。																														
題目	用相同的小磁磚貼滿一個正方形的圖形，小磁磚的長、寬分別為 8 公分與 6 公分，貼出來的正方形邊長可能是幾公分？ ① 14 公分 ② 24 公分 ③ 36 公分 ④ 64 公分																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：2</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.16</td><td>0.62</td><td>0.08</td><td>0.11</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.06</td><td>0.88</td><td>0.01</td><td>0.03</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.26</td><td>0.35</td><td>0.18</td><td>0.20</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：2	選項率	0.16	0.62	0.08	0.11	0.00		高分組	0.06	0.88	0.01	0.03	0.00		低分組	0.26	0.35	0.18	0.20	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：2																									
選項率	0.16	0.62	0.08	0.11	0.00																										
高分組	0.06	0.88	0.01	0.03	0.00																										
低分組	0.26	0.35	0.18	0.20	0.00																										

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.53，通過率為 0.62，試題難易度 0.62。

(二) 評量目標說明

本題是倍數的相關問題，評量學生是否能知道拼貼出來的正方形邊長就是磁磚長與寬的公倍數，並且透過分別列舉倍數的方式找兩數的公倍數的能力。

(三) 選項表現說明

- 約有 62% 的學生選擇正確選項②，顯示有六成二的學生能理解情境問題，只要找 6 和 8 的「最小公倍數」代表的就是這個正方形的邊長。
- 約有 16% 的學生選擇選項①，這些學生可能不理解情境問題，故無法判斷這是找公倍數的問題，因此這些學生以為長和寬加起來就是本題的答案。
- 約有 11% 的學生選擇選項④，這些學生可能不理解情境問題，誤認為只要是 8 的倍數即可，忽略了也要是 6 的倍數。
- 約有 8% 的學生選擇選項③，這些學生可能不理解情境問題，誤認為只要是 6 的倍數即可，忽略了也要是 8 的倍數。

(四) 學生表現說明

1. 本題的命題設計主要是希望了解學生在找公倍數的問題中，對於用列舉的方式找出兩數公倍數的能力，是否能應用於解決日常生活中的問題。
2. 本題難易度為 0.62。有將近六成二的學生能用列舉倍數的方式找出兩數的公倍數的能力，應用於解決日常生活中的問題。但仍有將近四成的學生無法解題。從高分組與低分組學生的表現來看，約有 88% 的高分組學生能正確回答問題，但仍有將近一成多的學生無法解題。而低分組學生只有 35% 回答正確，約有 65% 的低分組學生選擇其他的選項，顯示學生對於用一種規格的長方形磁磚能拼貼出邊長幾公分的正方形的情境問題，使用列舉倍數的方式找出兩數的公倍數的概念並未能充分掌握。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

(一) 評量重點

5-n-05 能認識兩數的公因數、公倍數、最大公因數與最小公倍數。

(二) 先備的知識

1. 5-n-01 能熟練整數乘、除的直式計算。
2. 5-n-04 能理解因數和倍數。

(三) 延伸的知識

1. 6-n-01 能認識質數、合數，並用短除法做質因數的分解（質數 <20 ，質因數 <20 ，被分解數 <100 ）。
2. 6-n-02 能用短除法求兩數的最大公因數、最小公倍數。

十二年國教課綱（學習內容）

(一) 評量重點

N-5-3 公因數和公倍數：因數、倍數、公因數、公倍數、最大公因數、最小公倍數的意義。

(二) 先備的知識

1. N-2-6 乘法：乘法的意義與應用。在學習乘法過程，逐步發展「倍」的概念，做為統整乘法應用情境的語言。
2. N-4-2 較大位數之乘除計算：處理乘數與除數為多位數之乘除直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。

(三) 延伸的知識

1. N-6-1 20 以內的質數和質因數分解：小於 20 的質數與合數。2、3、5 的質因數判別法。以短除法做質因數的分解。
2. N-6-2 最大公因數與最小公倍數：質因數分解法與短除法。兩數互質。運用到分數的約分與通分。

三、教學建議

(一) 評量核心概念

透過分別列舉因數、倍數的方式找出兩數的公因數、公倍數。

(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. **基本概念的理解困難**：對於「公因數」、「公倍數」、「最大公因數」、「最小公倍數」等概念上的誤解。
2. **對於兩數之間的基本關係混淆**：例如對於何者為「因數」、「倍數」；何者為兩數之間的「公因數」、「公倍數」、「最大公因數」、「最小公倍數」等名詞的認識不足，因此出現混淆情形。

(三) 核心概念的教學重點

1. **公因數、最大公因數**：「公因數」即為兩數共有的因數，而「最大公因數」即為公因數中最大者。所以在進行公因數教學時，可先請學生分別列舉出兩數各自的因數，在兩數因數之間有相同者，即為兩數的公因數。例如：

18 的因數： $\boxed{1}$ 、 $\boxed{2}$ 、 $\boxed{3}$ 、 $\boxed{6}$ 、9、18；

24 的因數： $\boxed{1}$ 、 $\boxed{2}$ 、 $\boxed{3}$ 、4、 $\boxed{6}$ 、8、12、24。

18 與 24 相同的因數有 1、2、3、6，這些數即為兩數的「公因數」。而公因數中最大者，即為二數的「最大公因數」。以上面的例子為例，6 為 4 個公因數中最大者，因此 6 就是 18 和 24 的「最大公因數」。

2. 任何大於零的整數一定有 1 這個因數，而且是最小的因數，因此任意兩個整數的最小公因數必為 1。
3. **公倍數、最小公倍數**：「公倍數」即為兩數共有的倍數，而「最小公倍數」即為公倍數中最小者。以 18 和 24 為例：

18 的倍數：18、36、54、 $\boxed{72}$ 、90、108、126、 $\boxed{144}$ ……；

24 的倍數：24、48、 $\boxed{72}$ 、96、120、 $\boxed{144}$ ……。

18 與 24 相同的倍數有 72、144……，可以用列舉的方式找出兩數的公倍數。同時可以發現只要是 72 的倍數一定也會是 18 和 24 的公倍數，並引導學生發現能找的到 18 與 24 兩數的最小公倍數為 72，但找不到最大的公倍數。老師可以再舉例說明，讓學生發現任意兩個大於零的整數，只能找到最小公倍數，但找不到最大的公倍數。

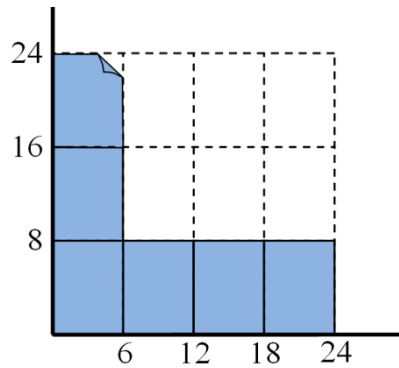
(四) 本題教學的加強重點

本題的情境通常會遇到的解題問題，是學生無法正確判斷情境內容是屬公因數的問題還是公倍數的問題。因此，老師需要幫助學生理解題意內容，建議具體物操作，從中建立對公倍數的概念。

步驟1：在黑板上先畫出一個正方形形狀成直角的兩個邊，如圖 2-1，這兩個

邊的長度還不能確定數量是多少公分，因為尚不知公倍數為多少。

步驟2：排排看：從直角的位置開始，先在橫軸那一邊排1張長方形色紙，並標註6公分，繼續排第二張，標註12公分，以此類推；另在縱軸邊的第1張色紙，先標註8公分，再排第二張，標註16公分，以此類推。最後可排成一個邊長24公分的正方形。於是學生能說明：這個正方形的一邊有3個8公分，是8公分的3倍，另一邊有4個6公分，是6公分的4倍。這個正方形的邊長是24公分，24是6和8的公倍數。在拼排的過程中，學生必須在邊長上標註總長度。



【圖 2-1】

步驟3：引導學生發現結論：只要找6和8的「公倍數」代表的就是這個正方形的可能邊長。

第 3 題

知識向度	數與計算	認知向度	程序執行																												
對應分年細目	5-n-10 能認識多位小數，並做比較與加、減與整數倍的計算，以及解決生活中的問題。																														
題目	求 $6.789+3.92=?$ ① 6.071 ② 7.181 ③ 9.609 ④ 10.709																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：4</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.02</td><td>0.13</td><td>0.05</td><td>0.80</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.00</td><td>0.03</td><td>0.01</td><td>0.96</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.04</td><td>0.30</td><td>0.10</td><td>0.56</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：4	選項率	0.02	0.13	0.05	0.80	0.00		高分組	0.00	0.03	0.01	0.96	0.00		低分組	0.04	0.30	0.10	0.56	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：4																									
選項率	0.02	0.13	0.05	0.80	0.00																										
高分組	0.00	0.03	0.01	0.96	0.00																										
低分組	0.04	0.30	0.10	0.56	0.00																										

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.4，通過率為 0.8，試題難易度 0.76。

(二) 評量目標說明

本題旨在測驗學生是否能進行多位小數的直式加減運算。

(三) 選項表現說明

- 有 80% 的學生選擇正確選項④，顯示大部分的學生已經具備多位小數的直式運算的能力，能正確計算：

$$\begin{array}{r}
 \overset{1}{6}.\overset{1}{7}89 \\
 + \quad 3.92 \\
 \hline
 10.709
 \end{array}$$

- 有 13% 的學生選擇選項②，這些學生可能受整數加減計算的影響，在進行計算時，習慣性的將「數字向右對齊」對齊來計算：

$$\begin{array}{r}
 \overset{1}{6}.\overset{1}{7}\overset{1}{8}9 \\
 + \quad 392 \\
 \hline
 7.181
 \end{array}$$

3. 有 4% 的學生選擇選項③，這些學生在連續進位時出現錯誤：

$$\begin{array}{r} \text{? ?} \\ 6.789 \\ + 3.92 \\ \hline 9.609 \end{array}$$

4. 有 2% 的學生選擇選項①，這些學生除了出現將「數字向右」對齊的迷失外，在連續進位時亦出現錯誤：

$$\begin{array}{r} \text{? ? ?} \\ 6.789 \\ + 3.92 \\ \hline 6.071 \end{array}$$

(四) 學生表現說明

1. 本題的命題設計主要希望了解學生是否具備小數的加法計算能力。同時檢核如果學生利用直式計算方式解題是否會出現問題。
2. 本題通過率為 0.8。約有 8 成的學生已能掌握多位小數直式運算的概念，但仍有 2 成左右的學生，概念並不清楚。從高分組與低分組學生的表現來看，96% 的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生亦有 56% 回答正確，但有 4% 和 30% 的低分組學生選擇選項①和②，顯示低分組約有三成的學生對小數直式計算有迷思概念。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

(一) 評量重點

5-n-10 能認識多位小數，並做比較與加、減與整數倍的計算，以及解決生活中的問題。

(二) 先備的知識

4-n-12 能用直式處理二位小數加、減與整數倍的計算，並解決生活中的問題。

(三) 延伸的知識

6-n-08 能在具體情境中，解決小數的兩步驟問題，並能併式計算。

十二年國教課綱（學習內容）

(一) 評量重點

N-5-1 十進位的位值系統：「兆位」至「千分位」。整合整數與小數。理解基於位值系統可延伸表示更大的數和更小的數。

(二) 先備的知識

N-4-7 二位小數：位值單位「百分位」。位值單位換算。比較、計算與解題。用直式計算二位小數的加、減與整數倍。

(三) 延伸的知識

N-6-5 解題：整數、分數、小數的四則應用問題。二到三步驟的應用解題。含使用概數協助解題。

三、教學建議

(一) 評量核心概念

評量學生是否認識多位小數並透過直式計算解決小數加、減、乘、除之運算問題。

(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. 小數的基本概念迷思

- (1) 不了解小數與分數之間的連結，所以不清楚小數點右邊的數字所代表的值，例如：0.23 的 2 是 2 個 $\frac{1}{10}$ ，所以 2 是十分位，也就是 2 個 0.1；0.23 的 3 是 3 個 $\frac{1}{100}$ ，所以 3 是百分位，也就是 3 個 0.01。
- (2) 不了解小數所代表的值，如不了解 3.45 是介於 3 和 4 之間的值。
- (3) 數線上讀小數或標小數點時，會弄錯兩格之間的單位，例如；0.1 和 0.2 之間分成十格時，不清楚兩小隔間代表的是 0.01。
- (4) 不了解小數之間存在著無限個小數，例如：0.1 和 0.2 之間有 0.11、0.12、0.13……；0.01 和 0.02 之間還有 0.011、0.012、0.013……。
- (5) 在度量衡單複名數的轉換問題時，易產生位值錯誤，例如：以為 2 公尺 3 公分=2.3 公尺。
- (6) 在離散量情境時，易將小數點左邊的數當成大單位的個數，將小數點右邊的數當成小單位的個數，例如：一袋糖果有 20 顆，2.5 袋糖果就是 2 袋又 5 顆。
- (7) 小數化聚的迷思：例如：「0.6 是由幾個 0.01 合成？」多數學生會回答 6 個。因此，未能正確做二位小數的化聚，表示學生缺乏位值概念。

2. 小數與整數概念混淆形成的迷思

- (1) 讀小數時，會類推讀整數的方式，例如；0.24 讀成「零點二十四」，或將 0.2007 讀成「零點二零七」，因學生不理解讀整數時有讀出位名，故零可省略，而讀小數時沒有讀出位名，故零不可以省略。
- (2) 不了解小數點右邊末位的 0 可以省略，例如：以為 $12.30 > 12.3$ 。
- (3) 在小數數詞序列遇到進位時容易出錯，例如：0.7、0.8、0.9 再來是 0.10。
- (4) 在比較小數的大小時，以為小數點右邊的數字越多，其值越大，例如：

以為 $0.123 > 0.4$ 。

- (5) 在比較小數的大小時，將小數當成整數來比較，例如：以為 $12.3 < 4.56$ 或 $4.12 > 4.3$ 。

3. 小數計算的迷思

- (1) 在計算小數加減時，會以整數的加減經驗類推，而將「數字向右」對齊來計算。

$$\begin{array}{r} 0.54 \\ + \quad 0.3 \\ \hline 0.57 \end{array}$$

- (2) 在加減小數時計算結果忘了標示小數點：

$$\begin{array}{r} 2.54 \\ + \quad 1.3 \\ \hline 267 \end{array}$$

- (3) 計算小數乘法時，會放錯積數小數點的位置。
- (4) 計算小數除法時，會放錯餘數的小數點，不是忽略要加小數點，就是將小數點對齊放在被除數後來的小數點的位置。

4. 小數與分數概念混淆形成的迷思：將小數和分數的數字直接轉換，例如：以為 $5.4 = \frac{4}{5}$ ，或以為 $\frac{3}{8} = 0.3$ 。

(三) 核心概念的教學重點

1. 透過具體操作讓學生從分數概念引進，讓學生理解小數的意義

以一個千格板當作 1，則一個百格板是 $\frac{1}{10}$ ，也就是 0.1；一個橘色積木是 $\frac{1}{100}$ ，也就是 0.01；一個小白積木是 $\frac{1}{1000}$ ，也就是 0.001。

學生在四年級已經認識二位小數與百分位的位名，且理解小數本身記錄了多單位的合成結果，例如一位小數是記錄數個「1」和數個「0.1」的合成結果；二位小數是記錄數個「1」、數個「0.1」和數個「0.01」的合成結果。

五年級開始出現四位小數以上的小數，四位小數是記錄數個 1、數個 0.1、數個 0.01、數個 0.001 和數個 0.0001 的合成結果。例如：0.3758 是記錄 3 個 0.1、7 個 0.01 和 5 個 0.001 的合成結果，展開式可以寫成 $0.3758 = 0.1 \times 3 + 0.01 \times 7 + 0.001 \times 5 + 0.0001 \times 8$ 。

2. 透過定位板讓學生觀察發現，能理解小數多單位位值和其大小的變化

整數位值越往左其值越大，數字往左移動一個位值，其值變為原來的 10 倍，反之往右移動一個位值，其值變為原來的 $\frac{1}{10}$ 倍。小數亦然，十分位

的 1 代表個位 1 的 $\frac{1}{10}$ ，百分位的 1 代表十分位 1 的 $\frac{1}{10}$ 。

利用定位板，如【表 3-1】來輔助認識小數的位值和位名，以了解小數概念是整數十進位系統的延伸。

【表 3-1】

個 位	十 分 位	百 分 位	千 分 位	萬 分 位
0	3	7	5	8

以定位板理解「0.1」、「0.01」、「0.001」、「0.0001」四個單位間的化聚活動，例如一位小數問題：「一盒雞蛋有 10 個，1 個雞蛋是 0.1 盒。35 個雞蛋是幾個 0.1 盒？合起來是幾盒？」與「一盒雞蛋有 10 個，3.5 盒有幾個雞蛋？」的雙向化聚問題。

再到兩位小數問題：「一包影印紙有 100 張，1 張影印紙是 0.01 包，10 張影印紙是 0.1 包。76 張影印紙是幾個 0.01 包和幾個 0.1 包合起來？」與「一包影印紙有 100 張，幾個 0.01 和幾個 0.1 包合起來是 0.76 包？」的雙向化聚問題。

再到三位小數問題：「一盒白色積木有 1000 個，1 個白色積木是 0.001 盒，10 個白色積木（即 1 個橘色積木）是 0.01 盒，100 個白色積木（即 1 個百格板）是 0.1 盒。468 個白色積木是由多少個 0.001 盒、多少個 0.01 盒和多少個 0.1 盒白色積木合起來的？」與「一盒白色積木有 1000 個，多少個 0.001 盒、多少個 0.01 盒（即 1 個橘色積木）和多少個 0.1 盒白色積木（即 1 個百格板）合起來是 0.468 盒？」的雙向化聚問題。

（四）本題教學的加強重點

本題應利用定位板輔助教學來加強學生的位值概念，如【表 3-2】，先請學生將 6.789 和 3.92 填入定位板中，讓學生熟悉小數點的意義，知道小數點區隔了整數和小數的部分。並理解在小數加法直式計算中要對先齊小數點，同位值的數再做相加。待學生熟練後再抽離定位板，單純進行直式計算。

教師應該有層次的布題及設計題目，讓學生熟練進位及連續進位的題型，強化學生的直式計算能力。

【表 3-2】

	十 位	個 位	十 分 位	百 分 位	千 分 位
		6	7	8	9
+		3	9	2	
	1	0	7	0	9

第 4 題

知識向度	數與計算	認知向度	程序執行				
對應分年細目	5-n-12 能用直式處理整數除以整數，商為三位小數的計算。						
題目	雜貨店將 132 公斤的米分裝成 125 包，每包米重多少公斤？ ① 10.56 公斤 ② 1.56 公斤 ③ 1.056 公斤 ④ 1.0056 公斤						
答題表現 選項分析	-----						
	選 項	1	2	3	4	其他	答案：3

	選項率	0.06	0.14	0.70	0.10	0.00	

	高分組	0.01	0.05	0.89	0.05	0.00	
	低分組	0.15	0.28	0.42	0.15	0.00	

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.47，通過率為 0.70，試題難易度 0.65。

(二) 評量目標說明

本題是整數除以整數，可以整除且商為三位小數的應用問題，評量學生能否理解在等分除的情境下，運用除法(商為三位小數)解決生活問題的能力。

(三) 選項表現說明

1. 有 70% 的學生選擇正確選項③，顯示大部分的學生已經掌握整數除以整數，商為三位小數的計算能力（整除）：

$$\begin{array}{r}
 1.056 \\
 125 \overline{)132.000} \\
 \underline{125} \\
 700 \\
 \underline{625} \\
 750 \\
 \underline{750} \\
 0
 \end{array}$$

2. 有 14% 的學生選擇選項②，這些學生可能在進行整數除以整數，商為小數的直式計算時，遇到直式中的餘數小於除數時，未先於商數補 0 後，再換成更小的位值單位繼續分：

$$\begin{array}{r}
 1.56 \\
 125 \overline{)132.000} \\
 \underline{125} \\
 700 \\
 \underline{625} \\
 750 \\
 \underline{750} \\
 0
 \end{array}$$

3. 有 10% 的學生選擇選項④，這些學生可能在進行整數除以整數，商為小數的直式計算時，商的小數點位置錯誤：

$$\begin{array}{r}
 1.0056 \\
 125 \overline{)132.000} \\
 \underline{125} \\
 700 \\
 \underline{625} \\
 750 \\
 \underline{750} \\
 0
 \end{array}$$

4. 有 6% 的學生選擇選項①，這些學生可能在進行整數除以整數，商為小數的直式計算時，商的小數點位置錯誤：

$$\begin{array}{r}
 10.56 \\
 125 \overline{)132.000} \\
 \underline{125} \\
 700 \\
 \underline{625} \\
 750 \\
 \underline{750} \\
 0
 \end{array}$$

(四) 學生表現說明

1. 本題主要希望了解學生理解題意後，能列出整數除以整數的算式，並經由直式計算正確算至餘數為零，商為三位小數的答案，同時檢視學生能否將除法（商為三位小數）的計算能力應用於解決日常生活問題。
2. 本題通過率為 70%，有 7 成的學生對於整數除以整數，商為三位小數的計算已能掌握，但仍有近 3 成的學生無法解題。從高分組與低分組學生的表現來看，89% 的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生只有 42% 回答正確，有 58% 的低分組學生對於整數除以整數，商為三位小數的計算技巧未能充分掌握。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

(一) 評量重點

5-n-12 能用直式處理整數除以整數，商為三位小數的計算。

(二) 先備的知識

5-n-01 能熟練整數乘、除的直式計算。

(三) 延伸的知識

6-n-06 能用直式處理小數除法的計算，並解決生活中的問題。

十二年國教課綱（學習內容）

(一) 評量重點

N-5-9 整數、小數除以整數（商為小數）：整數除以整數（商為小數）、小數除以整數的意義。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。能用概數協助處理除不盡的情況。熟悉分母為 2、4、5、8 之真分數所對應的小數。

(二) 先備的知識

1. N-5-6 整數相除之分數表示：從分裝（測量）和平分的觀點，分別說明整數相除為分數之意義與合理性。
2. N-5-7 分數除以整數：分數除以整數的意義。最後將問題轉化為乘以單位分數。

(三) 延伸的知識

N-6-4 小數的除法：整數除以小數、小數除以小數的意義。直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。處理商一定比被除數小的錯誤類型。

三、教學建議

(一) 評量核心概念

以直式處理整數除以整數，商為三位小數的計算（整除）。

(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. 對分數為「整數相除」的意涵不了解：因此學生對算式中被除數小於除數會感到懷疑與不確定，如： $1 \div 8$ 可能會在列式時寫成 $8 \div 1$ 。
2. 對小數沒有估算的數感：因此對於商的小數點位置沒有概念，以致於出現小數除法直式計算中商的小數位置錯誤（如下列直式）。

$$\begin{array}{r} 0.125 \\ 8 \overline{) 1.0} \\ \underline{8} \\ 20 \\ \underline{16} \\ 40 \\ \underline{40} \\ 0 \end{array}$$

小數點位置正確

$$\begin{array}{r} 1.25 \\ 8 \overline{) 1.0} \\ \underline{8} \\ 20 \\ \underline{16} \\ 40 \\ \underline{40} \\ 0 \end{array}$$

小數點位置錯誤

$$\begin{array}{r} 12.5 \\ 8 \overline{) 1.0} \\ \underline{8} \\ 20 \\ \underline{16} \\ 40 \\ \underline{40} \\ 0 \end{array}$$

小數點位置錯誤

3. 對於被除數位值有 0 的意義不了解：所以當除法直式的餘數小於除數時，就以為不能再分了，不知補 0 的意義是換成更小的位值後可以繼續分。

(三) 核心概念的教學重點

1. **分數有「整數相除」意涵：**整數除以整數可以表示為分數，所以分數有「整數相除」的意涵。在教學上應讓學生透過實物進行等分除或包含除的具體操作，再連結到整數相除的數學算式，最後連結到整數相除的分數表達形式，例如：4 個蛋糕平分給 2 個人，列式為 $4 \div 2$ ，故 1 個蛋糕平分給 4 個人，列式為 $1 \div 4$ ，所以每人可以分到 $\frac{1}{4}$ 個蛋糕。若學生對於分數有「整數相除」的意涵了解，當被除數小於除數時，學生才不易產生混淆。
2. **培養小數除法估算的數感：**練習整數相除的運算時，培養學生的數感可以幫助學生估算商的值，例如：1 個蛋糕分給 4 個人， $1 \div 4 = (\quad)$ ，每個人分到的蛋糕應該不到一半，所以應該小於 $\frac{1}{2}$ ，也就是小於 0.5。有了數感，學生在標示商的小數點位置時才不容易錯誤。

(四) 本題教學的加強重點

1. **了解除法直式補 0 的意義：**在整數除以整數，商為小數的直式計算中，餘數小於除數時，需將餘數的下一個位值補 0，表示換成更小的位值繼續分。學生若對餘數補 0 的意義不了解，容易造成計算時的位值錯誤，因此教師需澄清並讓學生了解餘數補 0 的意義。
2. **分數除法的數感：**老師可以先讓學生估算 135 除以 125 的答案大約多少，讓學生判斷答案應介於 1 和 2 之間。另外，也可以和學生探討從分數和小數之間換算的觀點解題。學生理解題意後，可以列出如下算式，同樣也可以算出答案：

$$132 \div 125 = \frac{132}{125} = \frac{132 \times 8}{125 \times 8} = \frac{1056}{1000} = 1.056。$$

第 5 題

知識向度	量與實測	認知向度	程序執行																												
對應分年細目	5-n-15 能解決時間的乘除計算問題																														
題目	新北烘焙坊製作一個巧克力蛋糕需要 30 分鐘，在 2 小時 40 分鐘內， <u>最多</u> 可以做出多少個？ ① 8 個 ② 6 個 ③ 5 個 ④ 3 個																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：3</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.07</td><td>0.09</td><td>0.77</td><td>0.06</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.01</td><td>0.03</td><td>0.93</td><td>0.02</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.17</td><td>0.17</td><td>0.53</td><td>0.13</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：3	選項率	0.07	0.09	0.77	0.06	0.00		高分組	0.01	0.03	0.93	0.02	0.00		低分組	0.17	0.17	0.53	0.13	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：3																									
選項率	0.07	0.09	0.77	0.06	0.00																										
高分組	0.01	0.03	0.93	0.02	0.00																										
低分組	0.17	0.17	0.53	0.13	0.00																										

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.41，通過率為 0.77，試題難易度 0.73。

(二) 評量目標說明

本題是時間量除以時間量情境的文字題，要求學生算出商數，評量學生時間情境包含除問題的解題能力。

(三) 選項表現說明

- 有 77% 的學生選擇正確選項③，顯示近 8 成的學生已經掌握解決時間量除以時間量情境文字題的能力，並利用 1 時是 60 分進行時分換算後再進行時間的減法計算。能正確算出 2 小時 40 分 = 160 分， $160 \div 30 = 5(\text{個}) \cdots 10(\text{分})$ ，並能判斷最多可以做出 5 個。
- 有 9% 的學生選擇選項②，這些學生可能可以正確換算「時」和「分鐘」的關係，但因為有餘數，學生可能認為「最多」應將得到的商數 + 1， $60 \times 2 = 120$ ， $120 + 40 = 160$ ， $160 \div 30 = 5 \cdots 10$ ， $5 + 1 = 6$ ，而選擇選項②。
- 有 7% 的學生選擇選項①，這些學生可能未能正確認識「時」和「分」的關係，認為 1 小時 = 100 分鐘，所以 2 小時 40 分鐘 = 240 分鐘 $240 \div 30 = 8$ ，而

選擇選項①。

4. 有 6% 的學生選擇選項④，這些學生可能未能正確認識「時」和「分鐘」的關係，認為 1 小時=24 分鐘，且因為有餘數，學生可能認為「最多」應將得到的商數+1， $24 \times 2 = 48$ ， $48 + 40 = 88$ ， $88 \div 30 = 2 \cdots 28$ ， $2 + 1 = 3$ ，而選擇選項④。

(四) 學生表現說明

1. 本題的命題設計主要希望了解學生對於時間量除以時間量情境的文字題是否理解並進行時間除法運算，並能利用情境正確判斷題意中最大的意義。
2. 本題難易度為 0.73。雖然通過率 77%，顯示有近 8 成的學生能理解時間量除以時間量情境的文字題進行時間的除法計算，並正確判斷題意中「最多」的意義正確解題。但仍有 2 成的學生無法解題。從高分組與低分組學生的表現來看，93% 的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生只有 53% 回答正確。選擇錯誤選項的學生一部分可能沒有時間情境包含除問題的解題能力，也可能將兩時間量相除時計算發生錯誤；另外也有因為無法判斷題意「最多」的意義將餘數加 1 而答題錯誤。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

(一) 評量重點

5-n-15 能解決時間的乘除計算問題。

(二) 先備的知識

1. 3-n-13 能認識時間單位「日」、「時」、「分」、「秒」及其間的關係，並做同單位時間量及時、分複名數的加減計算（不進、退位）。
2. 4-n-13 能解決複名數的時間量的計算問題。

(三) 延伸的知識

6-n-12 能認識速度的意義及其常用單位。

十二年國教課綱（學習內容）

(一) 評量重點

N-5-16 解題：時間的乘除問題。在分數和小數學習的範圍內，解決與時間相關的乘除問題。

(二) 先備的知識

1. N-3-17 時間：「日」、「時」、「分」、「秒」。實測、量感、估測與計算。時間單位的換算。認識時間加減問題的類型。
2. N-4-13 解題：日常生活的時間加減問題。跨時、跨午、跨日、24 小時制。含時

間單位換算。

(三) 延伸的知識

N-6-7 解題：速度。比和比值的應用。速度的意義。能做單位換算（大單位到小單位）。含不同時間區段的平均速度。含「距離＝速度×時間」公式。用比例思考協助解題。

三、教學建議

(一) 評量核心概念

進行日、時、分、秒相鄰二階單位的複名數時間量除法計算。

(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. 將時刻和時間（量）的混淆：有關於某一時刻經過多少時間（量）會到哪一個時刻，或兩個時刻間經過多少時間（量）的計算問題，是學生學習困難的教材。學生對「上午 8 時 20 分到下午 1 時 30 分，共經過多少時間？」缺乏概念，容易把這 2 個時刻相加，8 時 20 分 + 1 時 30 分，表示學生對於時間與時刻的觀念不清，所以才會將「共經過多少時間」想成 2 個時刻的相加，而進行「幾時幾分」+「幾時幾分」的計算。
2. 時間除法問題的錯誤類型：時間的除法問題有兩種，第一種是等分除情境的時間除法問題，例如「8 小時 50 分鐘 ÷ 3 = () 小時 () 分鐘 … () 分鐘」，第二種是包含除情境的時間除法問題，例如：「14 日 19 時 ÷ 3 日 8 時 = () … () 日 () 小時」。

(1) 等分除情境的時間除法問題

甲、把時間單位換算當成是百進位：連續二階複名數等分除。

$$\begin{array}{r} \text{時} \quad \text{分} \\ 2 \quad 30 \\ 4 \overline{) 9 \quad 20} \\ \underline{8} \\ 1 \quad 20 \\ \underline{1 \quad 20} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \rightarrow \text{把 1 時 20 分當成 120 分} \\ \text{所以認為 } 120 \text{ 分} \div 4 = 30 \text{ 分} \end{array}$$

乙、把時間單位換算當成是十進位：連續二階複名數等分除。

$$\begin{array}{r} \text{時} \quad \text{分} \\ 1 \quad 3 \\ 8 \overline{) 10 \quad 8} \\ \underline{8} \\ 2 \quad 8 \\ \underline{2 \quad 4} \\ 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} \rightarrow \text{把 2 時 8 分當成 28 分} \\ \text{所以認為 } 28 \text{ 分} \div 8 = 3 \cdots 4 \end{array}$$

丙、把時間單位換算當成是百進位：連續二階複名數包含除。

9 時 4 分 ÷ 2 時 26 分 = ()，學生把 2 時 26 分當成 226 分，

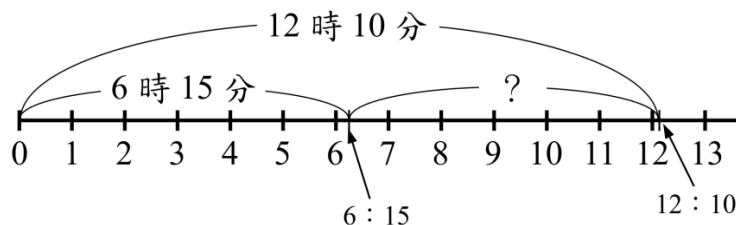
把以為 9 時 4 分當成 904 分，誤計算成 $904 \div 226 = 4$ 。

- (2) **包含除情境的時間除法問題：**此情境的時間除法問題有兩種解題的方法，第一種是將複名數都換成單名數後，利用整數除法直式算則來解題，第二種是利用先乘後減的方法來解題。大部分的學生會使用第一種方法，通常複名數都換成單名數後數字都會變大，而容易在運算整數除法時計算錯誤。另一種錯誤類型則是學生無法理解除後商數的單位。

(三) 核心概念的教學重點

1. 時刻和時間（量）的計算問題（配合時間線段圖進行解題）

學生可以在時間直線上標示某時刻，並能瞭解該時刻和表示從 9 時間開始到時刻所經過的時間量的不同，可讓學生將問題利用算式填充題呈現，再配合時間數線說明。例如：6 時 15 分到 12 時 10 分經過多少時間？學生在以 1 小時為單位的時間數線上將問題標示出來，如【圖 5-1】：



【圖 5-1】

再記成算式填充題：

A 型：12 時 10 分－6 時 15 分＝（ ）時（ ）分。

B 型：6 時 15 分＋（ ）時（ ）分＝12 時 10 分。

C 型：12 時 10 分－（ ）時（ ）分＝6 時 15 分。

學生就時間數線的說明，可能有兩類：一類是「位置經過位移到新位置」的向量觀點，即某時刻加（減）時間量是某某時刻（對應 B、C 型，也可配合點算），或二時刻相差一個時間量（對應 A 型）的說法。一類是「時間量加減」的計算觀點，即將時刻換成從 0 時間量，對兩個時間量作加法運算（對應 B 型）或減法運算（對應 A、C 型）的說法。

2. 時間的除法計算

(1) 等分除情境的時間除法問題

連續二階複名數等分除問題，可先化為低階單位再計算。例如：9 時 20 分 $\div 4 = ?$ 應是 60 分 $\times 9 + 20$ 分 = 560 分，560 分 $\div 4 = 140$ 分，140 分 = 2 時 20 分；或直接用二階單位進行運算，只要掌握二階單位的關係進行化聚，即可用直式除法的舊經驗進行時間的直式除法計算，9 時 $\div 4 = 2$ 時...1 時，1 時 20 分 $\div 4 = 80$ 分 $\div 4 = 20$ 分，2 時 + 20 分 = 2 時 20 分。

(2) 包含除情境的時間除法問題

此情境的時間除法問題有兩種解題的方法，第一種是將複名數都換成單名數後，利用整數除法直式算則來解題，第二種是利用先乘後減的方法來解題。下面以三階單位情境為例，並說明如何幫助學生解題：「機器完成一件成品要 3 日 8 時 50 分，14 日 19 時 15 分最多可完成幾件成品，剩下多少時間？」

甲、 將複名數都換成單名數後，利用整數除法直式算則來解題：建議教師依下列步驟幫助學生解題：

步驟一：將複名數 3 日 8 時 50 分及 14 日 19 時 15 分都化為單名數：

$$\begin{aligned} 24 \times 3 &= 72, 72 + 8 = 80 \text{ (時)}, \\ 60 \times 80 &= 4800, 4800 + 50 = 4850 \text{ (分)}, \\ 3 \text{ 日 } 8 \text{ 時 } 50 \text{ 分} &= 4850 \text{ (分)}, \\ 24 \times 14 &= 336, 336 + 19 = 355 \text{ (時)}, \\ 60 \times 355 &= 21300, 21300 + 15 = 21315 \text{ (分)}, \\ 14 \text{ 日 } 19 \text{ 時 } 15 \text{ 分} &= 21315 \text{ (分)}. \end{aligned}$$

步驟二：算出可完成幾件成品，剩下多少時間：

$$\begin{aligned} 21315 \div 4850 &= 4 \text{ (件)} \cdots 1915 \text{ (分)}, \\ \text{得到可完成 4 件成品，剩下 1915 分。} \end{aligned}$$

步驟三：將剩下時間單名數分聚成複名數日、時及分：

$$\begin{aligned} 1915 \div 60 &= 31 \text{ (時)} \cdots 55 \text{ (分)}, \\ 31 \div 24 &= 1 \text{ (日)} \cdots 7 \text{ (時)}, \\ \text{得到 } 1915 \text{ 分} &= 1 \text{ 日 } 7 \text{ 時 } 55 \text{ 分}。 \end{aligned}$$

步驟四：得到最多可以完成 4 件成品，剩下 1 日 7 時 55 分的答案。

乙、 利用先乘後減的方法來解題：建議教師依下列步驟幫助學生解題：

步驟一：先估算 1 件工程要 3 日 8 時 50 分，14 日 19 時 15 分大約可以完成 4 件工程。

步驟二：算出完成 4 件工程要多少間：

$$3 \text{ 日 } 8 \text{ 時 } 50 \text{ 分} \times 4 = 13 \text{ 日 } 11 \text{ 時 } 20 \text{ 分}。$$

	日	時	分
	3	8	50
×			4
<hr/>			
	12	32	200
	13	11	20

步驟三：算出完成 4 件工程後還剩下多少時間，

$$14 \text{ 日 } 19 \text{ 時 } 15 \text{ 分} - 13 \text{ 日 } 11 \text{ 時 } 20 \text{ 分} = 1 \text{ 日 } 7 \text{ 時 } 55 \text{ 分}。$$

	日	時	分
	14	19	15
—	13	11	20
	1	7	55

步驟四：得到最多可以完成 4 件成品，剩下 1 日 7 時 55 分的答案。

(四) 本題教學的加強重點

1. 時和分的化聚及記錄

- (1) 解決時間單位由「分」聚成「時」的問題：先以時間為某（60 的整數倍）分鐘是幾小時的問題，將以分鐘為單位的時間聚成以小時為單位的時間。例如 60 分是 1 小時，120 分是 2 小時，300 分是 5 小時。
- (2) 解決時間單位由「分」聚成「○時○分」的問題：已經知道 60 分是 1 小時，70 分鐘比 60 分鐘多了 10 分鐘，所以是 1 小時 10 分鐘。140 分鐘是 2 個 60 分鐘和 20 分鐘，所以是 2 小時 20 分鐘。 $160 \div 60 = 2 \cdots 40 = 2$ 小時 40 分鐘。
- (3) 解決時間單位由「○時○分」化成「分」的問題：已經知道 60 分是 1 小時，題目為 2 小時 40 分鐘，則是將 $60 \times 2 + 40 = 160$ 。

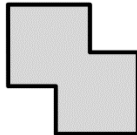
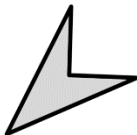
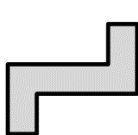
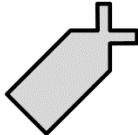
2. 包含除情境的時間除法問題

- (1) 將複名數都換成單名數，利用整數除法直式算則來解題：
 2 時 40 分 $\div 30$ 分 = () 個 \cdots () 分，
 2 時 40 分 = 160 分，
 160 分 $\div 30$ 分 = 5 個 $\cdots 10$ 分。
- (2) 利用先乘後減的方法來解題：
 先估算做一個蛋糕要 30 分，2 時 40 分大約可以做 5 個。
 30 分 $\times 5 = 150$ 分，
 2 時 40 分 = 160 分，
 160 分 $- 150$ 分 = 10 分（不夠時間再做 1 個）。

2. 題意中「最多」的意涵

教師應先澄清問題，可以提問幾個關鍵問話幫助學生了解題意，如「題目裡說最多可以做幾個，為什麼要問最多呢？那麼最少可以做幾個呢？」「2 時 40 分夠做 1 個蛋糕嗎？2 個呢？」透過這些提問，讓學生理解這裡的最多為何意？而當計算出來有餘數時，商數是否需要加 1，可由前面的討論進一步澄清。

第 6 題

知識向度	幾何	認知向度	概念理解				
對應分年細目	5-s-04 能認識線對稱與簡單平面圖形的線對稱性質。						
題目	下列哪個圖形 <u>不是</u> 線對稱圖形？ <div>①</div> <div>②</div> <div>③</div> <div>④</div>						
答題表現 選項分析	<hr/>						
	選 項	1	2	3	4	其他	答案：3
	<hr/>						
	選項率	0.04	0.03	0.88	0.04	0.01	
	<hr/>						
高分組	0.01	0.78	0.97	0.61	0.00		
低分組	0.08	0.08	0.74	0.10	0.00		
<hr/>							

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.24，通過率為 0.88，試題難易度 0.85。

(二) 評量目標說明

本題旨在測驗學生是否理解平面圖形的線對稱性質，評量學生是否能從給定的圖形中判斷是否為對稱圖形。

(三) 選項表現說明

1. 有 88% 的學生選擇正確選項③，顯示大部分的學生已經掌握判別對稱圖形中對稱軸的能力。
2. 有 4% 的學生選擇選項①、3% 的學生選擇選項②、4% 的學生選擇選項④，這些學生可能認為對稱軸一定是垂直線或水平線，對於選項①、選項②及選項④認為對稱軸不可能是斜線而做出選擇。

(四) 學生表現說明

1. 本題的命題設計主要希望了解學生，對於「線對稱圖形」中所謂的對稱軸，此一概念是否完全清楚。因此，在選項的設計中對稱軸均為斜線，進而讓學生找出圖形中的哪一條斜線為對稱軸，藉此判斷哪一個圖形不是線對稱圖形。

2. 本題難易度為 0.85。有將近 9 成的學生已能掌握線對稱圖形中對稱軸的概念，但仍有 1 成多的學生，概念並不清楚。從高分組與低分組學生的表現來看，約 98% 的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生有約 74% 回答正確，但有 10% 的低分組學生選擇選項④。顯示低分組學生中有許多學生對於線對稱圖形中的對稱軸也可以是斜線此一概念，尚未能完全掌握。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

（一）評量重點

5-s-04 能認識線對稱與簡單平面圖形的線對稱性質。

（二）先備的知識

1. 4-s-03 能認識平面圖形全等的意義。
2. 4-s-06 能理解平面上直角、垂直與平行的意義。

（三）延伸的知識

1. 8-s-06 能理解線對稱的意義，以及能應用到理解平面圖形的幾何性質。
2. 8-s-14 能用線對稱概念，理解等腰三角形、正方形、菱形、箏形等平面圖形。

十二年國教課綱（學習內容）

（一）評量重點

S-5-4 **線對稱**：線對稱的意義。「對稱軸」、「對稱點」、「對稱邊」、「對稱角」。由操作活動知道特殊平面圖形的線對稱性質。利用線對稱做簡單幾何推理。製作或繪製線對稱圖形。

（二）先備的知識

S-4-6 **平面圖形的全等**：以具體操作為主。形狀大小一樣的兩圖形全等。能用平移、旋轉、翻轉做全等疊合。全等圖形之對應角相等、對應邊相等。

（三）延伸的知識

S-8-11 **梯形的基本性質**：等腰梯形的兩底角相等；等腰梯形為線對稱圖形；梯形兩腰中點的連線段長等於兩底長和的一半，且平行於上下底。

三、教學建議

（一）評量核心概念

在具體操作下，能找出圖形的對稱軸。

（二）學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. **認為對角線即是對稱軸**：受正方形影響，常常也認為矩形、平行四邊形、等

腰梯形……，等相近圖形的對角線也是對稱軸。

2. **認為對稱軸只有一條：**尤其是對於正多邊形及圓形的對稱軸，許多學生常常認為只有一條對稱軸。因為學生雖然知道對稱軸的定義，但卻忽略在圖形上仍然可以找出其他直線，讓圖形對摺後仍可以完全重疊。
3. **認為只有垂直線、水平線才能當作對稱軸：**在圖形中除了水平線及垂直線有可能是對稱軸外，其他直線也有可能是對稱軸。例如：正方形的兩條對角線也是對稱軸。

(三) 核心概念的教學重點

1. **線對稱圖形的定義：**一個平面圖形，如果可以找到一條直線，將圖形分成兩部分，沿著此直線對摺後，兩部分的圖形能夠完全疊合，此圖形稱為線對稱圖形。
2. **透過鏡子觀察：**使用鏡子利用鏡射的方式讓學生觀察，鏡子必需放在圖形中的那一個地方與圖形互相垂直才能完全呈現圖形的另一半，形成一個線對稱圖形，同時讓學生了解鏡子所放的地方形成一條線，就是所謂的對稱軸。
3. **透過摺紙活動：**教師可以提供日常生活中屬於線對稱的圖形，例如：建築物圖片、動物圖片、正多邊形……等圖片，讓學生透過摺疊的活動，找出對稱軸。實際觀察對稱圖形在對稱軸兩邊的圖形，經過摺疊以後會完全疊合。
4. **對稱點、對稱邊、對稱角的認識：**老師可以指導學生將對稱圖形利用對稱軸摺疊後，觀察發現疊合的圖形中，可以找到相疊合的點、邊及角，並透過命名活動命名為對稱點、對稱邊、對稱角。
5. **畫出線對稱圖形：**老師可以先透過釘板的操作，讓學生利用對稱軸的觀念，拼出對稱圖形的另一半。確認學生已熟悉對稱圖形的性質之後，可以進一步利用方格紙，讓學生畫出對稱圖形的另一半。

(四) 本題教學的加強重點

對於如何判斷是否為線對稱圖形，老師可以讓學生嘗試對選項中的四個圖形，透過鏡子利用鏡射方式，觀察哪一條線所產生的另一半圖形，會產生和題目中相同的圖形（鏡子後方圖形完全重疊）。或者利用對摺的方式，觀察利用哪一條線對摺後，直線兩邊的圖形會完全重疊。這條直線便是圖形的對稱軸，同時藉此讓學生知道線對稱圖形的對稱軸除了是水平線、垂直線之外，斜線也可以是對稱軸。

第 7 題

知識向度	代數	認知向度	概念理解																												
對應分年細目	5-a-01 能在具體情境中，理解乘法對加、減法的分配律，並運用於簡化計算。																														
題目	<div>「媽媽買了豆干 3 串、金針菇 3 包、烤玉米 3 支。媽媽共花了多少元？」下列哪一個算式能算出正確答案？</div> <div><table><tr><th colspan="5">燒烤店價目表</th></tr><tr><td>豆干</td><td>魚板</td><td>烤玉米</td><td>豬血糕</td><td>金針菇</td></tr><tr><td>1 串</td><td>1 串</td><td>1 支</td><td>1 串</td><td>1 包</td></tr><tr><td>13 元</td><td>20 元</td><td>39 元</td><td>20 元</td><td>26 元</td></tr></table></div> <div>① $(13 + 26 + 39) \times 3$ ② $13 + 26 + 39 \times 3$ ③ $(13 \times 26 \times 39) \times 3$ ④ $(13 + 26 + 39) \times (3 + 3 + 3)$</div>			燒烤店價目表					豆干	魚板	烤玉米	豬血糕	金針菇	1 串	1 串	1 支	1 串	1 包	13 元	20 元	39 元	20 元	26 元								
燒烤店價目表																															
豆干	魚板	烤玉米	豬血糕	金針菇																											
1 串	1 串	1 支	1 串	1 包																											
13 元	20 元	39 元	20 元	26 元																											
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：1</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.89</td><td>0.02</td><td>0.02</td><td>0.06</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.98</td><td>0.00</td><td>0.00</td><td>0.01</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.75</td><td>0.06</td><td>0.06</td><td>0.12</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：1	選項率	0.89	0.02	0.02	0.06	0.00		高分組	0.98	0.00	0.00	0.01	0.00		低分組	0.75	0.06	0.06	0.12	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：1																									
選項率	0.89	0.02	0.02	0.06	0.00																										
高分組	0.98	0.00	0.00	0.01	0.00																										
低分組	0.75	0.06	0.06	0.12	0.00																										

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.23，通過率為 0.89，試題難易度 0.87。

(二) 評量目標說明

本題是評量學生能否在具體情境中，理解乘法對加法的分配律，並運用於簡化計算。

(三) 選項表現說明

- 有 89% 的學生選擇正確選項①，顯示多數的學生已經能在具體情境中，理解乘法對加法的分配律，並運用於簡化計算能力。
- 有 6% 的學生選擇④，學生可能對於選項算式中的 3，沒有理解是「3 倍」

的意思，也有可能是雖然知道「3 倍」的意思，但是不會轉換成簡化計算的式子。

3. 有 2% 的學生選擇②，學生可能會運用乘法對加法的分配律來寫這題的算式，但是忘了加上括號。
4. 有 2% 的學生選擇③，學生可能認為每項物品都買 3 串(包、支)應該用乘法解題，所以先用括號將三項不同物品的單價相乘後再乘以 3 倍。

(四) 學生表現說明

1. 本題設計的內容是要學生計算三種不同價錢，且每種皆要買 3 隻的價錢總和。其用意即在檢驗學生是否了解乘法對加法具有分配律的特性，並能用來簡化計算以解決生活中的問題。多數學生能理解用乘法對加法分配律的算式來解決實際問題。
2. 本題難易度為 0.87。有將近九成的學生能理解乘法對加法的分配律，並運用於簡化計算，但仍有約一成的學生無法解題。從高分組與低分組學生的表現來看，約 98% 的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生有 75% 回答正確。有約 12% 的低分組學生選擇④的選項，顯示學生要將「數個不同單價物品的 3 倍」的算式：「 $13 \times 3 + 26 \times 3 + 39 \times 3 =$ 」改算式紀錄成為「 $(13 + 26 + 39) \times 3$ 」是有困難。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

(一) 評量重點

5-a-01 能在具體情境中，理解乘法對加法的分配律，並運用於簡化計算。

(二) 先備的知識

1. 4-a-01 能在具體情境中，理解乘法結合律。
2. 4-a-02 能在四則混合計算中，應用數的運算性質。

(三) 延伸的知識

1. 5-a-03 能熟練運用四則運算的性質，做整數四則混合計算。
2. 6-a-04 能利用常用的數量關係，列出恰當的算式，進行解題，並檢驗答案的合理性。

十二年國教課綱（學習內容）

(一) 評量重點

R-5-2 四則計算規律 (II)：乘除混合計算。「乘法對加法或減法的分配律」。將計算規律應用於簡化混合計算。熟練整數四則混合計算。

(二) 先備的知識

1. R-4-1 **兩步驟問題併式**：併式是代數學習的重要基礎。含四則混合計算的約定（由左往右算、先乘除後加減、括號先算）。學習逐次減項計算。
2. R-4-2 **四則計算規律（I）**：兩步驟計算規則。加減混合計算、乘除混合計算。在四則混合計算中運用數的運算性質。

（三） 延伸的知識

R-6-1 **數的計算規律**：小學最後應認識（1）整數、小數、分數都是數，享有一樣的計算規律。（2）整數乘除計算及規律，因分數運算更容易理解。（3）逐漸體會乘法和除法的計算實為一體。併入其他教學活動。

三、 教學建議

（一） 評量核心概念

利用乘法對加、減法的分配律以簡化計算過程。

（二） 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. **對於四則運算的規則不清楚**：因此學生習慣由左至右進行運算，或是算式中看起來好算的部份先算而造成計算錯誤，如下列兩個錯誤計算的算式：
 - （1） 「 $35-5\times 4=120$ 。」學生由左至右計算，因此先算 $35-5=30$ ，再算 30×4 ，因此計算錯誤。
 - （2） 「 $25\times 7-5=50$ 。」學生先算比較好算的 $7-5$ ，再算 25×2 ，因此計算錯誤。
2. **對於併式的過程及方式不了解**：因此無法理解「括號先算」、「先乘除、後加減」等算則的意義，例如： $7\times 18=126$ ， $7\times 12=84$ ， $126+84=210$ 。如果先算 $18+12=30$ ，再算 $7\times 30=210$ ，可以簡化計算，因此可以併式為 $7\times (18+12)$ 。當學生不了解這個併式過程及括號先算的意義時，就無法理解各種四則運算的算則，而只是一味的從左至右逐項運算。
3. **以為分配律的反推算式就是結合律**：因為 $8\times (3+2)=8\times 3+8\times 2$ 是乘法對加法的分配律，學生誤以為 $8\times 3+8\times 2=8\times (3+2)$ 就是乘法對加法的結合律，其實 $8\times 3+8\times 2=8\times (3+2)$ 只是分配律的反推算式，仍然屬於分配律。
4. **誤將結合律運用在減法與除法運算**：因為加法和乘法有結合律，而以為減法和除法也有結合律。例如：因為 $(8+2)+5=8+(2+5)$ 及 $(12\times 5)\times 2=12\times (5\times 2)$ 都會成立，所以學生誤解 $(32\div 8)\div 2$ 等同 $32\div (8\div 2)$ 或 $(10-8)-2$ 等同 $10-(8-2)$ 也會成立。
5. **誤認交換律適用於減法與除法運算**：因為加法和乘法有交換律，而以為減法和除法也有交換律。例如：因為 $3+4=4+3$ 及 $5\times 6=6\times 5$ 成立，所以學生誤解 $3-5$ 等同 $5-3$ 或 $2\div 8$ 等同 $8\div 2$ ，因此容易出現不去理解題意，直接用大數減小數或用大數除以小數。尤其是分數的除法，如題目是 2 個批薩分給 8 個人，學生常列成錯誤算式： $8\div 2$ 。

6. **錯誤延伸分配律在減法與除法運用：**因為乘法對加、減法有分配律，而以為除法對加、減法也有分配律。因為乘法對加、減法有左右分配律，所以可以說乘法對加、減法的分配律成立；而除法對加減法只有右分配律，即 $(12+6)\div 3=12\div 3+6\div 3$ ，但是 $36\div (9+3)\neq 36\div 9+36\div 3$ ，所以除法對加、減法的分配律不成立。

(三) 核心概念的教學重點

1. 理解題意後再列式及學習併式

教師應利用多步驟問題讓學生從理解題意後有次序的一一系列式解題，待學生能熟練解決多步驟問題後再開始學習併式。教學時需同時呈現多步驟算式，再慢慢過渡到併式記錄問題。

例如：「小明口袋有 1 個 10 元硬幣和 6 個 5 元硬幣，請問小明共有多少元？」學生理解題意後多步驟解題算式可能為： $6\times 5=30$ ， $10+30=40$ ；引導學生併式為 $10+6\times 5=(\quad)$ ，再討論因為乘或除是連加或連減的簡化記錄形式。因此運算位階高於加或減，所以約定「先乘除後加減」。括號先算也是利用併式需求而產生的共同約定算則。

2. 乘法對加法的分配律

乘法對加法有右分配律及左分配律，乘號在加號右邊時，例如： $(6+4)\times 5=6\times 5+4\times 5$ ，稱為乘法對加法的右分配律；乘號在加號左邊時，例如： $8\times (7+3)=8\times 7+8\times 3$ ，稱為乘法對加法的左分配律。

教師應用具體的情境讓學生理解乘法對加法的分配律為何會成立，情境題的數字可以設計成用分配律計算更容易，以產生使用分配律的需求，例如：「一打鉛筆有 12 枝，小明有黃色鉛筆 8 打，小華有紅色鉛筆 2 打，兩人共有幾枝鉛筆？」引導學生發現 $12\times 8+12\times 2=(\quad)$ 比較不容易計算，若能利用分配律改成 $12\times 8+12\times 2=12\times (8+2)=12\times 10=120$ ，計算上會容易許多。

3. 乘法對減法的分配律

乘號在減號右邊時，例如： $(8-5)\times 9=8\times 9-5\times 9$ 」稱為乘法對減法的右分配律；乘號在減號左邊時，「 $10\times (9-4)=10\times 9-10\times 4$ 」稱為乘法對減法的左分配律。

教師應用具體的情境讓學生理解乘法對減法的分配律為何會成立，情境題的數字可以設計成用分配律計算更容易，以產生使用分配律的需求，例如：「一打鉛筆有 12 枝，小明有黃色鉛筆 8 打，小華有紅色鉛筆 2 打，小明比小華多幾枝鉛筆？」引導學生發現 $12\times 8-12\times 2=(\quad)$ 比較不容易計算，若能利用分配律改成 $12\times 8-12\times 2=12\times (8-2)=12\times 6=72$ ，計算上會容易許多。

4. 加法與乘法的結合律

在連加算式中， $(5+3)+7=5+(3+7)$ ，所以加法有結合律；在連乘

算式中， $(17 \times 5) \times 2 = 17 \times (5 \times 2)$ ，所以乘法也有結合律。

教師應用具體的情境讓學生理解加法與乘法的結合律為何會成立，情境題的數字可以設計成用結合律計算更容易，以產生使用結合律的需求，如有一個長 24 公分、寬 8 公分、高 5 公分長方體，它的體積是多少？」由於長方體是由許多 1 立方公分的白色積木堆疊而來，所以計算體積＝長×寬×高時，可以先算前面，為「 $(24 \times 8) \times 5$ 」；也可以先算後面，為「 $24 \times (8 \times 5)$ 」。其體積雖然相同，但學生會發現先算 8×5 會比較容易計算。

(四) 本題教學的加強重點

1. 學生瞭解題意後，要求學生進行列式，學生有可能分別算出三種東西的價錢然後再相加，如： $13 \times 3 + 26 \times 3 + 39 \times 3$ 。學生也有可能將每項物品的單價先加總起來再乘以 3，如： $(13 + 26 + 39) \times 3$ 。
2. 老師引導學生觀察這兩種算式有什麼差異？學生可能發現一個算式有括號，另一個算式沒有括號。可能發現「 $\times 3$ 」寫 3 次，另一個寫 1 次。
3. 最後引導學生發現等號兩邊計算後是一樣的結果並能理解 $13 \times 3 + 26 \times 3 + 39 \times 3 = (13 + 26 + 39) \times 3$ 。因此，就能從左邊的算式簡化成右邊算式。這就是利用乘法對加法的分配律可以用來簡化計算。

第 8 題

知識向度	數與計算	認知向度	程序執行																												
對應分年細目	5-n-07 能用通分做簡單異分母分數的比較與加減。																														
題目	一個竹簍重 $3\frac{2}{3}$ 公斤，裝入一些柚子後，連竹簍共重 $11\frac{4}{7}$ 公斤，裝入的柚子是多少公斤？ ① $15\frac{5}{21}$ 公斤 ② $8\frac{2}{4}$ 公斤 ③ $8\frac{2}{21}$ 公斤 ④ $7\frac{19}{21}$ 公斤																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：4</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.07</td><td>0.12</td><td>0.18</td><td>0.61</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.02</td><td>0.01</td><td>0.07</td><td>0.90</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.17</td><td>0.30</td><td>0.28</td><td>0.25</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：4	選項率	0.07	0.12	0.18	0.61	0.00		高分組	0.02	0.01	0.07	0.90	0.00		低分組	0.17	0.30	0.28	0.25	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：4																									
選項率	0.07	0.12	0.18	0.61	0.00																										
高分組	0.02	0.01	0.07	0.90	0.00																										
低分組	0.17	0.30	0.28	0.25	0.00																										

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.64，通過率為 0.61，試題難易度 0.57。

(二) 評量目標說明

本題旨在了解學生是否理解通分的概念，並評量學生是否能運用通分的方式進行異分母分數的減法計算。

(三) 選項表現說明

- 有 61% 的學生選擇正確選項④，顯示約 6 成的學生得能夠運用通分的方式進行異分母分數的減法計算：

$$11\frac{4}{7} - 3\frac{2}{3} = 11\frac{4 \times 3}{7 \times 3} - 3\frac{2 \times 7}{3 \times 7} = 11\frac{12}{21} - 3\frac{14}{21} = 10\frac{33}{21} - 3\frac{14}{21} = 7\frac{19}{21}。$$

- 有 18% 的學生選擇選項③，這些學生可能在通分後，發現被減數的分子小於減數，誤將大數減小數：

$$11\frac{4}{7}-3\frac{2}{3}=11\frac{4\times 3}{10\times 3}-3\frac{2\times 7}{3\times 7}=11\frac{12}{21}-3\frac{14}{21}=(11-3)+\frac{14-12}{21}=8\frac{2}{21}。$$

3. 有 12% 的學生選擇選項②，這些學生可能不了解通分的方式，直接將兩數的分母與分子相減：

$$11\frac{4}{7}-3\frac{2}{3}=(11-3)+\frac{14-12}{7-3}=8\frac{2}{4}。$$

4. 有 7% 的學生選擇選項①，這些學生可能誤解題意，所以將兩數相加：

$$11\frac{4}{7}+3\frac{2}{3}=11\frac{4\times 3}{10\times 3}+3\frac{2\times 7}{3\times 7}=11\frac{12}{21}+3\frac{14}{21}=11\frac{2}{21}。$$

(四) 學生表現說明

1. 本題的命題設計為簡單異分母分數的減法應用問題，主要希望了解學生對於等值分數的基本概念是否理解，並能運用通分方式解決簡單異分母分數的減法計算問題的能力。
2. 本題通過率為 61%。有約 6 成的學生已能熟練運用通分解決異分母分數的加減問題，但仍有近 4 成的學生，概念並不清楚。從高分組與低分組學生的表現來看，90% 的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生只有 25% 回答正確，甚至有兩個錯誤選項的選答率高於正確選項。顯示低分組學生中有許多學生對於等值分數、通分等概念並不熟悉，因此容易無法成功解題。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

(一) 評量重點

5-n-07 能用通分做簡單異分母分數的比較與加減。

(二) 先備的知識

1. 4-n-09 能認識等值分數，進行簡單異分母分數的比較，並用來做簡單分數與小數的互換。
2. 5-n-06 能用約分、擴分處理等值分數的換算。

(三) 延伸的知識

1. 5-n-08 能理解分數乘法的意義，並熟練其計算，解決生活中的問題。
2. 5-n-09 能理解除數為整數的分數除法的意義，並解決生活中的問題。
3. 6-n-04 能理解分數除法的意義及熟練其計算，並解決生活中的問題。

十二年國教課綱（學習內容）

(二) 評量重點

N-5-4 異分母分數：用約分、擴分處理等值分數並做比較。用通分做異分母分

數的加減。養成利用約分化簡分數計算習慣。

(三) 先備的知識

N-4-6 **等值分數**：由操作活動中理解等值分數的意義。簡單異分母分數的比較、加、減的意義。簡單分數與小數的互換。

(四) 延伸的知識

1. N-5-5 **分數的乘法**：整數乘以分數、分數乘以分數的意義。知道用約分簡化乘法計算。處理乘積一定比被乘數大的錯誤類型。透過分數計算的公式，知道乘法交換律在分數也成立。
2. N-5-6 **整數相除之分數表示**：從分裝（測量）和平分的觀點，分別說明整數相除為分數之意義與合理性。
3. N-5-7 **分數除以整數**：分數除以整數的意義。最後將問題轉化為乘以單位分數。
4. N-6-3 **分數的除法**：整數除以分數、分數除以分數的意義。最後理解除以一數等於乘以其倒數之公式。

三、教學建議

(一) 評量核心概念

簡單異分母分數的加減問題。

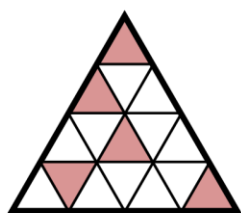
(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. **等分的概念不足**：學生可能知道一半就是分成兩部分，但沒有等分的概念。因此在處理部分/全體的問題時，會有錯誤的迷思。例如：將 $\frac{1}{4}$ 張色紙著色，很有可能因為沒有等分的概念，而犯了如【圖 8-1】的錯誤。

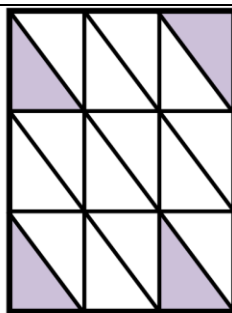


【圖 8-1】

2. **缺乏單位量的概念**：單位量是指我們把什麼當作 1，學生要先學會確認什麼是「1」，否則常會產生如以下舉例的迷思概念。從中我們能發現學生無法指認問題中的單位量、只考慮到問題中的分子（分割後的量）及分母（總分割份數），並且解題過程深受分子、分母的影響。
 - (1) 1 個平分成 8 份的披薩，取其中 2 份披薩，學生誤以為取 $\frac{1}{2}$ 個披薩可看出學生誤把部分量當成全體量，寫在分數的分母。學生要能掌握：1 個蛋糕是單位量，8 份是全體量，2 份是部分量。
 - (2) 「如【圖 8-2】塗色部分佔圖形的幾分之幾？」



答： $\frac{11}{16}$

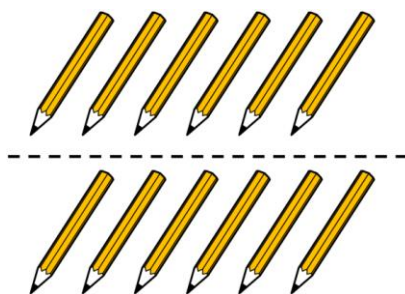


答： $\frac{4}{14}$

【圖 8-2】

學生無法將整個圖形當作單位量，而將圖形看成塗色部分和空白部分的比較結果。學生要能掌握：整個圖形是單位量，圖形的分割份數是整體量，塗色部分的份數是部分量。

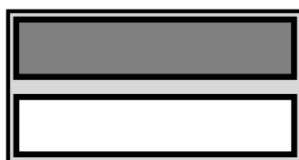
- (3) 「一盒鉛筆有 12 枝，哥哥用掉全部的 $\frac{1}{2}$ ，問用掉幾枝鉛筆？」



【圖 8-3】

學生可能會受到分數符號 $\frac{1}{2}$ 中的分子的影響回答 1 枝，也可能受到分母的影響回答 2 枝。學生要能掌握：「全部的 $\frac{1}{2}$ 」意指將整體單位量（12 枝）平分成 2 份，取其中 1 份（6 枝）的部分量與整體量的關係。

- (4) 「一盒巧克力有 2 條，小華吃掉 $\frac{1}{2}$ 盒，請用筆把小華吃掉的部份著顏色」，如【圖 8-4】的情形。學生要能掌握：一個單位量是 1 盒不是 1 條，以釐清全部內容物就是一個單位量。



【圖 8-4】

3. 分數加法運算的常見錯誤

(1) 分子加分子，分母加分母： $\frac{2}{5} + \frac{3}{6} = \frac{2+3}{5+6} = \frac{5}{11}$ 。

(2) 分母相乘，分子相加： $\frac{2}{5} + \frac{3}{6} = \frac{2+3}{5 \times 6} = \frac{5}{30}$ 。

(3) 分母相乘，分子相乘： $\frac{3}{5} + \frac{2}{7} = \frac{3 \times 2}{5 \times 7} = \frac{6}{35}$ 。

4. 分數減法運算的常見錯誤

(1) 整數減整數，分子減分子，分母減分母： $3\frac{4}{6} - 1\frac{3}{4} = 2\frac{1}{2}$ 。

(2) 分母通分後，分子卻用多的減少的：

$$\begin{aligned} 3\frac{4}{6} - 1\frac{3}{4} &= 3\frac{16}{24} - 1\frac{18}{24} = (3-1) + (\frac{16}{24} - \frac{18}{24}) \\ &= 2\frac{2}{24} = 2\frac{1}{12}。 \end{aligned}$$

(3) 分母相乘當作通分分母，分子卻用多的減少的： $3\frac{4}{6} - 1\frac{3}{4} = 2\frac{1}{24}$ 。

(三) 核心概念的教學重點

學生需掌握正確的分數概念，才能進行有意義的分數運算。以下將分數概念的教學到分數加減運算的教學，依序說明如下：

1. **認識單位分數：**單位分數指的是分子是1，分母是正整數的真分數，例如： $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{4}$ 、…。單位分數的意義是將基準單位量等分割成數份後所取出其中的一份。它是學習分數加減乘除運算的先備基礎概念，因此建立單位分數的概念非常重要。例如：當學生知道 $\frac{3}{8}$ 是3個 $\frac{1}{8}$ 合起來的，那麼就能合理解釋「 $\frac{2}{8} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$ 」，而不會出現 $\frac{5}{16}$ 的迷思概念；延伸到學習「分數×整數」時，就能理解「 $\frac{2}{7} \times 3 = \frac{6}{7}$ 」，知道 $\frac{2}{7}$ 就是「2個 $\frac{1}{7}$ 」，「2個 $\frac{1}{7}$ 的3倍就是6個 $\frac{1}{7}$ 」，合起來就是 $\frac{6}{7}$ ，也就不會出現 $\frac{6}{21}$ 的迷思概念。所以，單位分數是建立分數起始的重要概念，明白單位分數才能在分數計算學習上做有意義的解釋。

2. 認識通分的意義

- (1) **通分的定義：**通分是指把不同分母的分數，轉換成同分母分數的過程。
- (2) **通分的目的：**透過分數大小的比較活動，學生察覺當兩分數的分母相同（具有相同的單位分數）時，可以直接利用它們的分子決定大小；但是當兩分數的分母不同時（具有不同的單位分數），就無法直接透

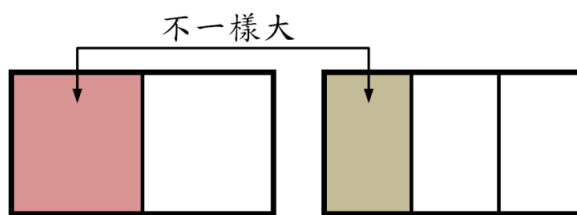
過分子決定大小，引發學生需要將異分母分數化為同分母分數的需求（計數的單位分數變成相同），此時才能依照分子決定大小。以此為先備經驗，進入異分母分數的加減計算，也會遇到相同的問題——不同的單位分數，表示不同大小的計數單位，也有化為同分母分數的需求。

- (3) **通分的方法：**可先求出各分母的最小公倍數，然後將各分數擴分為分母為最小公倍數的等值分數。

3. 異分母分數的加減

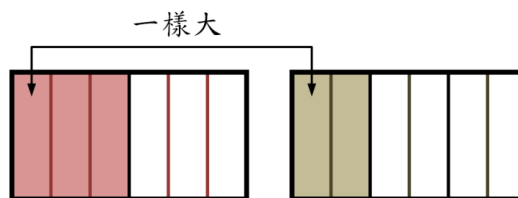
做一般異分母分數之比較與加減時，必須利用約分與擴分，將兩異分母的分數通分成為兩同分母之等值分數後，再做比較與加減。教師別太快進入公式算則，多一些概念性知識的教學，讓學生有充分的時間探索與思考而發現：因為兩個分數等份的份數不同，每一份單位分數不一樣大，所以不能直接將份數相加，因此要先通分，把它再等分成相同的份數，成為每小份等分的單位分數，才可以將份數相加。例如：有兩條相同的蛋糕，其中一條蛋糕哥哥吃了 $\frac{1}{2}$ 條，另一條蛋糕弟弟吃了 $\frac{1}{3}$ 條，他們共吃了幾條蛋糕？

教師可引導學生思考，如何將計數的單位分數變成一樣大小呢？可以在圖上做切割讓其計數的單位大小變成一樣大。首先，哥哥吃的蛋糕是平分成2塊，弟弟是平分成3塊，如【圖8-5】：



【圖8-5】

但是哥哥的1塊蛋糕和弟弟的1塊蛋糕不一樣大，所以接下來的目標是要將他們的分割後的蛋糕都要變成一樣大，所以要把哥哥的每1塊蛋糕再平分成3小份（變成6小份中的3小份），弟弟的每1塊蛋糕平分成2小份（變成6小份中的2小份），這時候哥哥和弟弟的蛋糕最後的切割份數都是6小份，如【圖8-6】，且每小份都一樣大，因此就可以用同分母分數的概念進行加減計算。



【圖8-6】

上圖的分數運算的過程：

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3} + \frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}。$$

先透過情境題去理解異分母分數加減的計算概念，讓學生形成異分母分

數加減的計算規則，教師幫助學生熟練程序性知識，即是所謂的分母不同的分數相加（減）時，先通分化為同分母分數，再相加（減）。

4. **培養分數數感**：透過觀察，可用約分或假、帶分數之間的換算以簡化計算。學生對於計算常會進入背公式的運算規則，而沒有做有意義的運算。例如題目 $\frac{9}{8} + \frac{7}{6}$ ，一般學生看到題目沒有思考更適當的策略就會直接採取算則，用通分的方法算出答案：

$$\frac{9}{8} + \frac{7}{6} = \frac{9 \times 6}{8 \times 6} + \frac{7 \times 8}{6 \times 8} = \frac{54}{48} + \frac{56}{48} = \frac{110}{48} = 2\frac{14}{48}。$$

若能先觀察題目中的分數，會發現假分數可以先轉換成帶分數，以簡化計算過程，如 $\frac{9}{8} + \frac{7}{6} = 1\frac{1}{8} + 1\frac{1}{6} = 2 + \frac{1}{8} + \frac{1}{6} = 2\frac{14}{48}$ 。

5. **帶分數的加減法**：帶分數的加減法則較為繁複，因為它牽涉到整數的加減法則，亦牽涉到分數的加減法則，尤其在分數不夠減的情況之下，運算更為繁複，例如： $5\frac{2}{3} - 3\frac{6}{7}$ ，所以必須先將 $5\frac{2}{3}$ 轉換成 $4\frac{5}{3}$ ，整數部分的計算為 $4 - 3$ ，分數部分的計算是 $\frac{5}{3} - \frac{6}{7}$ 。

(四) 本題教學的加強重點

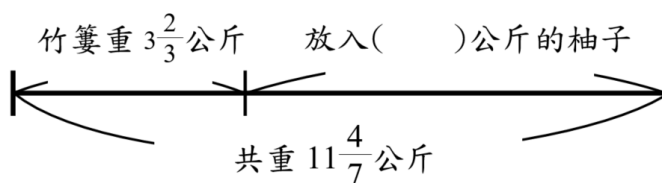
1. **澄清題意**：利用波利亞的數學問題解題四步驟來引導學生。

步驟1：澄清問題，了解題意。

步驟2：擬定解題策略（列出算式）。

步驟3：執行解題策略（算式運算）。

步驟4：回顧省思（或驗算）。讓學生能理解本題為異分母分數的減法問題，並能依題意列式： $11\frac{4}{7} - 3\frac{2}{3} = ()$ 。若學生對於理解題意仍有困難，可輔以線段圖（如【圖8-7】）幫助理解數量關係及列式：



【圖8-7】

2. **先通分再加減**：提醒學生計算帶分數的減法時，被減的分數部份分子較小時的處理方式。

$$\begin{aligned} 11\frac{4}{7} - 3\frac{2}{3} &= 11\frac{4 \times 3}{7 \times 3} - 3\frac{2 \times 7}{3 \times 7} \\ &= 11\frac{12}{21} - 3\frac{14}{21} \\ &= 10\frac{33}{21} - 3\frac{14}{21} \end{aligned}$$

$$=7\frac{19}{21}^{\circ}$$

第 9 題

知識向度	數與計算	認知向度	程序執行																												
對應分年細目	5-n-03 能熟練整數四則混合計算。																														
題目	求 $49 - 42 \div 7 \times 3 + 4 = ?$ ① 133 ② 51 ③ 35 ④ 7																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：3</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.04</td><td>0.11</td><td>0.66</td><td>0.19</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.01</td><td>0.04</td><td>0.93</td><td>0.02</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.08</td><td>0.18</td><td>0.31</td><td>0.43</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：3	選項率	0.04	0.11	0.66	0.19	0.00		高分組	0.01	0.04	0.93	0.02	0.00		低分組	0.08	0.18	0.31	0.43	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：3																									
選項率	0.04	0.11	0.66	0.19	0.00																										
高分組	0.01	0.04	0.93	0.02	0.00																										
低分組	0.08	0.18	0.31	0.43	0.00																										

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.62，通過率為 0.65，試題難易度 0.62。

(二) 評量目標說明

本題旨在評量學生是否理解並熟練四則運算規則，包含計算時順序由左至右，先乘（或除）再加（或減），並運用於計算中。

(三) 選項表現說明

- 有 66% 的學生選擇正確選項③，顯示近七成的學生已經能清楚掌握並熟練四則運算的算則，包含由左至右、先乘（或除）再加（或減）。
- 有 19% 的學生選擇選項④，這些學生可能僅掌握了四則運算中計算要由左至右的規約，未注意到先乘（或除）再加（或減），因此計算結果為 7。
- 有 11% 的學生選擇選項②，這些學生可能雖然知道四則運算的由左至右以及先乘除後加減的規約，但對於「乘（或除）再加（或減）」產生乘優先於除的迷思，因此計算結果為 51。
- 有 4% 的學生選擇選項①，這些學生可能對於四則運算規則不甚清楚，因此看到較好計算的數字 $42 \div 7$ 就先行計算，接著又採由左至右的計算方式，未

注意到先乘（或除）再加（或減），因此計算結果為 133。

（四） 學生表現說明

1. 本題的命題設計為基本題，主要希望了解學生對於四則運算規則，包含計算時順序「由左至右、先乘（或除）再加（或減）」概念是否完全清楚，由於題目數字經過設計，學生若能按照四則運算規則正確計算，即可輕易算出答案。
2. 本題的通過率為 0.62，表示有六成二的學生已能正確運用四則運算規則來計算，但仍有近四成多的學生，概念並不清楚而造成計算錯誤。從高分組與低分組學生的表現來看，高分組學生的答對率 93%，低分組學生的答對率 31%，代表有超過一半的低分組學生對於四則運算的算則並不熟悉或一知半解，以致於造成計算錯誤。教師在進行相關教學時，要注意引導學生從生活情境中去理解各種算則產生的需求與必要性。

二、 教材地位分析

97 課綱（分年細目）

（一） 評量重點

5-n-03 能熟練整數四則混合計算。

（二） 先備的知識

1. 4-n-04 能在具體情境中，解決兩步驟問題，並學習併式的記法與計算。
2. 4-n-05 能做整數四則混合計算（兩步驟）。

（三） 延伸的知識

1. 6-n-05 能在具體情境中，解決分數的兩步驟問題，並能併式計算。
2. 6-n-08 能在具體情境中，解決小數的兩步驟問題，並能併式計算。

十二年國教課綱（學習內容）

（一） 評量重點

R-5-2 四則計算規律（II）：乘除混合計算。「乘法對加法或減法的分配律」。將計算規律應用於簡化混合計算。熟練整數四則混合計算。

（二） 先備的知識

1. R-4-1 兩步驟問題併式：併式是代數學習的重要基礎。含四則混合計算的約定（由左往右算、先乘除後加減、括號先算）。學習逐次減項計算。
2. R-4-2 四則計算規律（I）：兩步驟計算規則。加減混合計算、乘除混合計算。在四則混合計算中運用數的運算性質。

（三） 延伸的知識

R-6-1 數的計算規律：小學最後應認識（1）整數、小數、分數都是數，享有一

樣的計算規律。(2) 整數乘除計算及規律，因分數運算更容易理解。(3) 逐漸體會乘法和除法的計算實為一體。併入其他教學活動。

三、教學建議

(一) 評量核心概念

熟練解決整數加、減、乘、除混合計算的問題。

(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. 一律由左至右計算

學生可能對於整數四則運算順序的規約並不了解，因此不論算式中是否同時具有加、減、乘、除或是有括號，皆由左至右逐一進行計算。

例如：「 $20+4\times 5-3=$ 」，學生可能會先計算 $20+4=16$ ，接著將 $16\times 5=80$ ，再算 $80-3=77$ ，因此而得到錯誤的結果，此即學生了解其運用四則運算規約，而只知由左至右逐步計算。

2. 以為先算乘法，再算除法

學生可能因為背誦口訣「先乘除後加減」，誤解口訣中的運算規則，以為乘法的運算順序先於除法。另外也有可能是因為括號通常先教，所以學生最熟悉，因此容易忽略其他的運算規則。

例如：「 $48\div 6\times 2=$ 」，學生可能先算 $6\times 2=12$ ，再算 $48\div 12=4$ ，所以誤算答案為 4。

3. 以為先算加法，再算減法

學生可能只知因為背誦口訣「先乘除後加減」，誤解口訣中的運算規則，以為加法的運算順序先於減法。

例如：「 $20-3+7=$ 」，學生可能先算 $3+7=10$ ，再算 $20-10=10$ ，所以誤算答案為 10。

4. 對於併式的過程及方式不了解

當學生不了解併式的意義及算則規約產生的情況時，學生容易不理解「括號先算」、「先算乘或除，後算加或減」等算則的意義。

例如： $7\times 18=126$ ， $7\times 12=84$ ， $126+84=210$ ，如果先算 $18+12=30$ ，再算 $7\times 30=210$ ，可以簡化計算，因此可以併式為 $7\times (18+12)$ 。當學生不了解這個併式過程及括號先算的意義時，就無法理解各種四則運算的算則，而只是一味的從左至右逐項運算。

5. 對多步驟問題的題意理解有困難：五年級整數混合運算學習的是三步驟應用問題，學生對複雜的應用問題情境不能充分理解題意，因此容易錯誤列式。

(三) 核心概念的教學重點

學生在學習四則運算的算則時，應該利用生活化的情境，讓學生理解為了簡

化複雜的列式及運算過程，因此逐漸形成運算規則的共識：

1. 由左至右計算

學生在學習整數四則運算之前即具有「先算左邊，再算右邊」的舊經驗。唯先前的學習情境是較為單純的單步驟或二步驟解題，在進入較為複雜的情境（多步驟）之後，人們首先形成「由左至右計算」的規約。

例如：「 $23-30+15=$ 」和「 $3\times 15\div 5=$ 」，因為式子中的運算符號為「+」、「-」與「 \times 」、「 \div 」與學生先前的計算經驗雷同，因此學生多數能執行由左至右計算，部分學生可能會先進行「 $30+15$ 」以及「 $15\div 5$ 」的運算，雖然答案相同，唯在進行教學時，應適當檢視計算方式與題意是否相符。

2. 括號部分先計算

在一個算式中如果出現括號，則表示「必須先處理的部分」，教師應從情境布題，再輔以提問，讓學生產生「某部分必須先處理」的體會，亦即出現「使用括號的需求感」。例如：「包子店新開幕，每個包子一律 5 元，媽媽用 500 元買了 6 個肉包，8 個菜包，應該找回多少元？」學生依據題意，可分別列出下列算式： $5\times 6=$ （ ）（買 6 個肉包的錢），及 $5\times 8=$ （ ）（買 8 個菜包的錢）。

這時老師可輔以提問：「媽媽買包子一共花多少錢？」多數學生會將兩者相加，以「 $5\times 5+6\times 5$ 」合併算式，教師再提問：「媽媽付了 500 元，應該找回多少錢？」，學生可能會寫成： $500-5\times 6+5\times 8=$ （ ）。

此時，即應請學生思考這個算式的計算是否符合題意，學生提出應該要「先算」肉包和菜包一共要多少錢，再用 500 元減去花費的總額，即是老師提問之應該找回的金額。在情境設計及教師的提問引導下產生「括號先算」的需求，因此，我們可以使用括號將上述算式寫成： $500-(5\times 5+6\times 5)$ 。

3. 先算乘或除，後算加或減

隨著運算情境的複雜，為了減少括號的使用，人們約定當算式中同時出現加、減或乘、除在一個算式中時，要先算乘除再算加減，因此在這個運算歸約的學習，亦應設計生活化的情境，協助學生理解「先算乘（或除），後算加（或減）」歸約的產生。

以 $53-3\times 15$ 為例，在解題時，應先算「 3×15 」的部分，得到 45，再計算 $53-45=8$ 。

4. 理解題意後再列式及學習併式

教師應利用多步驟問題讓學生從理解題意後有次序的一一系列式解題，待學生能熟練解決多步驟問題後再開始學習併式。併式教學時需同時呈現多步驟算式，再慢慢併式過渡到能以一個算式記錄問題。

5. 例如：「小明口袋有 1 個 10 元硬幣和 6 個 5 元硬幣，請問小明共有多少元？」

學生理解題意後多步驟解題算式可能為： $6\times 5=30$ ， $10+30=40$ ；引導學生

併式為 $10+6\times 5=(\quad)$ ，再討論因為乘或除是連加或連減的簡化記錄形式，因此運算位階高於加或減，所以約定「先算乘或除，後算加或減」的算則。

(四) 本題教學的加強重點

本題題目為「 $49-42\div 7\times 3+4$ 」屬整數四則運算中「加、減、乘、除混合」的多步驟題型，其中會應用到的四則運算算則包含「由左至右」及「先乘（或除）再加（或減）」，建議與學生再次澄清以下幾點迷思：

1. 「由左至右」及「先乘（或除）再加（或減）」算則何者為優先？
2. 「先乘（或除）再加（或減）」中「乘」優先於「除」嗎？算式中遇到「乘」和「除」時要如何決定何者先算？
3. 承上題，「加」和「減」也是一樣的原則嗎？

澄清完以上的迷思概念後，宜讓學生由兩步驟題目開始併式紀錄後進行運算，慢慢地增加為多步驟併式紀錄並進行運算，最好在有情境脈絡的文字題下進行教學，這樣當學生產生運算規則錯誤時，可以利用情境脈絡提醒學生運算規則。

第 10 題

知識向度	數與量	認知向度	解題思考																												
對應分年細目	5-n-02 能在具體情境中，解決三步驟問題，並能併式計算。																														
題目	<p>「小明和姊姊買了一件 2999 元的洋裝和一個 1895 元的皮包，送給媽媽當作生日禮物。爸爸幫忙付了 2000 元後，姊弟兩人還要各自分攤多少元？」下列哪一個算式能算出正確答案？</p> <p>① $(2999 + 1895) \div 2 - 2000$ ② $(2999 + 1895 - 2000) \div 2$ ③ $(2999 + 1895) \div 2 + 2000$ ④ $(2999 + 1895 + 2000) \div 2$</p>																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：2</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.09</td><td>0.84</td><td>0.03</td><td>0.04</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.01</td><td>0.98</td><td>0.01</td><td>0.00</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.21</td><td>0.60</td><td>0.09</td><td>0.10</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：2	選項率	0.09	0.84	0.03	0.04	0.00		高分組	0.01	0.98	0.01	0.00	0.00		低分組	0.21	0.60	0.09	0.10	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：2																									
選項率	0.09	0.84	0.03	0.04	0.00																										
高分組	0.01	0.98	0.01	0.00	0.00																										
低分組	0.21	0.60	0.09	0.10	0.00																										

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.38，通過率為 0.84，試題難易度 0.79。

(二) 評量目標說明

本題旨在評量學童是否能在具體情境中提取正確資訊，依題意併式計算求出解答，要能夠確認所需支付的費用，再除以正確的人數。

(三) 選項表現說明

- 有 84% 的學生選擇選項②，顯示大部分的學生已經能掌握情境，知道兩人合買的總價需要先扣除爸爸幫忙付的錢，才是不足的金額，再除以需要負擔的人數，算式為 $(2999 + 1895 - 2000) \div 2$ 。
- 有 9% 的學生選擇①，學生可能未注意應將兩樣商品加起來後的價格，應先扣掉爸爸贊助款項再除以 2，算式為 $(2999 + 1895) \div 2 - 2000$ ，而選擇選項①。

3. 有 4% 的學生選擇選項④，學生可能未注意爸爸贊助的款項應該扣掉，而將題目中的數字全部相加再除以 2，算式為 $(2999 + 1895 + 2000) \div 2$ ，而選擇選項④。
4. 有 3% 的學生選擇選項③，這學生可能將兩樣商品價格加起來並除以 2 後，又誤將應扣掉的贊助款項加上，算式為 $(2999 + 1895) \div 2 + 2000$ ，而選擇選項③。

(四) 學生表現說明

1. 本題主要在評量學童是否能在具體情境中提取正確資訊，依題意併式計算求出解答，要能夠確認所需支付的費用，再除以正確的人數。
2. 本題難易度為 0.84。有將近 8 成多的學生已能掌握題意來列出算式，但仍有 1 成 5 的學生，概念並不清楚。從低分組與低分組學生的表現來看仍有 4 成的學生答錯。低分組學生中 21% 認為應先將兩件物品先除以 2 再扣除爸爸贊助的 2000 元。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

(一) 評量重點

5-n-02 能在具體情境中，解決三步驟問題，並能併式計算。

(二) 先備的知識

4-n-04 能在具體情境中，解決兩步驟問題，並學習併式的記法與計算。

(三) 延伸的知識

1. 6-n-05 能在具體情境中，解決分數的兩步驟問題，並能併式計算。
2. 6-n-08 能在具體情境中，解決小數的兩步驟問題，並能併式計算。

十二年國教課綱（學習內容）

(一) 評量重點

1. N-5-2 **解題**：多步驟應用問題。除「平均」之外，原則上為三步驟解題應用。
2. R-5-1 **三步驟問題併式**：建立將計算步驟併式的習慣，以三步驟為主。介紹「平均」。與分配律連結。

(二) 先備的知識

1. R-4-1 **兩步驟問題併式**：併式是代數學習的重要基礎。含四則混合計算的約定（由左往右算、先乘除後加減、括號先算）。學習逐次減項計算。
2. R-4-2 **四則計算規律（I）**：兩步驟計算規則。加減混合計算、乘除混合計算。在四則混合計算中運用數的運算性質。

(三) 延伸的知識

N-6-5 解題：整數、分數、小數的四則應用問題。二到三步驟的應用解題。含使用概數協助解題。

三、教學建議

(一) 評量核心概念

解決減、乘、除三步驟問題並能併式計算。

(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. **未能理解題意**：在不理解題意的情況之下，可能會將題目出現的數字依序先後順序寫出並隨意加入 $+$ 、 $-$ 、 \times 、 \div 的運算符號。如同本能力檢測試題，學生會選答錯誤③的情形。
2. **未能理解四則運算規約的使用**：
 - (1) 應該由左而右的計算，有可能出現加法先算的錯誤情形，例如 $56-10+6=56-16$ ；也有可能出現乘法先算的錯誤情形，例如 $100\div4\times5=100\div20$ 。
 - (2) 應該先算乘（除），再算加（減），卻有可能出現由左而右計算的錯誤情形，例如 $24+6\times8=30\times8$ 。
 - (3) 不清楚括號表示括號內的算式先算的概念，就會出現併式時，若想要加（減）的運算優先於乘（除）的運算，不知道此時需要使用（ ）來表示。
3. **併式記錄錯誤**：以本能力檢測試題為例，針對前兩步驟來看併式問題，先算 $45-5=40$ ，再算 $40\times30=1200$ ，將兩步驟算式寫成併式紀錄時，先算的部分沒有加上（ ），很容易寫成 $45-5\times30$ ，如學生會選答錯誤②的情形。
4. **逐次減項的紀錄過程有誤，但最後答案正確**：以 $(45-5)\times30\div2$ 為例，學生的作法： $(45-5)\times30\div2=40\times30=1200\div2=600$ ，可以發現學生在第二步驟寫 40×30 時，卻沒繼續寫出 $\div2$ 。

(三) 核心概念的教學重點

多步驟的問題情境下，學生要從過去經驗的解題策略，進展到能用一個併式表示題意，其教學的順序如下：

- (1) 教師設計三步驟情境問題，帶領學生理解題意後，能夠解決三步驟問題。
- (2) 能用一個併式，記錄三步驟問題的解題活動，並認識「括號先算」、「先乘除後加減」及「由左往右算」運算次序的約定。
- (3) 能先列式，再用逐次減項的記法記錄三步驟問題的解題過程。

舉例 1：「小明口袋有 1 個 10 元硬幣和 6 個 5 元硬幣，請問小明共有多少元？」學生理解題意後多步驟解題算式可能為： $6 \times 5 = 30$ ， $10 + 30 = 40$ ；引導學生併式為 $10 + 6 \times 5 = (\quad)$ ，再討論因為乘或除是連加或連減的簡化紀錄形式，因此運算位階高於加或減，所以約定「先乘除後加減」。括號先算也是利用併式需求而產生的共同約定算則。

舉例 2：生活情境問題：「媽媽買了一盒巧克力禮盒，哥哥每天吃 4 顆巧克力，妹妹每天吃 3 顆巧克力，兩人連續吃了 5 天後，禮盒裡還剩下 15 顆巧克力，一盒巧克力禮盒總共有多少顆巧克力？」，學生有可能三步驟問題的解法：

$$\begin{aligned}4 \times 5 &= 20 \\3 \times 5 &= 15 \\20 + 15 + 15 &= 50.\end{aligned}$$

引導學生寫成一個併式 $(4 \times 5) + (3 \times 5) + 15$ ；用逐次減項的記法紀錄三步驟問題的解題過程 $(4 \times 5) + (3 \times 5) + 15 = 20 + 15 + 15 = 35 + 15 = 50$ 。

先讓學生有三步驟問題解題成功的經驗，再討論用併式記錄三步驟問題的解題活動；當學生有一些併式紀錄的經驗，再要求學生用併式列出三步驟問題的算式，並利用逐次減項的記法記錄解題活動。

(一) 本題教學的加強重點

在進行整數四則混合運算的教學時，應先帶領學生進行審題，引導學生依據題意進行列式，後續並能依據題意，以適當的運算符號進行併式，並解決問題。以此題為例

1. 教師帶領學生理解題意後，再進行解題活動。
2. 先把題目數量變小，讓學生嘗試解題，如：蛋糕一個 35 元、牛奶一杯 25 元，用了優待卷付了 50 元後，不夠的錢兩人均分，一個人要付多少元。
3. 先練習以簡化後的三步驟問題為例，以分別列式紀錄解題步驟成功解題後，再試著以併式紀錄方式完成解題。
4. 最後再回到檢測試題，讓學生自行解題。

第 11 題

知識向度	數與計算	認知向度	程序執行																												
對應分年細目	5-n-14 能認識比率及其在生活中的應用。																														
題目	昆蟲國小今年飼養蝴蝶 300 隻，其中 60%是樺斑蝶，其餘是無尾鳳蝶。下列敘述何者 <u>錯誤</u> ？ ① 無尾鳳蝶的數量比樺斑蝶少 ② 無尾鳳蝶數量占蝴蝶飼養總量的 $\frac{2}{5}$ ③ 平均每 100 隻蝴蝶中有 60 隻是樺斑蝶 ④ 無尾鳳蝶與樺斑蝶的數量相差 20 隻																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：4</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.09</td><td>0.13</td><td>0.20</td><td>0.58</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.01</td><td>0.05</td><td>0.09</td><td>0.85</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.20</td><td>0.30</td><td>0.21</td><td>0.29</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：4	選項率	0.09	0.13	0.20	0.58	0.00		高分組	0.01	0.05	0.09	0.85	0.00		低分組	0.20	0.30	0.21	0.29	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：4																									
選項率	0.09	0.13	0.20	0.58	0.00																										
高分組	0.01	0.05	0.09	0.85	0.00																										
低分組	0.20	0.30	0.21	0.29	0.00																										

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.56，通過率為 0.58，試題難易度 0.57。

(二) 評量目標說明

本題是比率與百分率的換算問題，評量學生是否能理解比率、百分率的意義，並能處理應用問題。

(三) 選項表現說明

- 有 58% 的學生選擇正確選項④，顯示約近六成的學生能理解比率概念並能解決生活問題。因此能正確計算兩種蝴蝶相差的數量：
 【方法一】樺斑蝶： $300 \times 60\% = 180$ （隻），無尾鳳蝶： $300 \times 40\% = 120$ （隻），相差： $180 - 120 = 60$ （隻）。
 【方法二】先算出兩種蝴蝶數量相差 20%，再算 $300 \times 20\% = 60$ （隻）。
- 有 20% 的學生選擇選項③，這些學生可能認為 60% 是 100 隻蝴蝶中有 60 隻是樺斑蝶，但題目中全部蝴蝶數量是 300 隻，所以認為選項③錯誤。但學

生也有可能是忽略題目要求而選擇錯誤選項。

3. 有 13% 的學生選擇選項②，這些學生可能對於百分率和全部佔部份的分數比率無法正確換算，所以認為選項②錯誤。但學生也有可能是忽略題目所要求的選擇錯誤選項。
4. 有 9% 的學生選擇選項①，這些學生可能無法正確計算百分率所表示的樺斑蝶的數量，因此認為選項①錯誤。但學生也有可能是忽略題目所要求的選擇錯誤選項。

(四) 學生表現說明

1. 本題的命題設計，主要希望了解學生對於比率為部份量佔全體量的關係是否理解，並能應用比率概念解決生活問題。
2. 本題通過率為 58%。有將近 6 成的學生已能了解百分率的定義及其應用，但仍有 4 成多的學生，概念並不清楚；也有可能沒有注意到本題為選擇錯誤選項的影響。從高分組與低分組學生的表現來看，85% 的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生只有 29% 回答正確，其他選項有 71% 的低分組學生選擇。顯示低分組學生中有許多學生對於百分率的概念並不了解，或者沒有注意到本題是要選擇錯誤選項，看到其中一個正確選項就選擇。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

(一) 評量重點

5-n-14 能認識比率及其在生活中的應用（含「百分率」、「折」）。

(二) 先備的知識

4-n-08 能理解等值分數，進行簡單異分母分數的比較，並用來做簡單分數與小數的互換。

(三) 延伸的知識

6-n-09 能認識比和比值，並解決生活中的問題。

十二年國教課綱（學習內容）

(一) 評量重點

N-5-10 解題：比率與應用。整數相除的應用。含「百分率」、「折」、「成」。

(二) 先備的知識

N-4-6 等值分數：由操作活動中理解等值分數的意義。簡單異分母分數的比較、加、減的意義。簡單分數與小數的互換。

(三) 延伸的知識

1. N-6-6 比與比值：異類量的比與同類量的比之比值的意義。理解相等的比中

牽涉到的兩種倍數關係（比例思考的基礎）。解決比的應用問題。

2. N-6-8 解題：基準量與比較量。比和比值的應用。含交換基準時之關係。

三、教學建議

（一）評量核心概念

學生能理解百分率的意義，並處理應用問題。

（二）學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. 對於比率的概念不了解：比率表示的是部份佔全體的多少的關係，因此比率的值常小於 1 或等於 1，且 1 即代表全部。學生對於比率的概念不了解，因此不了解比率所代表的意義。
2. 對於比率的值的不同表示方式無法互相換算：比率可以用分數、小數及百分率的方式來表示，學生因為對比率的概念不了解，或對分數、小數之間的換算不熟悉，因此無法進行比率不同的表示方式之間的換算。
3. 不了解所有不同類量的比率總和為 1：若某班男生人數比率為 55%，女生人數比率則為 $1-55\%=45\%$ ，反之男女生人數之比率相加其和必為 1 (100%)。
4. 不了解打折的意義：學生不了解打七五折的意義是付給定價 75% 的價錢，不能讀作「七十五折」。
5. 不了解加成的意義：學生對於超過 1 的比率概念較不熟悉，也可能對於加成是指加上一定比率的價錢的意思並不了解。

（三）核心概念的教學重點

1. 從生活情境中了解比率的意義：比率代表的是「部份量佔全體量」的關係。可從生活中常見的比率情境及用語連結到比率概念的學習，如：近視不良率（近視人數佔總人數的比率）、打擊率（安打數佔總打數的比率）、投籃命中率（進籃球數佔總投球數的比率）、得票率（得票數佔總投票數的比率（…等生活情境來讓學生學習及理解比率的意義。
2. 比率不同的表示方式
 - （1）以分數表示：比率是部份量佔全體量的關係，因此可以連結分數概念以分數表示。如：「小明投籃投了 20 球，進了 12 球，小明投中的比率（命中率）是多少？」小明投中的比率： $\frac{12 \text{ (投中球數)}}{20 \text{ (總投球數)}} = \frac{3}{5}$ 。
 - （2）以小數表示：比率是部份量佔全體量的關係，也可以用包含除的關係來列式。如：小明投籃投了 20 球，進了 12 球，小明投中的比率（命中率）是多少？小明投中球數，是總投球數的幾倍： $12 \div 20 = 0.6$ 。
 - （3）以百分率表示：比率以分數或小數的方式計算出來之後，再轉化百分率的表示方式。如：小明投籃投了 20 球，進了 12 球，小明投中的比

率（命中率）是多少？

方法一：
$$\frac{12 \text{ (投中球數)}}{20 \text{ (總投球數)}} = \frac{3}{5} = \frac{60}{100} = 60\%$$

方法二： $12 \div 20 = 0.6$ ， $0.6 \times 100\% = 60\%$ 。（ $100\% = \frac{100}{100}$ ）

另外教師還可以引導學生觀察發現：比率用百分率的方式表示時，分母皆為 100，最容易比較及計算不同的比率。

3. **不同類量的比率總合為 1**：連結生活情境讓學生理解不同類量的比率總合為 1 的概念。如：小明投籃投了 20 球，進了 12 球，小明的投球命中率是 $12 \div 20 \times 100\% = 60\%$ ；小明的沒投進的球為 8 球，小明的不中球率為 $8 \div 20 \times 100\% = 40\%$ 。進球率和不進球率的總和為 $1 \left(\frac{100}{100} \right)$ 。

4. 打折的意義

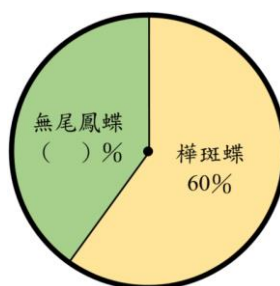
- (1) 透過生活情境讓學生了解打折、折扣的意義、計算方式和生活應用。如：「書店全面七折」的意思是售價以定價的十分之七計價，若 200 元的書，則需付 $200 \times \frac{7}{10} = 140$ （元）。由分數的概念切入學生較容易了解打折的意思，再帶入「七五折」即乘以 $\frac{75}{100}$ 、75%。打七五折的書只要付 $200 \times 75\% = 150$ （元）；反之，打七五折即節省了 $1 - 75\% = 25\%$ ， $200 \times 25\% = 50$ （元）。
- (2) **國外折扣的表示方式**：打七五折在國外的表示方式為「25% off」，因為生活中（如百貨公司的標示）也很常見，教師可作為教學目標但不宜列入評量。

5. **加成的意義**：日常生活中的加成，是總量大於 1 的比率概念，在學生熟悉總量為 1 的比率之後可以學習。如：「到餐廳點了 600 元的餐點，用餐完結帳時，要付給餐廳餐點費及加一成的服務費，共要付多少錢？」

$$600 \times (1 + 10\%) = 600 + 60 = 660 \text{ (元)}。$$

(四) 本題教學的加強重點

1. **教師可先透過圖示連結分數概念**：部份佔全體的量的關係，讓學生了解樺斑蝶和無尾鳳蝶佔全部蝴蝶總量的關係，以及兩個部份的量總和為 1（全部）的關係： $60\% + (\quad)\% = 100\%$ 。



2. **從百分率連結到分數的比率表示方式**：樺斑蝶佔全部蝴蝶的 60%，也就是

佔 $\frac{60}{100} = \frac{3}{5}$ ；無尾鳳蝶佔全部蝴蝶的 $1 - 60\% = 40\% = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$ 。

3. 從百分率計算每類蝴蝶的數量：樺斑蝶佔全部蝴蝶的 60%，所以樺斑蝶的數量為總量 300 隻的 60%， $300 \times 60\% = 180$ （隻）；無尾鳳蝶的數量為總量 300 隻的 40%， $300 \times 40\% = 120$ （隻），也可以用 $300 - 180 = 120$ （隻）。

第 12 題

知識向度	數與計算	認知向度	概念理解																												
對應	5-n-09 能理解除數為整數的分數除法的意義																														
題目	<p>「將 $3\frac{3}{4}$ 公升的果汁平分成 3 杯，每杯有幾公升？」下列選項何者<u>錯誤</u>？</p> <p>① 每杯是「$3+\frac{3}{4}\div 3$」公升</p> <p>② 每杯是「$3\frac{3}{4}$ 的 $\frac{1}{3}$」公升</p> <p>③ 每杯是「$3\frac{3}{4}\div 3$」公升</p> <p>④ 每杯是「$3\frac{3}{4}\times \frac{1}{3}$」公升</p>																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：1</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.39</td><td>0.23</td><td>0.17</td><td>0.19</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.70</td><td>0.14</td><td>0.08</td><td>0.09</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.20</td><td>0.26</td><td>0.29</td><td>0.26</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：1	選項率	0.39	0.23	0.17	0.19	0.00		高分組	0.70	0.14	0.08	0.09	0.00		低分組	0.20	0.26	0.29	0.26	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：1																									
選項率	0.39	0.23	0.17	0.19	0.00																										
高分組	0.70	0.14	0.08	0.09	0.00																										
低分組	0.20	0.26	0.29	0.26	0.00																										

一、 試題分析

(一) 數據解析：

本題鑑別度為 0.49，通過率為 0.39，試題難易度 0.45。

(二) 評量目標說明：

本題是在等分除的情境下，評量學生對題意的理解，以及帶分數除以整數的計算概念。

(三) 選項表現說明：

1. 有 39%的學生選項正確選項①，顯示只有約四成的學生可以掌握帶分數除以整數的運算能力，以及能正確理解題意。

2. 有 23%的學生選擇選項②，學生可能不能理解若平分成 3 等分，則每一等分是總量的 $\frac{1}{3}$ 。但學生也有可能是忽略題目所要求的選擇錯誤選項。

3. 有 19% 的學生選擇選項④，學生可能不能理解，平分成 3 等份，也就是每一等分是總量的 $\frac{1}{3}$ ，因此算式可記錄為「 $3\frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$ 」。但學生也有可能是忽略題目所要求的選擇錯誤選項。
4. 有 17% 的學生選擇選項③，顯示這些學生可能不能理解平分的語意可以用除法來計算。但學生也有可能是忽略題目所要求的選擇錯誤選項。

(四) 學生表現說明：

1. 本題命題設計的選項皆是對於除法情境的理解，以及是否熟悉「 $\div m$ 」相當於「 $\times \frac{1}{m}$ 」的運算規則。另外，學生是否理解分數除法中被除數為帶分數，除數為整數的意義，也是本題檢核的重點。
2. 本題的通過率為 39%，顯示只有約四成的學生能理解等分除情境下的題意，並熟悉「 $\div m$ 」相當於「 $\times \frac{1}{m}$ 」的運算規則。從高分組與低分組學生的表現來看，高分組學生答對率為 70%，其中有 14% 的高分組學生選②。而低分組學生答對率卻只有 20%，有 80% 的低分組的學生選擇其他 3 個錯誤選項，顯示這些學生未理解帶分數除以整數的意義。由本題可以看見學生的錯誤類型中，不熟悉「 $\div m$ 」相當於「 $\times \frac{1}{m}$ 」的意涵為最多。本題顯示超過六成的學生未能在本情境題中掌握帶分數除以整數的意涵，或不熟悉、不理解「 $\div m$ 」相當於「 $\times \frac{1}{m}$ 」的運算規則，是教師可以加強的教學重點。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

(一) 評量重點

5-n-09 能理解除數為整數的分數除法的意義，並解決生活中的問題。

(二) 先備的知識

1. 4-n-08 能認識真分數、假分數與帶分數，熟練假分數與帶分數的互換，並進行同分母分數的比較、加、減與整數倍的計算。
2. 5-n-08 能理解分數乘法的意義，並熟練其計算，解決生活中的問題。

(三) 延伸的知識

6-n-04 能理解分數除法的意義及熟練其計算，並解決生活中的問題。

十二年國教課綱（學習內容）

(一) 評量重點

N-5-7 分數除以整數：分數除以整數的意義。最後將問題轉化為乘以單位分數。

(二) 先備的知識

1. N-4-5 **同分母分數**：一般同分母分數教學（包括「真分數」、「假分數」、「帶分數」名詞引入）。假分數和帶分數之變換。同分母分數的比較、加、減與整數倍。
2. N-5-5 **分數的乘法**：整數乘以分數、分數乘以分數的意義。知道用約分簡化乘法計算。處理乘積一定比被乘數大的錯誤類型。透過分數計算的公式，知道乘法交換律在分數也成立。

(三) 延伸的知識

N-6-3 **分數的除法**：整數除以分數、分數除以分數的意義。最後理解除以一數等於乘以其倒數之公式。

三、教學建議

(一) 評量核心概念

在等分除情境下，帶分數除以整數的問題。

(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

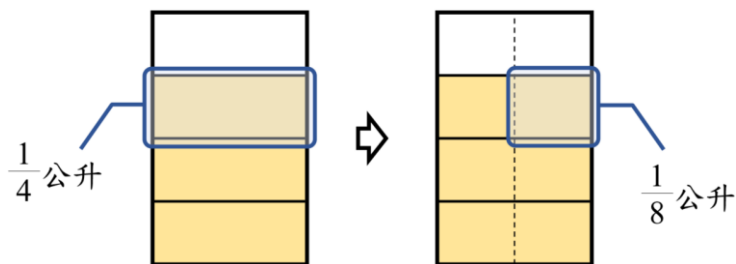
1. 帶分數除以整數時，只做分數之間的運算，例如： $3\frac{3}{4} \div 3 = 3\frac{3 \div 3}{4 \div 3} = 3\frac{1}{4}$ 。
2. 帶分數除以整數時，只做整數之間的運算，例如： $3\frac{3}{4} \div 3 = 1\frac{3}{4}$ 。
3. 雖以除法列式，但卻用乘法來計算，例如： $3\frac{3}{4} \div 3 = 3\frac{3}{4} \times 3 = 9\frac{9}{4} = 11\frac{1}{4}$ 。
4. 被除數的分子和分母皆除以整數，和約分的方法混淆，
例如： $3\frac{3}{4} \div 2 = 6\frac{4}{6} \div 2 = 3\frac{2}{3}$ 。
5. 不熟悉「 $\div m$ 」相當於「 $\times \frac{1}{m}$ 」的運算規則，除號直接改乘號，
例如： $3\frac{3}{4} \div 3 = 3\frac{3}{4} \times 3$ 。

(三) 核心概念的教學重點

分數除以整數的問題可以是整數除法問題的延伸。

1. **整數除法的問題**：以「6 公升的牛奶，要平分裝成 3 杯牛奶，一杯是幾公升？」為例。這是整數等分除的問題情境，我們將大集合 6 公升看成 6 個小元素「1」公升，平均分配到 3 杯後，再回頭計數每一杯有幾公升。所以， $6 \div 3 = 2$ 得到每一杯有 2 個 1 公升，也就是每一杯有 2 公升。
2. **分數除以整數的問題**

- (1) 同整數除法，將大集合換成小元素的細分觀點引入：以「 $\frac{3}{4}$ 公升的牛奶，要平分裝成2杯牛奶，一杯是幾公升？」為例。將 $\frac{3}{4}$ 公升視為3個 $\frac{1}{4}$ 公升平分成2份，所以把3個 $\frac{1}{4}$ 公升再細分成6個 $\frac{1}{8}$ 公升，如【圖 12-1】。



【圖 12-1】

所以每一份中有3個 $\frac{1}{8}$ 公升，也就是每杯有 $\frac{3}{8}$ 公升。算式紀錄為

$$\frac{3}{4} \div 2 = \frac{3}{8}。$$

- (2) 從分數倍的觀點引入：以「 $\frac{3}{4}$ 公升的牛奶，要平分裝成2杯牛奶，一杯是幾公升？」為例，題意是要把 $\frac{3}{4}$ 公升的牛奶，平分裝成2份取其中1份。從分數的意義上來看，可以視為「 $\frac{3}{4}$ 公升的 $\frac{1}{2}$ 倍是多少公升？」，引導學生將問題當作分數的分數倍問題，算式記錄成「 $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = ?$ 」，再用分數乘法算出答案： $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$ 。
- (3) 教師引導學生觀察除法記錄問題與乘法記錄問題的事實相同，進而引出 $\frac{3}{4} \div 2 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$ ，觀察發現，學生最後要熟知「 $\div 2$ 」相當於「 $\times \frac{1}{2}$ 」之事實，並能熟練計算。
- (4) 教學時，布題要包含真分數、假分數及帶分數除以整數的問題，也要有離散量與連續量的情境。
- (5) 教學時，讓學生理解「平分成2等份就是全部的 $\frac{1}{2}$ 」、「平分成3等份，就是全部的 $\frac{1}{3}$ 」。藉由情境理解並類推，熟知「 $\div m$ 」等於「 $\times \frac{1}{m}$ 」。程序性知識：分數除以整數沒有餘數時，分子不變，分母乘以除數，即：
$$\frac{\text{分子}}{\text{分母}} \div \text{整數} = \frac{\text{分子}}{\text{分母} \times \text{整數}}。$$

(四) 本題教學的加強重點

本題希望學生在理解題意後，能在除法概念與分數倍的概念間做理解與轉換，並能以「 $\div m$ 」等於「 $\times \frac{1}{m}$ 」的概念，帶入算式記錄。

1. 先參考(三) 核心概念的教學重點之 2.分數除以整數的問題的內容進行引導教學。
2. 教師亦可利用本題之四個選項中的算式與題目相互澄清，讓學生透過情境思考解題算式的意義是否符合題目情境，以理解選項間的算式是否具有相同代表意義，以澄清算式與題目情境間的關係。

第 13 題

知識向度	數與計算	認知向度	概念理解																												
對應分年細目	5-n-04 能理解因數和倍數。																														
題目	有一群學生人數 <u>未滿</u> 50 人，要進行分組，如果 4 人一組、9 人一組，都剛好分完。還可以用幾個人一組的方式，也剛好分完？ ① 5 人一組 ② 6 人一組 ③ 7 人一組 ④ 8 人一組																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：2</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.22</td><td>0.62</td><td>0.08</td><td>0.06</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.05</td><td>0.92</td><td>0.02</td><td>0.01</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.42</td><td>0.28</td><td>0.17</td><td>0.13</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：2	選項率	0.22	0.62	0.08	0.06	0.00		高分組	0.05	0.92	0.02	0.01	0.00		低分組	0.42	0.28	0.17	0.13	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：2																									
選項率	0.22	0.62	0.08	0.06	0.00																										
高分組	0.05	0.92	0.02	0.01	0.00																										
低分組	0.42	0.28	0.17	0.13	0.00																										

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.64，通過率為 0.62，試題難易度 0.60。

(二) 評量目標說明

本題為因數的問題，旨在評量學生在具體情境中，能否透過部分因數找到一個可能的數，再出發找到其他的因數。

(三) 選項表現說明

- 有 62% 的學生選擇正確選項②，顯示六成多的學生已經掌握題意，可以透過部分因數找到一個可能的數，再出發找到其他的因數。
- 有 22% 的學生選擇①，這些學生可能未能完整掌握題意，而以為總人數是 50 人，而利用找因數的方法，選擇能整除 50 的數。
- 有 8% 的學生選擇③，這些學生可能未能完整掌握題意，只依據「未滿 50 人」去猜測人數 49 人，而利用找因數的方法，選擇能整除 49 的數。
- 有 6% 的學生選擇④，這些學生可能未能完整掌握題意，只依據「未滿 50

人」去猜測人數 48 人，而利用找因數的方法，選擇能整除 48 的數。

(四) 學生表現說明

1. 本題的命題設計為主要想了解學生對於因數的概念是否完全清楚。對於透過部分因數找到一個可能的數，再用整除來判斷是否為該數的因數的方法，來找到其他的因數。在題目中特別強調「未滿 50 人」、「每組人數相同」、「剛好分完」，學生能理解題意是要我們先確定總人數是多少，再進行「還能多少人一組，也剛好分完」也就是要找因數的概念，故採取整除的方式找因數就能解決題目的問題。
2. 本題難易度為 0.6。有六成多的學生能掌握在具體情境中，透過部分因數找到一個可能的數，再用整除來判斷是否為該數的因數的方法，來找到其他的因數。但仍有近四成的學生無法解題。從高分組與低分組學生的表現來看，92%的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生只有 28%回答正確，有 72%的低分組學生無法解題，其中選擇①的學生高達 42%，因此從低分組的學生表現能進一步得知，學生對於理解題意和應用因數概念來解題有雙重的困難。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

(一) 評量重點

5-n-04 能理解因數和倍數。

(二) 先備的知識

1. 2-n-06 能理解乘法的意義，使用 \times 、 $=$ 做橫式紀錄與直式紀錄，並解決生活中的問題。
2. 3-n-05 能理解除法的意義，運用 \div 、 $=$ 做橫式紀錄（包括有餘數的情況），並解決生活中的問題。

(三) 延伸的知識

5-n-05 能認識兩數的公因數、公倍數、最大公因數與最小公倍數。

十二年國教課綱（學習內容）

(一) 評量重點

N-5-3 公因數和公倍數：因數、倍數、公因數、公倍數、最大公因數、最小公倍數的意義。

(二) 先備的知識

1. N-2-6 乘法：乘法的意義與應用。在學習乘法過程，逐步發展「倍」的概念，做為統整乘法應用情境的語言。
2. N-3-6 解題：乘除應用問題。乘數、被乘數、除數、被除數未知之應用解題。

連結乘與除的關係。(R-3-1)

(三) 延伸的知識

1. N-6-1 **20 以內的質數和質因數分解**：小於 20 的質數與合數。2、3、5 的質因數判別法。以短除法做質因數的分解。
2. N-6-2 **最大公因數與最小公倍數**：質因數分解法與短除法。兩數互質。運用到分數的約分與通分。

三、教學建議

(一) 評量核心概念

能求算因數與倍數。

(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. **專有名詞意義不清楚或概念混淆**：「整除與被整除」的意義和「因數與倍數」有何關係並不清楚；以因數的定義來說，對於「甲數能整除乙數」或「甲數能被乙數整除」的敘述中，誰除以誰，哪個是因數或哪個是倍數，分不清楚；因數與倍數是兩個互逆的概念，若甲是乙的因數，乙則是甲的倍數，學生難以理解甲、乙兩數之間的關係。
2. **認為數字大小與因數個數有關**：學生容易誤以為數字愈大，因數個數愈多。例如：「判斷 49 和 12 誰的因數個數比較多？」學生容易因為 $49 > 12$ ，得到 49 的因數個數比較多。
3. **找因數容易遺漏**：當數字較大又有很多因數時，會沒有耐心逐一尋找而會有遺漏，同時除法的計算能力不好也會受影響。例如：找出 72 的因數，會因為 72 數字比較大且因數比較多，容易遺漏幾個因數；另一種是出現 49 屬於比較刁鑽的數字，容易遺漏 7 這個因數。
4. **判別因數、倍數關係混淆**：混用其他倍數的判別法去判斷因數、倍數關係。例如：無法判別「4 的倍數」與「尾數是 4 的數的倍數」。

(三) 核心概念教學重點

1. **因數問題**：幫助學生建立因數的概念，可以有以下教學布題：

- (1) 在長方形排列問題中，探討給定總量的長方形的可能排法：例如先給定一個總量（以 6 個和 12 個全等的小正方塊為例），要求學童將小正方塊排成長方形（不可排成中空），窮盡所有的排法，讓學童經驗給定總量長方形可以有不同的排法。

布題一：「6 個全等的小正方塊，可以排列成怎樣的長方形？」每排出一種長方形，就請學生將排法用乘法紀錄下來。可以排列成 1×6 、 2×3 、 3×2 、 6×1 ，共 4 種。

布題二：「12 個全等的小正方塊，可以排出怎樣的長方形？」可以

排列成 1×12 、 2×6 、 3×4 、 4×3 、 6×2 、 12×1 ，共 6 種。

教師宣告：排列長方形邊上方塊的個數：「1、2、3、6」是 6 的「因數」，和「1、2、3、4、6、12」是 12 的「因數」。

- (2) 在等分除的情境中，給定總量要求學童回答可能的等分組方式，幫助學童掌握總量可以由哪些單位量組成的意義。

例如：透過問題「有 18 位小朋友，全部分組玩遊戲，每組的人數要一樣多，一組可以有多少位小朋友，分分看？」請學童使用除法算式紀錄解題過程。

$$18 \div \boxed{1} = \boxed{18}$$

$$18 \div \boxed{2} = \boxed{9}$$

$$18 \div \boxed{3} = \boxed{6}$$

$$18 \div \boxed{6} = \boxed{3}$$

$$18 \div \boxed{9} = \boxed{2}$$

$$18 \div \boxed{18} = \boxed{1}$$

透過詢問「18 除以 2，全部分完且沒有剩下，所以 2 是 18 的因數」，引入因數的意義。帶領學生探討 18 的因數有哪些時，將 18 當成被除數，依序除以 1、2、3、...、18，發現其中 1、2、3、6、9、18 皆可以被 18 整除，所以 1、2、3、6、9、18 都是 18 的因數。

教師多舉例類似情境題讓學生解題，從學生找因數記錄下來的除法算式中，帶領學生發現「 $m \div a = b$ 」和「 $m \div b = a$ 」兩個除法算式的記錄皆可以找到 a 和 b 兩個因數，因此，在列出除法算式紀錄解題的過程，我們可省略「 $m \div b = a$ 」這個除法算式。

2. 倍數問題

現階段的學生有比較多倍的問題的解題經驗，經常使用倍的語言，因此，透過乘法未知的乘法算式填充題「 $2 \times (\quad) = 10$ 」，這條式子的含意是 2 的 5 倍是 10，所以 10 是 2 的 5 倍，引入倍數的意義：「10 是 2 的 5 倍，所以 10 是 2 的倍數」。學生有能力求出某數的倍數，例如我們要探討 5 的倍數，即可用乘以正整數的方式引導學生算出 5 的 1 倍、2 倍、3 倍……，依序為 5、10、15……，而這些數即為 5 的倍數。

另外，在學過除法之後，老師們同樣可帶領學生以除法觀點來探討倍數的觀念，因為「被除數 \div 除數 = 商」，所以在驗算的過程：被除數 = 商 \times 除數，因此，我們可以帶領學生探討：被除數也是商和除數的倍數。例如我們將 $18 \div 3 = 6$ 的除法算式進行驗算，即可發現 $18 = 3 \times 6$ ，其中 18 也是 3 和 6 的倍數。

要解決這些困難與迷思，國內學者研究後提出建議：教學前，宜讓學生建立乘除法的意義並熟練乘除計算技能；教學時，宜設計富有生活化、情境

化的情境（謝哲仁&林榮貴（2006）。國小可操作視覺化之數學因數與倍數單元電腦活動輔助學習設計之研究。《理工研究學報》，40（1），23-45。），引導學生正確瞭解題意，以簡單明確的文字來定義因倍數，且讓學生有操作具體物聯結因數與倍數意義的機會，及教導學童運算的技巧以協助演算與意義的連結（黃國勳&劉祥通（2003）。五年級學童學習因數教材困難之探討。《科學教育研究與發展》季刊，30、52-70）。

（四） 本題教學重點

1. 先確認 4 和 9 可能是那些數的因數：如學生無法意會，教師宜分段布題，先探究數字「4」可能是那些數的因數？說說看，你是怎麼知道的？再探究數字「9」可能是那些數的因數？說說看，你是怎麼知道的？讓學生透過「整除」的方法找到一個數的因數。
2. 找到可能是「36」、「72」……等，再由題意了解「未滿 50 人」。教師可以引導學生掌握了「總人數」，找出符合題目要求的「未滿 50 人」的人數。
3. 之後老師再提問：「學生有 36 人，還可以怎麼分組，剛剛好分完呢？」讓學生思考：如果 1 人 1 組，可不可以？
如果 2 人 1 組，可不可以？
如果 3 人 1 組，可不可以？
如果 4 人 1 組，可不可以？
……。
4. 使用除法算式紀錄解題過程：

$$36 \div \boxed{1} = \boxed{36} ;$$

$$36 \div \boxed{2} = \boxed{18} ;$$

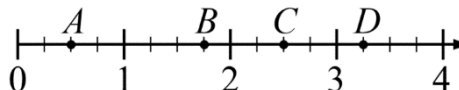
$$36 \div \boxed{3} = \boxed{12} ;$$

$$36 \div \boxed{4} = \boxed{9} ;$$

$$36 \div \boxed{5} = \boxed{6} 。$$

所以我們可以說 1、2、3、4、6、9、12、18、36 都是 36 的因數。

第 14 題

知識向度	數與計算	認知向度	概念理解																												
對應分年細目	5-n-13 能將分數、小數標記在數線上。																														
題目	<p>在數線上有 A、B、C、D 四個點（如下圖）。哪一個選項是正確的？</p> <div></div> <p>① $A=0.2$ ② $B=\frac{6}{8}$ ③ $C=2.5$ ④ $D=\frac{16}{5}$</p>																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：3</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.30</td><td>0.17</td><td>0.38</td><td>0.15</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.07</td><td>0.17</td><td>0.64</td><td>0.12</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.54</td><td>0.15</td><td>0.17</td><td>0.14</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：3	選項率	0.30	0.17	0.38	0.15	0.00		高分組	0.07	0.17	0.64	0.12	0.00		低分組	0.54	0.15	0.17	0.14	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：3																									
選項率	0.30	0.17	0.38	0.15	0.00																										
高分組	0.07	0.17	0.64	0.12	0.00																										
低分組	0.54	0.15	0.17	0.14	0.00																										

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.47，通過率為 0.37，試題難易度 0.41。

(二) 評量目標說明

本題是檢測學生是否理解小數與分數在數線上的對應位置，要求學生能依據數線的分段數，將小數及分數標示在正確的位置上，評量學生是否具備能判斷分數與小數在數線上對應位置的能力。

(三) 選項表現說明

- 有 38% 的學生選擇正確選項③，顯示只有約 4 成的學生掌握正確判斷小數及分數在數線對應位置的能力。
- 有 30% 的學生選擇選項①，這些學生可能和常見的 10 等分數線混淆，誤以為第 2 小格就是 0.2，而選擇選項①。
- 有 17% 的學生選擇選項②，這些學生可能誤以為 0 到 2 之間共有 8 小格，且

忽略 B 點的值應介於 1 和 2 之間，誤以為 $1\frac{3}{4}$ 的位置為 $\frac{6}{8}$ ，而選擇選項②。

4. 有 15% 的學生選擇選項④，這些學生可能以為數線分段處的隔線數即為間距數，誤以為是 5 等分的數線，而選擇選項④。

(四) 學生表現說明

1. 本題的命題設計主要希望了解學生是否能正確判斷分數或小數在數線上的位置，或正確判斷數線上的位置所代表的小數值或分數值。
2. 本題通過率為 37%。只有近 4 成的學生了解及熟練分數和小數在數線上的對應關係的概念，還有超過 6 成的學生，相關概念並不清楚。從高分組與低分組學生的表現來看，64% 的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生只有 17% 回答正確，另外甚至有高達 54% 的低分組學生選擇錯誤選項②，三個錯誤選項的選答率共 83%。顯示低分組學生對於分數和小數在數線上的對應位置的概念並不了解，因此非常容易受到誘答選項的影響而選答。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

(一) 評量重點

5-n-13 能將分數、小數標記在數線上。

(二) 先備的知識

1. 3-n-09 能由長度測量的經驗來認識數線，標記整數值與一位小數，並在數線上做大小比較、加、減的操作。
2. 4-n-10 能將簡單分數標記在數線上。

(三) 延伸的知識

7-n-08 能理解數線，數線上兩線的距離公式，及能藉數線上數的位置驗證數的大小關係。

十二年國教課綱（學習內容）

(一) 評量重點

N-4-8 **數線與分數、小數**：連結分小數長度量的經驗。以標記和簡單的比較與計算，建立整數、分數、小數一體的認識。

(二) 先備的知識

N-3-11 **整數數線**：認識數線，含報讀與標示。連結數序、長度、尺的經驗，理解在數線上做比較、加、減的意義。

(三) 延伸的知識

N-7-5 **數線**：擴充至含負數的數線；比較數的大小；絕對值的意義；以

$|a-b|$ 表示數線上兩點 a 、 b 的距離。

三、教學建議

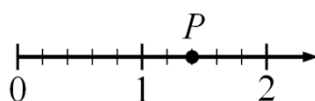
(一) 評量核心概念

能將數線上的值以分數、小數標示。(簡單分數與一位小數)

(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

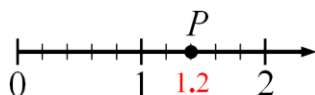
1. 誤認為數線間距必為 10 等分：以為兩數之間的數線等分段數一定是 10 等分，也就是每個間距為 $\frac{1}{10}$ 、0.1，忽略以其他分數表示的等分間距數。例如

【圖 14-1】中點 P 值應為 $1\frac{2}{5}$ 或 1.4：

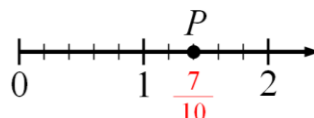


【圖 14-1】

但學生容易標示錯誤為 1.2，如【圖 14-2】；或以為全部數線平分為 10 等分，故標示為 $\frac{7}{10}$ ，如【圖 14-3】。

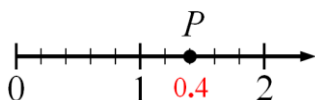


【圖 14-2】

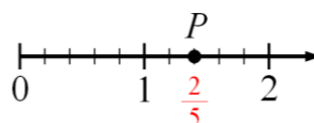


【圖 14-3】

2. 忽略數線上的參考點數值：學生在判斷數線等分段數後，在標示數值時容易只標示出分數或小數的值，因為學生習慣從 0 開始的數線，以致於忽略了帶分數或帶小數的整數值。例如【圖 14-4】中點 P 學生容易標示錯誤為 0.4；或 $\frac{2}{5}$ ，如【圖 14-5】。

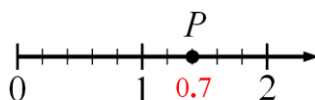


【圖 14-4】

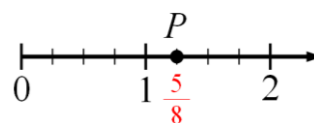


【圖 14-5】

3. 將數線全長當成 1 個單位：學生不了解數線上兩數間等距分割的意義。例如【圖 14-6】中的點 P ，學生以為在第 7 格就是 0.7，故標示為 0.7；或以為全部數線平分為 8 等分，故標示為 $\frac{5}{8}$ ，如【圖 14-7】。



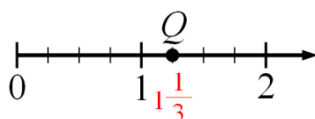
【圖 14-6】



【圖 14-7】

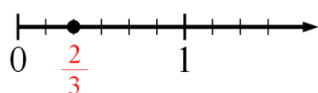
4. 誤認為兩數之間分段處的隔線數即為間距數：學生只數兩數之間的分段隔線

數，導致錯數總分段數。例如【圖 14-8】中點 Q 值應為 $1\frac{1}{4}$ ，學生以為 1 和 2 之間是 3 等分，所以標示為 $1\frac{1}{3}$ 。



【圖 14-8】

5. **受數線兩數之間的等分段數影響：**學生因為對分數的概念不了解，所以在標示數線上的分數值容易受等分段數影響而錯誤。例如：請學生標示出 $\frac{2}{3}$ 的位置，因為學生對 $\frac{2}{3}$ 在數線上的意義不了解，看到分子 2 就以為要標示在第 2 格，因此只從等分段數判斷而標示在 $\frac{2}{6}$ 的位置上，如【圖 14-9】。另外，學生也可能沒有注意到數線的單位長為 2，只看等分段數為 4，因此將 $\frac{1}{2}$ 、1、 $1\frac{1}{2}$ 標示為 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{2}{4}$ 、 $\frac{3}{4}$ ，如【圖 14-10】。



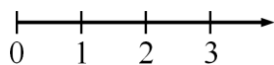
【圖 14-9】



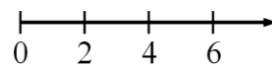
【圖 14-10】

(三) 核心概念的教學重點

1. **數線的基本概念：**數線的學習要從整數開始，小學常使用的導入情境為長尺（測量）。經由測量讓學生了解數線的基本性質，如以 0 為基準點（起點）、刻度上的數字代表從 0 開始的長度、數線具方向性、單位長度從 1 開始，如【圖 14-11】，之後不一定為 1，如【圖 14-12】數線的單位長度為 2：

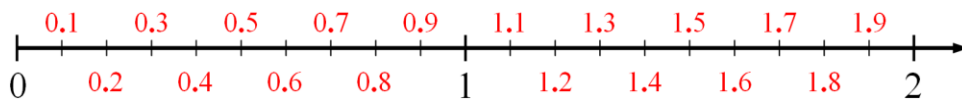


【圖 14-11】

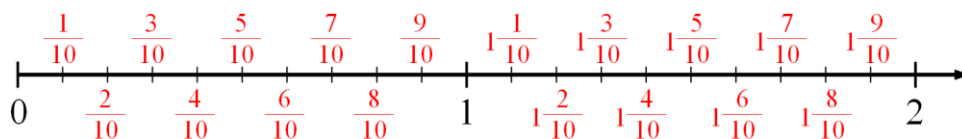


【圖 14-12】

2. **十等分數線：**小數與分數的數線的教學可以從 10 等分開始，讓學生實際操作 10 等分的分段與數值標示，才容易理解數線等分的意義。10 等分後再讓學生練習 0.1、0.2……，的數值標示，如【圖 14-13】，及小數與分數（以 10 為基底）的轉換標示，如【圖 14-14】。

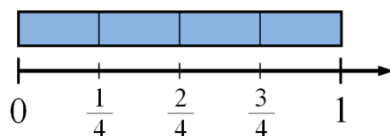


【圖 14-13】



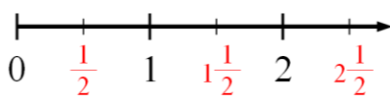
【圖 14-14】

3. **非十等分數線**：讓學生進行非 10 等分的間距標示。可以結合長條圖的等分練習，再連結到數線的分數標示，如【圖 14-15】。

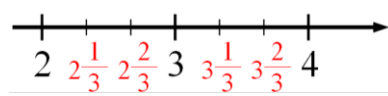


【圖 14-15】

接著練習在兩數之間進行分母為 2、3、4、5……，等的等分練習與數值標示，如【圖 14-16】、【圖 14-17】。經由實際操作讓學生對於間距等分的意義能了解，且更能具備等分間距的數感。



【圖 14-16】



【圖 14-17】

(四) 本題教學的加強重點

1. **從十等分數線開始**：教師可先以十等分的數線佈題，先讓學生清楚理解十等分數線上小數和分數的對應位置。
2. **再連結非十等分數線**：教師接著以五等分的數線佈題，讓學生觀察比較十等分數線和五等分數線的不同，了解小數和分數在五等分數線上的對應位置。最後再佈本題的四等分數線，讓學生逐漸熟悉了解不同等分數線上，小數和分數的對應位置。

第 15 題

知識向度	數與計算	認知向度	程序執行																												
對應分年細目	5-n-06 能用約分、擴分處理等值分數的換算。																														
題目	下列選項何者是 $\frac{15}{39}$ 的等值分數？ ① $\frac{51}{93}$ ② $\frac{35}{91}$ ③ $\frac{41}{65}$ ④ $\frac{2}{26}$																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：2</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.16</td><td>0.53</td><td>0.13</td><td>0.14</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.08</td><td>0.83</td><td>0.05</td><td>0.05</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.22</td><td>0.30</td><td>0.23</td><td>0.25</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：2	選項率	0.16	0.53	0.13	0.14	0.00		高分組	0.08	0.83	0.05	0.05	0.00		低分組	0.22	0.30	0.23	0.25	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：2																									
選項率	0.16	0.53	0.13	0.14	0.00																										
高分組	0.08	0.83	0.05	0.05	0.00																										
低分組	0.22	0.30	0.23	0.25	0.00																										

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.53，通過率為 0.53，試題難易度 0.56。

(二) 評量目標說明

本題是等值分數的換算問題，要求學生能以擴分、約分的方式找到新的等值分數，評量學生以擴分、約分處理等值分數換算的能力。

(三) 選項表現說明

- 有 54% 的學生選擇正確選項②，顯示約有五成的學生掌握能靈活運用等值分數概念解決生活問題的能力。學生能先將 $\frac{15}{39}$ 先約分成最簡分數，再將分子分母同乘以 7 找到此等值分數，即 $\frac{15 \div 3}{39 \div 3} = \frac{5}{13} = \frac{5 \times 7}{13 \times 7} = \frac{35}{91}$ 。
- 有 23% 的學生選擇③，這些學生可能誤以為將分子分母同加一數，得到的

分數即為等值分數，因此認為 $\frac{15}{39} = \frac{15+26}{39+26} = \frac{41}{65}$ ，得到的分數為等值分數。

3. 有 12% 的學生選擇①，這些學生可能誤以為將分子、分母的個位數字與十位數字位置交換就是等值分數，因此認為 $\frac{15}{39} = \frac{51}{93}$ ，故兩者為等值分數。
4. 有 8% 的學生選擇④，這些學生可能誤以為將分子分母同減一數，得到的分數即為等值分數，因此認為 $\frac{15}{39} = \frac{15-13}{39-13} = \frac{2}{26}$ ，得到的分數為等值分數。

(四) 學生表現說明

1. 本題命題設計題幹中的分數並非簡單分數，也不是最簡分數，因此學生無法將給定分數乘以（或除以）整數倍後在選項中找到等值分數。因此學生需先將給定分數約分成最簡分數後再擴分以找到等值分數。希望透過本題以了解學生是否理解等值分數的概念，並能靈活運用擴分及約分的方式找到等值分數。
2. 本題難易度約為 0.56。約有近六成的學生能靈活運用等值分數的概念來解決問題，但仍有近五成的學生無法正確解題。從從高分組與低分組學生的表現來看，83% 的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生只有 30% 回答正確，另外三個錯誤選項也都有超過 20% 的學生選答。顯示低分組學生對於等值分數的概念並未充分理解，所以很容易混淆分子（部份）和分母（整體）的關係。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

(一) 評量重點

5-n-06 能用約分、擴分處理等值分數的換算。

(二) 先備的知識

4-n-09 能認識等值分數，進行簡單分母分數的比較，並用來做簡單分數與小數的互換。

(三) 延伸的知識

1. 5-n-07 能用通分做簡單異分母分數的比較與加減。
2. 5-n-08 能理解分數乘法的意義，並熟練其計算，解決生活中的問題。

十二年國教課綱（學習內容）

(一) 評量重點

N-5-4 異分母分數：用約分、擴分處理等值分數並做比較。用通分做異分母分

數的加減。養成利用約分化簡分數計算的習慣。

(二) 先備的知識

N-4-6 **等值分數**：由操作活動中理解等值分數的意義。簡單異分母分數的比較、加、減的意義。簡單分數與小數的互換。

(三) 延伸的知識

N-5-5 **分數的乘法**：整數乘以分數、分數乘以分數的意義。知道用約分簡化乘法計算。處理乘積一定比被乘數大的錯誤類型。透過分數計算的公式，知道乘法交換律在分數也成立。

三、教學建議

(一) 評量核心概念

以擴分處理等值（真、假、帶）分數的換算。

(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. **給定的分數的分母和指定分母的數值不成整數倍的關係**：例如： $\frac{21}{35} = \frac{(\quad)}{15}$ ，學生可能先將 $\frac{21}{35}$ 化為最簡分數 $\frac{3}{5}$ 後，再進行擴分的換算。但擴分時容易因為概念不清楚而產生計算錯誤，如：學生可能是認為 $21 \div 7 = 3$ ，所以答案寫 7；也可能是因為計算 $\frac{3}{5} = \frac{(\quad)}{15}$ 時，將 3×3 看成 $3 + 3$ ，所以答案寫 6；也可能是因為約成最簡分數卻忽略了題目中分母的條件，而答案寫 3。
2. **不理解擴（約）分的換算方法**：分子和分母並非同乘（除）一個整數，而任意列其因倍數當作等值分數。：例如： $\frac{8}{12} = \frac{16}{36}$ ， $\frac{8}{12} = \frac{2}{4}$ 。
3. **混淆擴分與約分**：不理解擴分的意義，而誤用約分的方法進行擴分的換算。例如： $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ 。
4. **擴（約）分表示方式錯誤**：學了分數乘（除）法後，將擴（約）分和分數乘（除）法的算法混淆，例如： $\frac{8}{12} \times 2 = \frac{16}{24}$ ， $\frac{8}{12} \div 2 = \frac{4}{6}$ 。

(三) 核心概念的教學重點

學生學習擴分與約分的方法找出等值分數時，先要有完整的理解等值分數的概念，才能學習使用擴分與約分的方法快速地找出分數的等值分數，否則會有上面的錯誤類型和迷思概念產生。

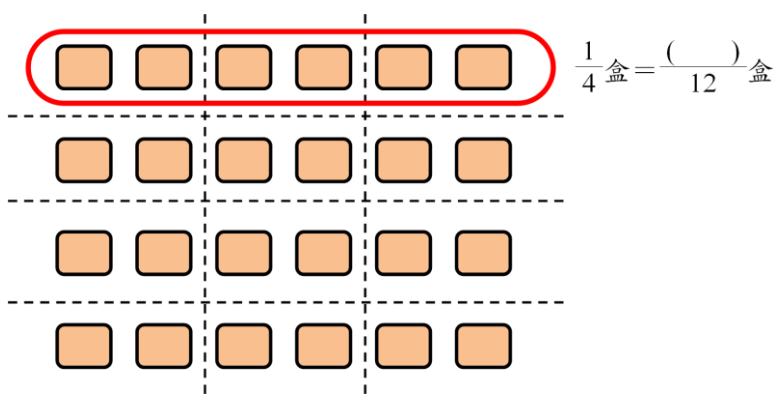
1. **先穩固等值分數的概念**：先複習讓學生熟悉簡單等值分數的概念，例如

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$ 。透過具體物或圖形表徵（必須是精準的比例，可善用電腦繪製或教具輔助教學）解說等值分數的概念，學生也可以實際操作疊合看看是否一樣大。讓學生透過具體物或圖像表徵觀察發現：互為等值分數的分數有不同的「等分割」及可再「合成」其數份的數量，但其值或量是一樣大的，藉此穩固等值分數的概念。

2. 經驗擴分的意義：要在真實情境之下，引出擴分的經歷。

(1) 將單位分數轉換為指定分母的等值分數：以「24 顆巧克力裝成一盒， $\frac{1}{4}$ 盒和 $\frac{(\quad)}{12}$ 盒一樣多？」為例，學生可能的解題策略：

- i. 以內容物的觀點進行解題活動：學生先決定 $\frac{1}{4}$ 盒有 6 顆巧克力，再決定十二分之多少盒有 6 顆巧克力，因题目的指定分母是 12，表示一盒巧克力做 12 等分割，而一份是 2 顆，進而決定 $\frac{3}{12}$ 盒有 6 顆巧克力。
- ii. 由等分割份數的觀點進行解題活動：如【圖 15-1】，12 恰好是 4 的整數倍，因此可以將 $\frac{1}{4}$ 所表示的整體橫切的 4 等份，每一份再縱切平分成 3 小份，也就是 $4 \times 3 = 12$ 小份，而原本 4 等份的每一份也變成 $1 \times 3 = 3$ 小份，也就得到 $\frac{3}{12}$ 的解答。



【圖 15-1】

由 $\frac{1}{4}$ 的分子、分母同乘以 3 得到等值分數 $\frac{3}{12}$ ，就是擴分。教師可以多布類似情境題，讓學生多累積擴分的經驗。而分數的分母從是整數倍到不是整數倍的練習。引導學生對找等值分數的歷程，看見離散量情境擴分或約分計算的法則。

(2) 連續量情境，將分數轉換為指定分母的等值分數：因為分母是整數倍的例題如上所介紹大同小異，此部分舉例不成整數倍的問題。

以「 $\frac{2}{8}$ 個披薩和 12 分之多少個披薩一樣大？和 4 分之多少個披

薩一樣大？」為例，由等分割份數的觀點進行解題活動：學生從操作圓形分數片中經驗 $\frac{2}{8}$ 的圓和分成12等分的圓疊在一起，發現 $\frac{2}{8}$ 和 $\frac{3}{12}$ 一樣大，記作 $\frac{2}{8} = \frac{3}{12}$ ； $\frac{2}{8}$ 個圓和 $\frac{1}{4}$ 個圓一樣大，記作 $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ 。由 $\frac{2}{8}$ 的分子、分母同除以2得到等值分數 $\frac{1}{4}$ ，再分子、分母同乘以3得到等值分數 $\frac{3}{12}$ ，就是分母不為整數倍的擴分。

(3) **離散量情境，帶分數轉換成指定分母的分數的活動：**以「12顆乒乓球裝成一盒， $1\frac{1}{3}$ 盒和6分之多少盒一樣多？」為例，學生可能的解題策略：

- i. 將帶分數看成整數與分數兩部分的合成結果，先處理分數部分，把單位分數或真分數表示成指定分母的等值分數後，再加上原先的整數部分，以獲得新的等值帶分數，而本題的做法是把 $1\frac{1}{3}$ 看成是1和 $\frac{1}{3}$ 的合成結果，再決定 $\frac{1}{3}$ 轉換成等值分數 $\frac{2}{6}$ ，新的等值分數就是 $1\frac{2}{6}$ 。
- ii. 學生也可能將帶分數先化為假分數，再比照將真分數轉換為指定分母等值分數的方式，進行解題活動。如本題把 $1\frac{1}{3}$ 轉換成 $\frac{4}{3}$ ，將 $\frac{4}{3}$ 轉換成等值分數 $\frac{8}{6}$ ， $\frac{8}{6}$ 再轉換為帶分數 $1\frac{2}{6}$ 。由 $\frac{1}{3}$ 的分子、分母同乘以2得到等值分數 $\frac{2}{6}$ ，再加上原先的整數部分就是帶分數的擴分。

3. 介紹擴分與約分的名詞

- (1) 擴分是指把分數的分母和分子同乘一個大於1的整數，而得到一個分割份數變多的等值分數的方法。
- (2) 約分是指把分數的分母和分子同除以大於1的公因數，而得到一個分割份數變少的等值分數的方法。

4. 從概念理解進入程序性知識，學生多練習以熟練擴分方法。

(四) 本題教學的加強重點

可提醒學生如於選項中找不到正確的答案時，可請學生先將題目中的分數約分到最簡分數再進行擴分： $\frac{15 \div 3}{39 \div 3} = \frac{5}{13}$ ，逐一尋找等值分數。如選項②則再擴分為 $\frac{5 \times 7}{13 \times 7} = \frac{35}{91}$ 。

第 16 題

知識向度	數與計算	認知向度	程序執行																												
對應	5-n-08 能理解分數乘法的意義，並熟練其計算，解決生活中的問題。																														
題目	綁一個蝴蝶結要用 $4\frac{3}{7}$ 公分的緞帶，全班共有 12 位小朋友，每人要綁一個蝴蝶結，老師要準備多長的緞帶？ ① $4\frac{36}{84}$ 公分 ② $9\frac{1}{7}$ 公分 ③ $48\frac{36}{84}$ 公分 ④ $53\frac{1}{7}$ 公分																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：4</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.08</td><td>0.08</td><td>0.29</td><td>0.53</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.02</td><td>0.02</td><td>0.11</td><td>0.86</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.17</td><td>0.18</td><td>0.46</td><td>0.19</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：4	選項率	0.08	0.08	0.29	0.53	0.00		高分組	0.02	0.02	0.11	0.86	0.00		低分組	0.17	0.18	0.46	0.19	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：4																									
選項率	0.08	0.08	0.29	0.53	0.00																										
高分組	0.02	0.02	0.11	0.86	0.00																										
低分組	0.17	0.18	0.46	0.19	0.00																										

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.66，通過率為 0.53，試題難易度 0.53。

(二) 評量目標說明

本題是分數乘法問題，評量學生能否解決帶分數×整數的運算問題。

(三) 選項表現說明

- 本題正確答案為選項④，通過率為 0.53，顯示五成的學生已經掌握帶分數乘以整數的運算能力。 $4\frac{3}{7} \times 12 = 4 \times 12 + \frac{3 \times 12}{7} = 48 + \frac{36}{7} = 53\frac{1}{7}$ 。
- 有 29% 的學生選擇選項③，學生可能混淆分數乘法和擴分的計算方式，除了整數部份×12 外，還誤將分子和分母都×12： $4\frac{3}{7} \times 12 = 4 \times 12 + \frac{3 \times 12}{7 \times 12}$

$$=48\frac{36}{84}。$$

3. 有 8% 的學生選擇選項①，學生可能混淆分數乘法和擴分的計算方式，誤將分子和分母都 $\times 12$ 外，並漏掉整數部分未計算： $4\frac{3}{7}\times 12=4+\frac{3\times 12}{7\times 12}=48\frac{36}{84}。$
4. 有 8% 的學生選擇選項②，學生可能只處理分數部分，漏掉整數部分未計算： $4\frac{3}{7}\times 12=4+\frac{3\times 12}{7}=4\frac{36}{7}=9\frac{1}{7}。$

(四) 學生表現說明

1. 本題命題的選項設計皆是帶分數乘法的算式紀錄中，學生易犯的錯誤類型。若學生未能在概念理解下，容易用記憶的方式進行解題，但因為能理解帶分數的意涵，導致在做乘法時誤將分母也乘上乘數。本題藉由分配律的策略解題，以真（假）分數的乘法或結合整數的乘法來做運算，目的想了解學生對於帶分數乘法的意義理解多少。
2. 本題的通過率為 52.8%，顯示有一半的學生已經熟悉帶分數乘以整數不同的解題。從高分組與低分組學生的表現來看，高分組學生答對率為 86%，其中有 29% 的高分組學生選③。而低分組學生答對率卻只有 19%，約有 81% 的低分組的學生未理解帶分數乘法的意義。由本題可以看見學生沒有單位分數的計數概念就會分母也乘上乘數的錯誤類型，這類型的學生最多；對於帶分數的書寫形式沒有真正了解它的含意，就會產生不知道帶分數也能分解為整數部分和真分數部分，也會不知道能分別做乘法計算的策略解題。本題顯示部分學生未能在本情境題中掌握以上帶分數乘以整數的策略與意涵而誤選答案，是教師可以加強的教學重點。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

(一) 評量重點

5-n-08 能理解分數乘法的意義，並熟練其計算，解決生活中的問題。

(二) 先備的知識

1. 4-n-08 能認識真分數、假分數與帶分數，熟練假分數與帶分數的互換，並進行同分母分數的比較、加、減與整數倍的計算。
2. 5-a-01 能在具體情境中，理解乘法對加法的分配律，並運用於簡化計算。

(三) 延伸的知識

1. 5-n-09 能理解除數為整數的分數除法的意義，並解決生活中的問題。
2. 6-n-04 能理解分數除法的意義及熟練其計算，並解決生活中的問題。

十二年國教課綱（學習內容）

（一） 評量重點

N-5-5 **分數的乘法**：整數乘以分數、分數乘以分數的意義。知道用約分簡化乘法計算。處理乘積一定比被乘數大的錯誤類型。透過分數計算的公式，知道乘法交換律在分數也成立。

（二） 先備的知識

1. N-4-5 **同分母分數**：一般同分母分數教學（包括「真分數」、「假分數」、「帶分數」名詞引入）。假分數和帶分數之變換。同分母分數的比較、加、減與整數倍。
2. R-5-2 **四則計算規律（II）**：乘除混合計算。「乘法對加法的分配律」。將計算規律應用於簡化混合計算。熟練整數四則混合計算。

（三） 延伸的知識

1. N-5-7 **分數除以整數**：分數除以整數的意義。最後將問題轉化為乘以單位分數。
2. N-6-3 **分數的除法**：整數除以分數、分數除以分數的意義。最後理解除以一數等於乘以其倒數之公式。

三、 教學建議

（一） 評量核心概念

分數乘以分數的問題

（二）學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. 分數×整數

- （1） 真分數×整數時，和擴分的算法混淆，將分子和分母同乘以整數，例

如： $\frac{2}{3} \times 5 = \frac{2 \times 5}{3 \times 5} = \frac{10}{15}$ 。也有可能誤將分母乘以整數，例如：

$$\frac{2}{3} \times 5 = \frac{2}{3 \times 5} = \frac{2}{15}。$$

- （2） 帶分數×整數時，只將帶分數的整數乘以倍數，例如： $1\frac{2}{3} \times 5 = 5\frac{2}{3}$ ；

或只將帶分數的分子乘以倍數，例如： $1\frac{2}{3} \times 5 = 1\frac{10}{3}$ ；或誤將帶分數

的整數、分子和分母全部乘以倍數，例如： $1\frac{2}{3} \times 5 = 5\frac{10}{15}$ 。

2. 整數×分數

(1) 約分錯誤，誤將整數和分子約分，例如： $12 \times \frac{4}{5} = \cancel{12}^3 \times \frac{\cancel{4}}{5} = \frac{3}{5}$ 。

(2) 受分數 \times 分數的口訣「分子乘以分子，分母乘以分母」影響，誤將整數同乘以分母和分子，例如： $6 \times \frac{5}{7} = \frac{6 \times 5}{6 \times 7} = \frac{30}{42} = \frac{5}{7}$ ，結果計算的結果還是乘數 $\frac{5}{7}$ 。

(3) 受整數乘法經驗影響，以為「乘積一定比被乘數大」。

(三)核心概念的教學重點

分數乘法的一般教學程序，依序是**分數乘以整數**、**整數乘以分數**，最後是**分數乘以分數**。學生較易背誦分數乘法法則，但對分數乘法概念的理解，會有難以理解的困境。避免學生只是背公式計算，例如做分數乘以整數時，使用口訣「整數乘以分數的分子」，為了避免落於只是數字符號的操弄而已，因此教師教學要特別著重概念性的理解，學生才能做有意義的計算。

教學活動要先複習四年級已經學過得真（假）分數的整數倍、單位分數的整數倍的題型，再進入到帶分數的整數倍的題型。分數計算的教學最好在一開始可以輔以圖形表徵以幫助學生理解分數四則運算的概念。

1. 分數乘以整數（倍）

真（假）分數乘以整數教學，可以從三個不同的概念導入，一個是套用分數的加法概念、一個是從單位分數的觀點切入、另一個是訴諸內容物的觀點引入，舉例如下：「一包糖果有 54 顆，一位小朋友分得 $\frac{2}{9}$ 包，3 位小朋友共分得幾包？」

(1) 以同分母分數的連加活動解題：題意是在問「3 個 $\frac{2}{9}$ 是多少？」也可說成「 $\frac{2}{9}$ 的 3 倍是多少？」，因此， $\frac{2}{9} \times 3 = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{2+2+2}{9} = \frac{2 \times 3}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ 。

(2) 以單位分數為計數單位的方式解題： $\frac{2}{9}$ 是 2 個 $\frac{1}{9}$ ，「2 個 $\frac{1}{9}$ 」的 3 倍，共是 2×3 個 $\frac{1}{9}$ ，6 個 $\frac{1}{9}$ 是 $\frac{6}{9}$ ， $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ 。所以， $\frac{2}{9} \times 3$ （分母 9、分子 2×3 ） $= \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ 。

(3) 單位分數的內容物是整數個，訴諸內容物的解題策略：學生可以算出一個小朋友分得 $\frac{2}{9}$ 包就是 12 顆，3 個小朋友共分得 36 顆，而 36 顆是把一包平分成 9 份中的 6 份，或把一包平分成 54 份中的 36 份，而得到的結果是 $\frac{6}{9}$ 包 $=\frac{36}{54}$ 包。在一開始接觸分數整數倍的情境提時，

學生可以使用分數的原始意義和整數的乘法解題能力即可以進行解題。

- (4) **布題討論**：教師可以布不同的情境題給學生思考，再讓學生思考討論發現計算的法則，當分數乘以整數時，用整數去乘分數的分子得到的積當作新分子，而新分母仍是原分母： $\frac{b}{a} \times c = \frac{b \times c}{a}$ 。

學生通常喜愛一看到帶分數的乘法，立即將題目中的帶分數全部轉換為假分數處理計算，但時常是將計算過程變為更複雜。計算

$9\frac{1}{5} \times 4$ ，若學生採用的解題策略是帶分數轉換成假分數再來做乘法的

運算， $9\frac{1}{5} \times 4 = \frac{46}{5} \times 4 = \frac{46 \times 4}{5} = \frac{184}{5} = 36\frac{4}{5}$ ，可以清楚看見分子乘以整數（ 46×4 ）之後數字變大了，最後還要再轉為帶分數的繁雜計算，容易造成計算錯誤或計算沒有效率。為了簡便計算，如果學生直接採用分配律的概念解題，就會變得輕鬆許多，如

$$9\frac{1}{5} \times 4 = 9 \times 4 + \frac{1}{5} \times 4 = 36 + \frac{4}{5} = 36\frac{4}{5}。$$

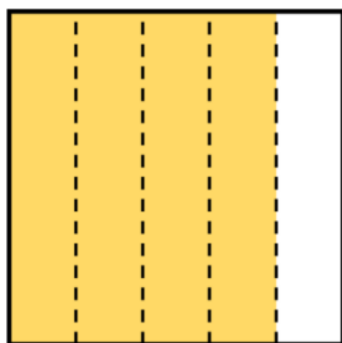
2. **整數×分數(倍)**：這是學生第一次接觸「分數倍」，可以從整數倍的情境開始，再自然帶入不到 1 倍的「分數倍」情境，「分數倍」即是「部分整體」的概念。例如：「一盒糖果有 12 顆 $\frac{1}{4}$ 盒是幾顆？」、「 $\frac{2}{4}$ 盒是幾顆？」、「 $\frac{2}{4}$ 盒是幾顆？」，以引導學生思考：因為不到 1 倍，所以乘積會小於被乘數。
3. **分數×分數（倍）**：同前面分數乘以整數倍問題的延伸，但是因為變成分數倍，學生的理解變得困難。教師還可以利用「面積表徵」及「線段表徵」、字面意義的方式來幫助學生理解分數×分數（倍）的概念，以引導學生發現「分母乘以分母，分子乘以分子」的算則。

(1) 面積表徵

以面積的圖象表徵來幫助學生理解分數乘以分數倍的概念。例

如：「一塊地有 $\frac{4}{5}$ 公畝，其中的 $\frac{2}{3}$ 種玉米，請問種玉米的部份是幾公畝？」若把全部長方形面積當作 1 公畝所以黃色部份面積即 $\frac{4}{5}$ 公畝，

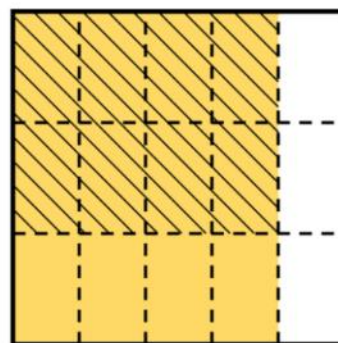
如【圖 16-1】；斜線部份種玉米： $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$ 公畝，如【圖 16-2】，所以種玉米的部份是 $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4 \times 2}{5 \times 3} = \frac{8}{15}$ 公畝。



全部面積：1 公畝

黃色部分： $\frac{4}{5}$ 公畝

【圖 16-1】

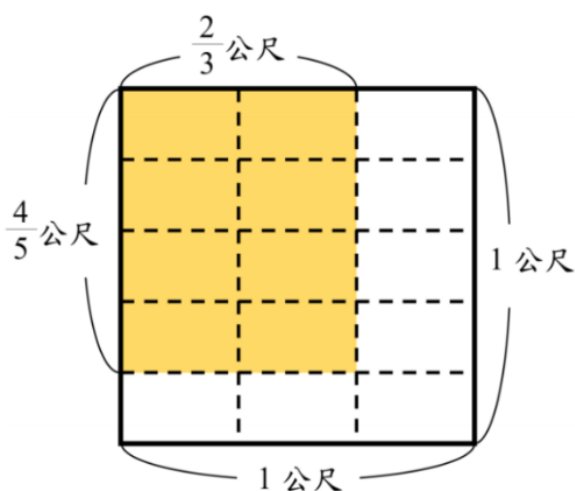


黃色部分： $\frac{4}{5}$ 公畝

斜線部分種玉米： $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$ 公畝

【圖 16-2】

另一種面積表徵方式是在以邊長 1 公尺，面積為 1 平方公尺的正方形土地中，取一塊邊長只有 $\frac{4}{5}$ 公尺，及 $\frac{2}{3}$ 公尺的長方形土地，面積是多少平方公尺？

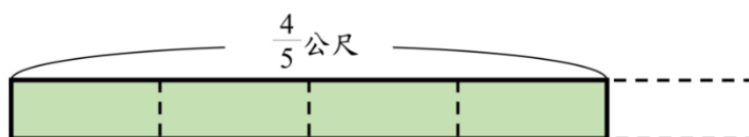


【圖 16-3】

如上【圖 16-3】，所以面積還是 $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4 \times 2}{5 \times 3} = \frac{8}{15}$ (平方公尺)。

(2) 線段表徵

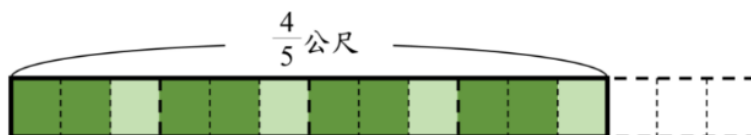
以線段的圖象表徵來幫助學生理解分數乘以分數倍的概念，例如：一條緞帶長 $\frac{4}{5}$ 公尺，如【圖 16-4】，剪下其中的 $\frac{2}{3}$ 做一個蝴蝶結，請問做蝴蝶結的緞帶長幾公尺？



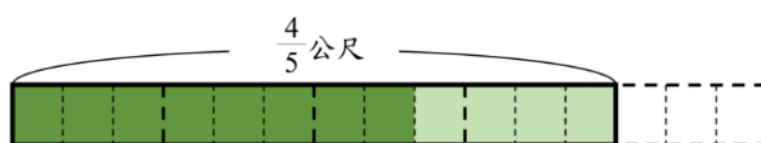
【圖 16-4】

每個 $\frac{1}{5}$ 皆取其中的 $\frac{2}{3}$ ，如【圖 16-5】，則做蝴蝶的緞帶長度即為深綠色長度的總和：

$$\left(\frac{1}{5} \times \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} \times \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} \times \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} \times \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{15}。$$



【圖 16-5】



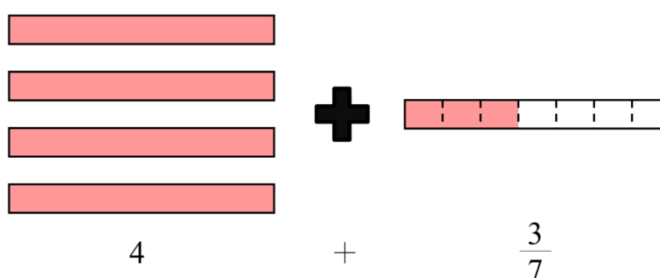
【圖 16-6】

所以【圖 16-6】深綠色部份的總長度為 $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4 \times 2}{5 \times 3} = \frac{8}{15}$ 公尺。

(四)本題教學的加強重點

本題主要的教學重點是透過情境內容，引導學生如何解讀並處理帶分數的整數倍問題：

1.將帶分數視為整數和真分數的合成結果：本題情境內容，可以將 $4\frac{3}{7}$ 公分，看作成4公分和 $\frac{3}{7}$ 公分，也就是 $(4 + \frac{3}{7})$ 公分，如【圖 16-7】：



【圖 16-7】

題意說要綁12個蝴蝶結，分別求12個就要 $4 \times 12 = 48$ 公分(整數乘法計算)， $\frac{3}{7} \times 12 = \frac{36}{7}$ 公分(真分數乘以整數)，故算式紀錄為 $4\frac{3}{7} \times 12 = 4 \times 12 + \frac{3}{7} \times 12$ ，利用分配律的方式解題，如選項④。

2.透過「1」單位與單位分數單位的化聚活動：將帶分數轉換為假分數，再以單位分數為被計數單位，進行整數倍的活動。如本題情境內容，將 $4\frac{3}{7}$ 公

分，看作 $\frac{31}{7}$ 公分，如【圖 16-8】，如選項④。



$$\frac{31}{7}$$

【圖 16-8】

第 17 題

知識向度	量與實測	認知向度	程序執行																												
對應分年細目	5-n-16 能認識重量單位「公噸」、「公噸」及「公斤」間的關係，並做相關計算																														
題目	舉重選手 <u>郭婞淳</u> 參加 2017 <u>臺北</u> 世大運 58 公斤級賽事，以抓舉 107 公斤、挺舉 0.142 公噸的成績破大會紀錄，勇奪金牌為國爭光。本次 <u>郭婞淳</u> 抓舉和挺舉成績的總重量是多少？（1 公噸＝1000 公斤） ① 0.249 公噸 ② 1.212 公噸 ③ 107.142 公斤 ④ 165.142 公斤																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：1</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.79</td><td>0.06</td><td>0.09</td><td>0.03</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.99</td><td>0.00</td><td>0.01</td><td>0.00</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.45</td><td>0.19</td><td>0.25</td><td>0.11</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：1	選項率	0.79	0.06	0.09	0.03	0.00		高分組	0.99	0.00	0.01	0.00	0.00		低分組	0.45	0.19	0.25	0.11	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：1																									
選項率	0.79	0.06	0.09	0.03	0.00																										
高分組	0.99	0.00	0.01	0.00	0.00																										
低分組	0.45	0.19	0.25	0.11	0.00																										

一、 試題分析

（一） 數據解析

本題鑑別度為 0.53，通過率為 0.79，試題難易度 0.72。

（二） 評量目標說明

本題是評量學生是否了解重量單位「公噸」及「公斤」間的單位換算以及加法計算，要求學生能經由重量單位的換算，再進行重量的計算。

（三） 選項表現說明

- 有 79% 的學生選擇正確選項①，顯示約近 8 成的學生已經掌握重量單位「公噸」及「公斤」間的單位換算及加法計算能力。能算出 $107 \text{ 公斤} = 0.107 \text{ 公噸}$ ， $0.142 + 0.107 = 0.249 \text{ 公噸}$ 。
- 有 9% 的學生選擇選項③，這些學生未進行單位換算，看到數字就直接加在一起， $107 + 0.142 = 107.142$ ，而選擇選項③。
- 有 6% 的學生選擇選項②，這些學生單位換算錯誤，誤將 1 公噸＝100 公斤，

107 公斤 = 1.07 公噸， $1.07 + 0.142 = 1.212$ ，而選擇選項②。

4. 有 3% 的學生選擇選項④，這些學生未理解題意，看到數字就直接加在一起，且未進行單位換算。 $8 + 107 + 0.142 = 165.142$ ，而選擇選項④。

(四) 學生表現說明

1. 本題的命題設計為了解學生是否能進行重量複名數的加法計算。學生可以先將 107 公斤換算為 0.107 公噸，或是將 0.142 公噸換算為 142 公斤，最後再以重量加法算出總重量即為本題答案。
2. 本題難易度為 0.72。有將近 8 成的學生能知道「公噸」及「公斤」間的關係並進行重量單位的計算，但仍有 2 成的學生無法解題。從高分組與低分組學生的表現來看，98% 的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生只有 45% 回答正確，有 44% 的低分組學生未能了解「公噸」及「公斤」間的關係，另有 11% 的低分組學生連題意都無法理解，用無意義的數字相加作答。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

(一) 評量重點

5-n-16 能認識重量單位「公噸」、「公噸」及「公斤」間的關係，並做相關計算。

(二) 先備的知識

1. 3-n-16 能認識重量單位「公斤」、「公克」及其關係，並做相關的實測、估測與計算。
2. 4-n-14 能以複名數解決量（長度、容量、重量）的計算問題。

(三) 延伸的知識

6-n-11 能理解常用導出量單位的記法，並解決生活中的問題。

十二年國教課綱（學習內容）

(一) 評量重點

N-5-13 重量：「公噸」。生活實例之應用。含與「公斤」的換算與計算。使用概數。

(二) 先備的知識

N-3-16 重量：「公斤」、「公克」。實測、量感、估測與計算。單位換算。

(三) 延伸的知識

N-6-8 解題：基準量與比較量。比和比值的應用。含交換基準時之關係。

三、教學建議

(一) 評量核心概念

用公噸和公斤的重量單位做加、減、乘、除的計算。

(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. 重量單位「公噸」、「公噸」及「公斤」間的關係

(1) 不理解重量單位小數倍單名數化聚：大單位化成小單位：學生不理解 5.7 公噸是多少公斤。

(2) 不理解重量單位小數倍複名數化聚

甲、大單位化成小單位：學生不理解 5.7 公噸是多少公噸多少公斤。

乙、小單位聚成大單位：學生不理解 3 公噸 5 公斤是多少公噸。

(3) 不理解重量單位整數倍複名數化聚—大單位化成小單位：學生不理解 3 公噸 5 公斤是多少公斤。

2. 相關的計算

(1) 加減法時，容易沒有注意到 1 公噸=1000 公斤，而造成計算錯誤。
例如 5.1 公噸—3 公噸 2 公斤，誤計算成 $5.1-3.2=1.9$ 公噸。或是計算成 $5.1-3.02=2.08$ 公噸。

(2) 乘除法時，容易沒有注意到 1 公噸=1000 公斤，而造成計算錯誤。
例如 $5.08 \text{ 公噸} \times 2 = (\quad)$ 公噸，誤計算成 11.6 公噸。

(三) 核心概念的教學重點

1. 學生必須先建立 1 公噸等於 1000 公斤的起始概念。並學會繪製運用重量定位板：

公噸			公斤
1	0	0	0

2. 教師首先讓學生練習填寫 1000 公斤以內的數於重量定位板上。

(1) 讓學生練習填寫 1 公噸、2 公噸、3 公噸……，等於多少公斤的數於重量定位板上。

(2) 學生精熟練習填寫 1234 公斤類型、1230 公斤類型、1200 公斤類型、1034 公斤類型、1030 公斤類型等於多少噸多少公斤？（由簡到難）。

(3) 讓學生精熟練習填寫二階單位化聚，例如：「1 公噸 234 公斤類型」、「1 噸 230 公斤類型」、「1 公噸 200 公斤類型」、「1 公噸 34 公斤類

型」……，各會等於多少公斤？

3. 重量定位板「小數」之應用：例如 3245 公斤 = 3.245 公噸。

公噸			公斤
千位	百位	十位	個位
3	2	4	5

公噸			
3	2	4	5

4. 重量的計算問題

(1) **重量加法和減法問題**：重量單位化聚完後，利用重量單位定位版進行加減法直式計算。

(2) **重量乘法問題**：可以把問題當作小數乘以整數的計算。

$$1.5 \text{ (公噸)} \times 2000 = (\quad)。$$

1.5 的 1000 倍是小數點往右移三位，所以是 1500。2000 倍是 1000 倍的 2 倍，所以 $1.5 \times 2000 = 1500 \times 2 = 3000$ ，所以是 3000 公噸。

$$\begin{array}{r} 1.5 \\ \times 2000 \\ \hline 3000 \end{array}$$

(3) **重量除法問題**

甲、 題目： $1.5 \text{ (公噸)} \div 25 = (\quad) \text{ (公斤)}。$

方法1：先把大單位化作小單位，也就是把 1.5 化成是 1500 公斤。再利用整數除法完成計算。

$$1500 \div 25 = (\quad)。$$

$$\begin{array}{r} 60 \\ 25 \overline{)1500} \\ \underline{1500} \\ 0 \end{array}$$

方法2：解法 2： $1.5 \div 25 = 0.06 \text{ 公噸} = 60 \text{ 公斤}。$

$$\begin{array}{r} 0.06 \\ 25 \overline{)1.5} \\ \underline{150} \\ 0 \end{array}$$

乙、 題目：**1.6 公噸** $\div 200 \text{ 公斤} = (\quad)。$

方法1：先把大單位化作小單位，1.6 公噸化成是 1600 公斤，再利用整數除法完成計算。 $1600 \div 200 = 8。$

方法2：直接利用小數除法概念計算。

200 公斤 = 0.2 公噸，**1.6 公噸** ÷ 200 公斤 = (8)。

$$\begin{array}{r} 8 \\ 0.2 \overline{)1.600} \\ \underline{1.600} \\ 0 \end{array}$$

(4) 重量的乘法和除法問題

利用乘法解決大單位化為小單位的問題，利用除法解決小單位聚為大單位的問題。

題目：3 公噸 = () 公斤。

解題：「1 公噸是 1000 公斤，3 公噸是多少公斤？」教師可以幫助學生利用算式「 $1000 \times 3 = 3000$ 」，算出 3 公噸是 3000 公斤。

題目：4.6 公噸 = () 公斤。

解題：「1 公噸是 1000 公斤，0.6 公噸是多少公斤？」教師幫助學生利用算式「 $0.6 = \frac{6}{10}$ ， $1000 \div 10 = 100$ ， $100 \times 6 = 600$ 」，算出 0.6 公噸是 600 公斤。4 公噸 = $1000 \times 4 = 4000$ 公斤， $4000 + 600 = 4600$ 公斤。

題目：5000 公斤 = () 公噸。

解題：「1 公噸是 1000 公斤，5000 公斤是多少公噸？」教師幫助學生利用算式「 $5000 \div 1000 = 5$ 」，算出 5000 公斤可以換 5 公噸。

題目：5.89 公噸相當於幾公噸幾公斤？

解題：5.89 公噸 = 5 公噸 + 0.89 公噸，其中 0.89 公噸 = $1000 \text{ 公斤} \times 0.89 = 890$ 公斤，所以 5.89 公噸 = 5 公噸 890 公斤。

(四) 本題教學的加強重點

1. 重量單位小數倍複名數化聚

(1) 大單位化成小單位

方法1：0.142 公噸是 1 公噸的 0.142 倍，1 公噸是 1000 公斤，所以 0.142 公噸 = $1000 \times 0.142 = 142$ 公斤。0.142 公噸也就是 142 公斤。

方法2：1 公噸是 1000 公斤，將 0.142 記成 $\frac{142}{1000}$ ，再利用算式

「 $1000 \div 1000 = 1$ ， $1 \times 142 = 142$ 」，算出 0.142 公噸和 142 公斤一樣重，所以 0.142 公噸是 142 公斤。

(2) 小單位化成大單位

方法1：以 107 公斤為例，1 公噸是 1000 公斤，107 公斤是 1000 公斤的 0.107 倍($107 \div 1000 = 0.107$)，1 公噸的 0.107 倍是 0.107

公噸。所以 107 公斤是 0.107 公噸。

方法2：每 1000 公斤是 1 公噸，用算式「 $107 \div 1000 = \frac{107}{1000} = 0.107$ 」，

算出 107 公斤和 0.107 公噸一樣重。

2. 重量定位板「小數」之應用

學生必須先建立 1 公噸等於 1000 公斤的起始概念。並學會繪製重量定位板（如下表）的能力。

初階版：

公噸			公斤
千位	百位	十位	個位

進階版：

公噸			

步驟1：教師首先讓學生練習填寫 1000 公斤以內的數於重量定位板上。
例如：

公噸			公斤
千位	百位	十位	個位
	1	0	7

公噸			
0	1	0	7

步驟2：讓學生練習填寫 1 公噸、2 公噸、3 公噸、……，等於多少公噸的數於重量定位板上。例如：

公噸			公斤
千位	百位	十位	個位
3	0	0	0

公噸			
3	0	0	0

步驟3：學生練習填寫 0.142 公噸：

公噸			公斤
千位	百位	十位	個位
	1	4	2

公噸			
0	1	4	2

第 18 題

知識向度	量與實測	認知向度	程序執行																												
對應分年細目	5-n-15 能解決時間的乘除計算問題																														
題目	妹妹做一條串珠平均要花 40 分 40 秒，連續做完 3 條串珠已經是下午 1 時 20 分。她從什麼時候開始製作串珠？ ① 上午 11 時 18 分 ② 上午 11 時 58 分 ③ 下午 2 時 42 分 ④ 下午 3 時 22 分																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：1</td></tr><tr><td>選項率</td><td>60.26</td><td>27.12</td><td>5.67</td><td>4.99</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>84.95</td><td>13.37</td><td>0.43</td><td>1.25</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>33.76</td><td>37.77</td><td>16.17</td><td>12.29</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：1	選項率	60.26	27.12	5.67	4.99	0.00		高分組	84.95	13.37	0.43	1.25	0.00		低分組	33.76	37.77	16.17	12.29	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：1																									
選項率	60.26	27.12	5.67	4.99	0.00																										
高分組	84.95	13.37	0.43	1.25	0.00																										
低分組	33.76	37.77	16.17	12.29	0.00																										

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.51，通過率為 0.6，試題難易度 0.59。

(二) 評量目標說明

本題是時間的乘法以及減法計算問題，評量學生是否能由進行時間乘法計算找出時間總量，再以時間減法計算出時刻，並以 12 小時制算出正確答案。

(三) 選項表現說明

- 有 60% 的學生選擇正確選項①，顯示有六成的學生已經掌握解決時間二階單位乘法問題的能力，並利用 1 時是 60 分進行時分換算後再進行時間的減法計算。能正確算出 $40 \text{ 分 } 40 \text{ 秒} \times 3 = 120 \text{ 分 } 120 \text{ 秒} = 2 \text{ 時 } 2 \text{ 分}$ ，並用 $13 \text{ 時 } 20 \text{ 分} - 2 \text{ 時 } 2 \text{ 分} = 11 \text{ 時 } 18 \text{ 分}$ 。
- 有 27% 的學生選擇選項②，這些學生可能誤以為 $120 \text{ 分 } 120 \text{ 秒} = 122 \text{ 分} = 1 \text{ 時 } 22 \text{ 分}$ ，並用 $13 \text{ 時 } 20 \text{ 分} - 1 \text{ 時 } 22 \text{ 分} = 11 \text{ 時 } 58 \text{ 分}$ ，而選擇選項②。
- 有 6% 的學生選擇選項③，這些學生可能誤以為 $120 \text{ 分 } 120 \text{ 秒} = 122 \text{ 分} = 1 \text{ 時 } 22 \text{ 分}$ ，並用 $13 \text{ 時 } 20 \text{ 分} + 1 \text{ 時 } 22 \text{ 分} = 14 \text{ 時 } 42 \text{ 分}$ ，而選擇選項③。

4. 有 5% 的學生選擇選項④，這些學生可能已正確算出 $40\text{ 分 }40\text{ 秒}\times 3=120\text{ 分 }120\text{ 秒}=2\text{ 時 }2\text{ 分}$ ，但卻用 $13\text{ 時 }20\text{ 分}+2\text{ 時 }2\text{ 分}=15\text{ 時 }22\text{ 分}$ ，而選擇選項④。

(四) 學生表現說明

1. 本題的命題設計為主要希望了解學生對於「1 小時是 60 分鐘」以及「○時是下午○時」，此一概念是否完全清楚。因此，在題目中特別讓時間的乘法單位秒的部分大於 100，學生能將 $122\div 60=2\text{ 時 }2\text{ 分}$ ，最後再將時間總量與開始的時刻進行減法計算，完成時間的問題。
2. 本題難易度為 0.59。雖然通過率 60%，顯示有 6 成的學生能以時間乘法算出時間總量，再利用時刻減時間總量是某個時刻的方法，正確解答本題。但仍有近 4 成的學生無法解題。從高分組與低分組學生的表現來看，85% 的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生只有 34% 回答正確。選擇錯誤選項的學生一部分可能雖能進行時間乘法的計算，但不具備 $1\text{ 時}=60\text{ 分}$ 換算的概念，無法進行時、分的時間單位換算，誤將 $1\text{ 時}=100\text{ 分}$ 進行換算，而後再進行時間的減法計算，把錯誤的時刻當作本題答案；另外也有因為無法判斷題意需用減法而錯用加法計算。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

(一) 評量重點

5-n-15 能解決時間的乘除計算問題。

(二) 先備的知識

1. 3-n-13 能認識時間單位「日」、「時」、「分」、「秒」及其間的關係，並做同單位時間量及時、分複名數的加減計算（不進、退位）。
2. 4-n-13 能解決複名數的時間量的計算問題。

(三) 延伸的知識

6-n-12 能認識速度的意義及其常用單位。

十二年國教課綱（學習內容）

(一) 評量重點

N-5-16 **解題：時間的乘除問題**。在分數和小數學習的範圍內，解決與時間相關的乘除問題。

(二) 先備的知識

1. N-3-17 **時間**：「日」、「時」、「分」、「秒」。實測、量感、估測與計算。時間單位的換算。認識時間加減問題的類型。
2. N-4-13 **解題：日常生活的時間加減問題**。跨時、跨午、跨日、24 小時制。含時

間單位換算。

(三) 延伸的知識

N-6-7 解題：速度。比和比值的應用。速度的意義。能做單位換算（大單位到小單位）。含不同時間區段的平均速度。含「距離＝速度×時間」公式。用比例思考協助解題。

三、教學建議

(一) 評量核心概念

進行日、時、分、秒相鄰二階單位的複名數時間量乘法計算。

(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. 將時刻和時間（量）的混淆：有關於某一時刻經過多少時間（量）會到哪一個時刻，或兩個時刻間經過多少時間（量）的計算問題，是學童學習困難的教材。學生對「上午 8 時 20 分到下午 1 時 30 分，共經過多少時間？」缺乏概念，容易把這 2 個時刻相加，8 時 20 分＋1 時 30 分，表示學生對於時間與時刻的觀念不清，所以才會將「共經過多少時間」想成 2 個時刻的相加，也就是「幾時幾分」＋「幾時幾分」的計算。

2. 時間的乘法問題

(1) 把時間單位換算當成是百進位。

$$\begin{array}{r} \text{時} \quad \text{分} \\ 1 \quad 33 \\ \times \quad 4 \\ \hline 4 \quad 132 \\ + \quad 13 \quad 2 \\ \hline 17 \quad 2 \\ \text{下午} \quad 5 \quad 2 \end{array} \quad \rightarrow \text{把 } 132 \text{ 分當成 } 1 \text{ 小時 } 32 \text{ 分}$$

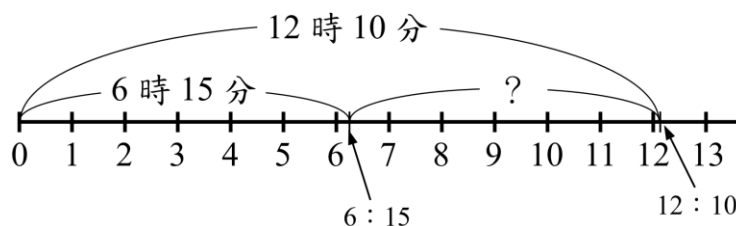
(2) 把時間單位換算當成是十進位。

$$\begin{array}{r} \text{時} \quad \text{分} \\ 1 \quad 33 \\ \times \quad 4 \\ \hline 4 \quad 132 \end{array} \quad \rightarrow \text{把 } 132 \text{ 分當成 } 13 \text{ 小時 } 2 \text{ 分}$$

(三) 核心概念的教學重點

1. 時刻和時間（量）的計算問題（配合時間線段圖進行解題）

學童可以在時間直線上標示某時刻，並能瞭解該時刻和表示從 9 時間開始到時刻所經過的時間量的不同，可讓學童將問題利用算式填充題呈現，再配合時間數線說明。例如：6 時 15 分到 12 時 10 分經過多少時間？學生在以 1 小時為單位的時間數線上將問題標示出來，如【圖 18-1】：



【圖 18-1】

再記成算式填充題：

A 型：12 時 10 分－6 時 15 分＝（ ）時（ ）分。

B 型：6 時 15 分＋（ ）時（ ）分＝12 時 10 分。

C 型：12 時 10 分－（ ）時（ ）分＝6 時 15 分。

學童就時間數線的說明，可能有兩類：一類是「位置經過位移到新位置」的向量觀點，即某時刻加（減）時間量是某某時刻（對應 B、C 型，也可配合點算），或二時刻相差一個時間量（對應 A 型）的說法。一類是「時間量加減」的計算觀點，即將時刻換成從 0 時間量，對兩個時間量作加法運算（對應 B 型）或減法運算（對應 A、C 型）的說法。

2. 時間的乘法計算

題目：1 時 15 分×6＝（ ）時（ ）分。

解題：1 時×6＝6 時，15 分×6＝90 分＝1 時 30 分，

6 時＋1 時 30 分＝7 時 30 分。

（四）本題教學的加強重點

1. 分和秒的化聚及記錄

（1）解決時間單位由「秒」聚成「分」的問題：先以時間為某（60 的整數倍）秒是幾分的问题，將以秒為單位的時間聚成以分為單位的時間。例如 60 秒是 1 分，120 秒是 2 分，300 秒是 5 分。

（2）解決時間單位由「秒」聚成「○分○秒」的問題：已經知道 60 秒是 1 小時，70 秒比 60 秒多了 10 秒，所以是 1 分 10 秒。140 秒是 2 個 60 秒和 20 秒，所以是 2 分 20 秒。 $140 \div 60 = \boxed{2} \cdots \cdots \boxed{20} = 2 \text{ 分 } 20 \text{ 秒}$ 。

（3）解決時間單位由「○分○秒」化成「秒」的問題：已經知道 60 秒是 1 分，若題目為 1 分 10 秒，則是將 $60 \times 1 + 10 = 70$ 。

2. 「時」和「分」的複名數乘法問題

（1）先算分，再算秒：40 分 40 秒×3＝（ ）時（ ）分。
 $40 \text{ 分} \times 3 = 120 \text{ 分}$ ， $40 \text{ 秒} \times 3 = 120 \text{ 秒}$
 $120 \text{ 分} + 120 \text{ 秒} = 2 \text{ 時 } 2 \text{ 分}$ 。

（2）先算分，再算時：40 分 40 秒×3＝（ ）時（ ）分。

$$40 \text{ 秒} \times 3 = 120 \text{ 秒}, 40 \text{ 分} \times 3 = 120 \text{ 分}$$
$$120 \text{ 分} + 120 \text{ 秒} = 2 \text{ 時 } 2 \text{ 分}。$$

3. 「跨午」的題型（可配合時間數線圖進行說明）

師：「從下午 1 時 20 分開始，1 小時前是幾時幾分？」

生：「12 時 20 分。」

師：「2 小時前是幾時幾分？」

生：「11 時 20 分。」

師：「2 小時 2 分前是幾時幾分？」

生：「11 時 18 分。」

師：「所以 11 時 18 分是從下午 1 時 20 分往前經過了 2 小時 2 分，那下午 1 時 20 分又是 24 時制的幾時幾分呢？」

生：「下午 1 時 20 分又是 24 時制的 13 時 20 分。13 時 20 分表示從 0 時開始，經過了 13 時 20 分。因此從 13 時 20 分往前經過了 2 小時 2 分，故答案是上午 11 時 18 分。」

(五) 其他

數學語言中的「時間量」和「時刻」：在數學語言中常會出現「○時○分」，但「○時○分」可能有兩種意義，一種代表的是**時刻**，也就是一個時間點，例如：上午 10 點 30 分、15 時 42 分或是下午 3 時 42 分。另一種代表的是**時間量**，也就是兩時刻間所經過的時間量，是時刻轉換為時間量後，才能進行相減的運算。

第 19 題

知識向度	量與實測	認知向度	概念理解																												
對應分年細目	5-n-17 能認識面積單位「公畝」、「公頃」、「平方公里」及其關係，並做相關計算																														
題目	小傑有一塊 3 公頃的土地，其中的 1 公頃 90 公畝是遊樂區，其餘部分是購物中心。購物中心的面積是多少？（1 公頃＝100 公畝） ① 1 公頃 10 公畝 ② 1 公頃 910 公畝 ③ 2 公頃 10 公畝 ④ 4 公頃 90 公畝																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：1</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.70</td><td>0.08</td><td>0.13</td><td>0.06</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.92</td><td>0.03</td><td>0.04</td><td>0.38</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.353</td><td>17.35</td><td>27.34</td><td>20.4</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：1	選項率	0.70	0.08	0.13	0.06	0.00		高分組	0.92	0.03	0.04	0.38	0.00		低分組	0.353	17.35	27.34	20.4	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：1																									
選項率	0.70	0.08	0.13	0.06	0.00																										
高分組	0.92	0.03	0.04	0.38	0.00																										
低分組	0.353	17.35	27.34	20.4	0.00																										

一、 試題分析

（一） 數據解析

本題鑑別度為 0.57，通過率為 0.7，試題難易度 0.64。

（二） 評量目標說明

本題是評量學生是否了解面積單位「公頃」及「公畝」間的單位換算以及減法計算，要求學生能經由面積單位的換算，再進行面積的計算。

（三） 選項表現說明

- 有 70% 的學生選擇正確選項①，顯示大部分的學生已經掌握面積單位「公頃」及「公畝」間的單位換算以及減法計算能力。能知道 1 公頃=100 公畝，全部土地的面積扣掉遊樂區的面積，就是購物中心的面積。3 公頃-1 公頃 90 公畝=2 公頃 100 公畝-1 公頃 90 公畝=1 公頃 10 公畝。
- 有 13% 的學生選擇選項③，這些學生可能直接看到數字就進行計算，先算「公頃」部分：3 公頃-1 公頃=2 公頃，再算「公畝」部分：用題目提供的「1 公頃=100 公畝」，100 公畝-90 公畝=10 公畝，而選擇選項③。
- 有 8% 的學生選擇選項②，這些學生可能將 1 公頃誤認為是 1000 公畝，而將

公畝部分的運算誤算成： $1000\text{ 公畝}-90\text{ 公畝}=910\text{ 公畝}$ ，而選擇選項②。

4. 有 6% 的學生選擇選項④，這些學生可能未了解題意，將題幹中出現的兩個數字相加而得出之答案， $3\text{ 公頃}+1\text{ 公頃 }90\text{ 公畝}=4\text{ 公頃 }90\text{ 公畝}$ ，而選擇選項④。

(四) 學生表現說明

1. 本題命題設計為了解學生是否能進行面積複名數的減法計算。學生可以透過 $1\text{ 公頃}=100\text{ 公畝}$ 的關係，換算為面積的單名數（3 公頃）為複名數（2 公頃 100 公畝），最後再以重量減法算出相差的重量，算出的答案即為本題答案。
2. 本題難易度為 0.64。有 7 成的學生能知道「公頃」及「公畝」間的關係並進行面積單位的計算，但仍有 3 成的學生無法解題。從高分組與低分組學生的表現來看，92% 的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生只有 35% 回答正確，有 17% 的低分組學生未能了解「公頃」及「公畝」間的關係；其餘近 5 成低分組學生對於兩階單位需退位的減法計算以及題意的理解均無法掌握。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

(一) 評量重點

5-n-17 能認識面積單位「公畝」、「公頃」、「平方公里」及其關係，並做相關計算。

(二) 先備的知識

1. 4-n-17 能認識面積單位「平方公尺」，及「平方公分」、「平方公尺」間的關係，並做相關計算。
2. 4-n-18 能理解長方形和正方形的面積公式與周長公式。

(三) 延伸的知識

6-n-14 能理解圓面積與圓周長的公式，並計算簡單扇形的面積。（同 6-s-03）

十二年國教課綱（學習內容）

(一) 評量重點

N-5-12 面積：「公畝」、「公頃」、「平方公里」。生活實例之應用。含與「平方公尺」的換算與計算。使用概數。

(二) 先備的知識

1. S-4-3 正方形與長方形的面積與周長：理解邊長與周長或面積的關係，並能理解其公式與應用。簡單複合圖形。
2. N-4-11 面積：「平方公尺」。實測、量感、估測與計算。

(三) 延伸的知識

S-6-3 圓周率、圓周長、圓面積、扇形面積：用分割說明圓面積公式。求扇形弧長與面積。知道以下三個比相等：(1) 圓心角：360；(2) 扇形弧長：圓周長；(3) 扇形面積：圓面積，但應用問題只處理用(1)求弧長或面積。

三、教學建議

(一) 評量核心概念

認識 1 公畝 = 100 平方公尺；1 公頃 = 100 公畝；1 平方公里 = 100 公頃 = 10000 公畝 = 1000000 平方公尺。

(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. **缺乏量感**：缺乏 1 平方公里、1 公頃、1 公畝、100 平方公尺、1 平方公尺的量感。
2. **混淆公頃、公畝的單位**：學生容易誤將 1 公頃當成 1000 公畝，1 公畝 = 1000 平方公尺。

(三) 核心概念的教學重點

1. **認識和理解面積單位「1 平方公分」、「1 平方公尺」、「1 公畝」、「1 公頃」、「1 平方公里」，以及與長度的單位不同**
 - (1) **複習面積單位「1 平方公分」、「1 平方公尺」，進而引出「1 平方公里」**：老師先帶領學生複習舊經驗，邊長 1 公分的正方形，面積是「1 平方公分」、邊長 1 公尺的正方形，面積是「1 平方公尺」，接著再引出邊長 1 公里的正方形，面積是「1 平方公里」。
 - (2) **大單位的命名和定義**：繼續利用平方公尺的單位來描述「1 公畝」、「1 公頃」、「1 平方公里」，建議教師可以先命名「邊長 10 公尺正方形的面積為 1 公畝」、「邊長 100 公尺正方形的面積為 1 公頃」、「邊長 1000 公尺正方形的面積為 1 平方公里」，再透過面積公式說明「1 公畝的面積為 100 平方公尺」，「1 公頃的面積為 10000 平方公尺」，「1 平方公里的面積為 1000000 平方公尺」。
2. **進行面積實測活動，以增加學生的量感**：學生能對 1 平方公分、1 平方公尺、1 公畝、1 公頃和 1 平方公里有實際量感。
 - (1) 可以舉例讓學生能知道手指甲的大小大約是 1 平方公分。
 - (2) 可以舉例讓學生能知道一張報紙攤開後的大小大約是 1 平方公尺；1 張貼紙的大小約是 10 平方公分。
 - (3) 先討論如何在躲避球場上圍出面積是 1 公畝的範圍，再到躲避球場上圍出來，並知道躲避球場比 1 公畝大。
 - (4) 可以先與學生討論 1 公頃有多大，由於 1 公頃面積較大比較不能直接

觀察得到。建議教師舉例大約 1 公頃大小的公共場地或就近的大型運動場，例如「新莊體育館的面積是 10928 平方公尺」，比 1 公頃大一些。

- (5) 可以先與學生討論 1 公里有多大，由於 1 公里面積非常廣大無法直接觀察得到。建議教師舉例人人皆知的公共場地大小與 1 平方公里作比較，進而感知 1 平方公里的實際大小，例如「大安森林公園的面積是 25.894 公頃」，那麼「4 個大安森林公園的面積大約是 1 平方公里」；也可舉例所居住城市，以新北市為例，面積是 2053 平方公里。

3. 「平方公尺」、「公畝」、「公頃」與「平方公里」單位間的化聚

(1) 「平方公尺」與「公畝」單位間的化聚

- i. 知道「1 公畝=100 平方公尺」，練習多少個 1 公畝是多少平方公尺，並將以公畝為單位的面積化為以平方公尺為單位，例如：2 公畝是多少平方公尺？
- ii. 知道「1 平方公尺=0.01 公畝」，練習將以平方公尺為單位的面積聚為以公畝為單位，例如：3 平方公尺是幾公畝？
- iii. 探究 1 平方公尺是多少公畝，教師可以帶領學生從「1 公畝=100 平方公尺」中明白 1 公畝是 100 個 1 平方公尺，那麼 1 個 1 平方公尺是 $\frac{1}{100}$ 公畝，也就是 0.01 公畝，得到的結果是「1 平方公尺=0.01 公畝」。並將以平方公尺為單位的面積轉化為以公畝為單位，例如 2 平方公尺是多少公畝？20 平方公尺是多少公畝？

(2) 「平方公尺」與「公頃」單位間的化聚

- i. 知道「1 公頃=10000 平方公尺」，練習多少個 1 公頃是多少平方公尺，並將以公頃為單位的面積化為以平方公尺為單位，例如：2 個 1 公頃是多少公頃？是多少平方公尺？
- ii. 知道「1 平方公尺=0.0001 公頃」，練習將以平方公尺為單位的面積聚為以公頃為單位，例如：10000 平方公尺是 1 公頃，30000 平方公尺是幾公頃？
- iii. 探究 1 平方公尺是多少公頃，教師可以帶領學生從「1 公頃=10000 平方公尺」中明白 1 公頃是 10000 個 1 平方公尺，那麼 1 個 1 平方公尺是 $\frac{1}{10000}$ 公頃，也就是 0.0001 公頃，得到的結果是「1 平方公尺=0.0001 公頃」。並將以平方公尺為單位的面積聚為以公頃為單位，例如 2 平方公尺是多少公頃？20 平方公尺是多少公頃？200 平方公尺是多少公頃？

(3) 「公畝」與「公頃」單位間的化聚

- i. 思考與探究「1 公頃是多少公畝」？並將以 1 公頃為單位的面積化為

以平方公尺為單位，1 公畝為單位的面積化為以平方公尺為單位，可以得到「公畝」和「公頃」的關係是「1 公頃等於 100 公畝」。

- ii. 知道「1 公頃=100 公畝」，練習將以公頃為單位的面積化為以公畝為單位。例如：3 公頃是多少公畝？是多少平方公尺？
- iii. 知道「1 公畝=0.01 公頃」，練習將以公畝為單位的面積聚為以公頃為單位，例如：500 公畝是多少公頃？
- iv. 探究 1 公畝是多少公頃，教師可以帶領學生從「1 公頃=100 公畝」中明白 1 公頃是 100 個 1 公畝，那麼 1 個 1 公畝是 $\frac{1}{100}$ 公頃，也就是 0.01 公頃，得到的結果是「1 公畝=0.01 公頃」。並將以公畝為單位的面積聚為以公頃為單位，例如 2 公畝是多少公頃？20 公畝是多少公頃？

(4) 「平方公尺」與「平方公里」單位間的化聚

- i. 知道「1 平方公里=1000000 平方公尺」練習多少個 1 平方公里是多少平方公尺，並將以平方公里為單位的面積化為以平方公尺為單位，例如：2 個 1 平方公里是多少平方公里？是多少平方公尺？
- ii. 知道「1 平方公尺=0.000001 平方公里」練習將以平方公尺為單位的面積聚為以平方公里為單位，例如：2 平方公尺是幾平方公里？
- iii. 探究 1 平方公尺是多少平方公里，教師可以帶領學生從「1 平方公里=1000000 平方公尺」中明白 1 平方公里是 1000000 個 1 平方公尺，那麼 1 個 1 平方公尺是 $\frac{1}{1000000}$ 公頃，也就是 0.000001 公頃，得到的結果是「1 平方公尺=0.000001 平方公里」。並將以平方公尺為單位的面積聚為以平方公里為單位，例如 1 平方公尺是 0.000001 平方公里，3 平方公尺是幾平方公里？
- iv. 綜合以上面積單位的關係和轉換，可以用以下的寫法來加深學生的概念：

$$\begin{array}{l} \downarrow (\times 100) \downarrow \\ 1 \text{ 公頃} = (\quad) \text{ 公畝} ; \\ \uparrow (\div 100) \uparrow \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \downarrow (\times 100) \downarrow \\ 1 \text{ 平方公里} = (\quad) \text{ 公頃} ; \\ \uparrow (\div 100) \uparrow \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \downarrow (\times 10000) \downarrow \\ 1 \text{ 平方公里} = (\quad) \text{ 公畝} 。 \\ \uparrow (\div 10000) \uparrow \end{array}$$

4. 使用面積定位板，可以幫助學生做面積單位的轉換

- (1) 1 平方公尺=10000 平方公分，是邊長 1 公尺圍成的正方形面積。

平方公尺				平方公分
萬位	千位	百位	十位	個位

- (2) 1 公畝 = 100 平方公尺 = 1000000 平方公分，是邊長 10 公尺圍成的正方形面積。

公畝		平方公尺				平方公分
百萬位	十萬位	萬位	千位	百位	十位	個位

- (3) 1 公頃 = 100 公畝 = 10000 平方公尺，是邊長 100 公尺圍成的正方形面積。

公頃		公畝		平方公尺
萬位	千位	百位	十位	個位

- (4) 1 平方公里 = 100 公頃 = 10000 公畝，是邊長 1000 公尺圍成的正方形面積。

平方公里		公頃		公畝
萬位	千位	百位	十位	個位

(四) 本題教學的加強重點

利用面積定位板幫助學生加強「1 公頃 = 100 公畝」面積單位的轉換關係以及複名數中兩階單位的換算關係。

如：3 公頃 = 300 公畝。

公頃		公畝	➡	公頃		公畝
3				3	0	0

1 公頃 90 公畝 = 190 公畝。

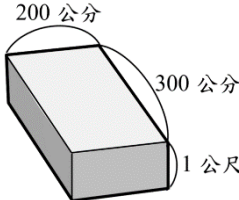
公頃		公畝	➡	公頃		公畝

1	9	0		1	9	0
---	---	---	--	---	---	---

在面積定位板中可以清楚的看出複名數中兩階單位的換算關係。可以從中讓學生發現 3 公頃也可以換成 2 公頃 100 公畝，如此即可以減去 1 公頃 90 公畝進行計算。也可以將 3 公頃換成 300 公畝，1 公頃 90 公畝換成 190 公畝，用 300 公畝減去 190 公畝可得 110 公畝，記在定位板上可換成 1 公頃 10 公畝。

公頃		公畝	➡	公頃		公畝
1	1	0		1	1	0

第 20 題

知識向度	量與實測	認知向度	程序執行																												
對應分年細目	5-n-19 能認識體積單位「立方公尺」，及「立方公分」、「立方公尺」間的關係，並做相關計算																														
題目	<p>有一個長方體（如下圖），它的體積是多少立方公尺？ （1 公尺＝100 公分，1 立方公尺＝1000000 立方公分）</p> <div></div> <p>① 0.06 立方公尺 ② 6 立方公尺 ③ 600 立方公尺 ④ 60000 立方公尺</p>																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：2</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.10</td><td>0.65</td><td>0.08</td><td>0.14</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.06</td><td>0.90</td><td>0.01</td><td>0.03</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.15</td><td>0.31</td><td>0.21</td><td>0.33</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：2	選項率	0.10	0.65	0.08	0.14	0.00		高分組	0.06	0.90	0.01	0.03	0.00		低分組	0.15	0.31	0.21	0.33	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：2																									
選項率	0.10	0.65	0.08	0.14	0.00																										
高分組	0.06	0.90	0.01	0.03	0.00																										
低分組	0.15	0.31	0.21	0.33	0.00																										

一、 試題分析

（一） 數據解析

本題鑑別度為 0.59，通過率為 0.65，試題難易度 0.61。

（二） 評量目標說明

本題是要求學生能由 1 公尺＝100 公分來理解立方公尺和立方公分之間的關係並進行換算，評量學生是否理解當邊長給定不同單位時，可以用長度關係換算成同單位再進行計算。

（三） 選項表現說明

- 有 65% 的學生選擇正確選項②，顯示有近 7 成的學生可以理解立方公尺和立方公分之間的關係，並用長度關係換算成同單位，進行體積的計算。
- 有 14% 的學生選擇選項④，這些學生誤認 300 和 200 的單位是公尺

$300 \times 200 \times 1 = 60000$ (立方公尺)，而選擇選項④。

3. 有 10% 的學生選擇選項①，這些學生誤認 1 的單位是公分， $300 \times 200 \times 1 = 60000$ (立方公分) = 0.06 (立方公尺)，而選擇選項①。
4. 有 8% 的學生選擇選項③，這些學生公分及公尺的單位換算錯誤 $300 \text{ 公分} = 30 \text{ 公尺}$ ， $200 \text{ 公分} = 20 \text{ 公尺}$ $30 \times 20 \times 1 = 600$ (立方公尺)，而選擇選項③。

(四) 學生表現說明

1. 本題的命題設計主要評量學生是否理解立方公尺和立方公分之間的關係並進行換算，是否能理解當邊長給定不同單位時，可以用長度關係換算成同單位再進行計算。學生能清楚知道 1 公尺 = 100 公分的概念，可以統一換成公尺 (或公分) 的單位計算體積為立方公尺 (或立方公分)，再進行體積的換算即能正確解答本題。
2. 本題難易度為 0.61。有將近 7 成的學生已能掌握立方公尺和立方公分之間的關係，並用長度關係換算成同單位，進行體積的計算，但仍有 3 成多的學生，概念並不清楚。從高分組與低分組學生的表現來看，90% 的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生只有 31% 回答正確，大部分低分組學生的錯誤類型都忽略長寬高是不同長度單位，直接將數字相乘。顯示低分組學生中對於體積單位的概念仍不清楚。

二、教材地位分析

97 課綱 (分年細目)

(一) 評量重點

5-n-19 能認識體積單位「立方公尺」、「立方公分」及「立方公尺」間的關係，並做相關計算。

(二) 先備的知識

1. 2-n-15 能認識長度單位「公分」、「公尺」及其關係，並能做相關的實測、估測與同單位的計算。
2. 3-n-14 能認識長度單位「毫米」及「公尺」、「公分」、「毫米」間的關係，並做相關的實測、估測與計算。
3. 4-n-19 能認識體積及體積單位「立方公分」。

(三) 延伸的知識

6-n-15 能理解簡單直柱體的體積為底面積與高的乘積。

十二年國教課綱 (學習內容)

(一) 評量重點

1. S-5-5 正方體和長方體：計算正方體和長方體的體積與表面積。正方體與長方體的體積公式。

2. N-5-14 **體積**：「立方公尺」。簡單實測、量感、估測與計算。

(二) **先備的知識**

1. N-2-11 **長度**：「公分」、「公尺」。實測、量感、估測與計算。單位換算。
2. S-4-4 **體積**：以具體操作為主。在活動中認識體積的意義與比較。認識 1 立方公分之正方體，能理解並計數正方體堆疊的體積。
3. N-4-12 **體積與「立方公分」**：以具體操作為主。體積認識基於 1 立方公分之正方體。

(三) **延伸的知識**

S-6-4 **柱體體積與表面積**：含角柱和圓柱。利用簡單柱體，理解「柱體體積＝底面積×高」的公式。簡單複合形體體積。

三、教學建議

(一) **評量核心概念**

長方體體積單位的換算及計算（1 立方公尺＝1000000 立方公分）。

(二) **學生常見的錯誤類型／迷思概念**

1. 「面積單位」與「長度單位」換算關係混淆不清：因為 1 公尺＝100 公分，誤認 1 平方公尺＝100 平方公分。
2. 「體積單位」與「長度單位」換算關係混淆不清：因為 1 公尺＝100 公分，誤認 1 立方公尺＝100 立方公分。
3. 「體積單位」與「面積單位」換算關係混淆不清：將立方公尺和立方公分單位換算錯誤。學生容易將 1 立方公尺＝1000000 立方公分，與 1 平方公尺＝10000 平方公分混淆。
4. 「體積單位」與「容量單位」換算關係混淆不清：誤認 1 立方公尺＝1 公升＝1000 立方公分。

(三) **核心概念的教學重點**

1. 「1 平方公尺」和「1 公尺」的不同

- (1) **周長和面積大不同**：計算正方形周長的公式是「邊長×4」，計算正方形的面積公式是「邊長×邊長」。有些學童在計算周長與面積時會將兩個公式互相混淆，例如：他們會將正方形的周長公式「邊長×4」當作是面積公式；或將「長×寬」當作是長方形的周長公式，導致學生會以面積公式解周長問題。
- (2) **先教周長，再教面積概念**：老師可以先教周長概念，待學生理解並熟悉後，再進行面積部分的教學。老師也可以利用毛線或皮尺來教學生測量周界長度，利用平方公分板數格子的方式來測量面積大小。除此

之外可以提供圖形讓學生具體描繪矩形的周界與面積。

- (3) **公分和公尺、平方公分和平方公尺的單位換算：**有一個邊長 1 公尺的正方形，1 公尺等於 100 公分，也就是這個正方形一邊可以排 100 個 1 平方公分，總共可以排 100 排，所以面積是 $100(\text{個}) \times 100(\text{排}) = 10000(\text{個})$ 平方公分，所以 1 平方公尺 = 10000 平方公分，面積是跟著「**邊長** \times **邊長**」在變化。透過公分與公尺之間關係說明，以推演平方公尺與平方公分的單位**換算**，並透過平方公分板之實體操作讓學生更清楚面積單位之換算。
- (4) **長度是一維空間，面積是二維空間：**建立學生公分和公尺是長度的單位，屬於一維空間；而平方公分和平方公尺則是面積的單位，是屬於二維空間，邊長 1 公尺的正方形構成的面積是 1 平方公尺，也就是 10000 平方公分；因此面積和長度兩者大不相同。

2. 「1 立方公尺」和「1 平方公尺」的不同

- (1) **面積和體積大不同：**1 立方公尺和 1 平方公尺，最大的相同點在於都有「公尺」，所以學生容易搞混兩者之間的關係。但立方公尺是計算立體形體體積的單位，而平方公尺是計算平面圖形面積的單位。同樣是以 1 公尺為邊長構成的圖形，邊長 1 公尺的正方形構成的面積是 1 平方公尺；邊長 1 公尺的正方體構成的體積是 1 立方公尺。
- (2) **認識 1 平方公尺：**教學時，老師可以用一張邊長 10 公分的色紙做基準，這張色紙的面積是 100 平方公分。接著請學生圍出邊長 1 公尺的正方形大小，學生利用色紙做拼排，請學生紀錄這個邊長 1 公尺的正方形面積，用了幾張色紙。學生可以發現一排用了 10 張色紙，排了 10 排，所以用了 $10 \times 10 = 100$ 張色紙。所以這個邊長 1 公尺的正方形面積大小是 $100(\text{平方公分}) \times 100(\text{張}) = 10000$ 平方公分。所以邊長 1 公尺的正方形構成的面積大小是 10000 平方公分。
- (3) **認識 1 立方公尺：**教學時，老師可以用一個邊長 10 公分的立體紙盒做基準，這個紙盒的體積是 1000 立方公分。接著請學生利用 1 立方公尺的教具，圍出邊長 1 公尺的正方體大小，學生利用立體紙盒做堆疊，請學生紀錄這個邊長 1 公尺的正方體體積，用了幾個立體紙盒。學生可以發現一層是一排用了 10 個立體紙盒，排了 10 排，所以用了 $10 \times 10 = 100$ 個立體紙盒，是 $100(\text{立方公分}) \times 1000(\text{個}) = 100000$ 立方公分。這個邊長 1 公尺的正方體總共需要堆疊 10 層，體積大小是 $100000(\text{立方公分}) \times 10(\text{層}) = 1000000$ 立方公分。所以邊長 1 公尺的正方體構成的體積大小是 1000000 立方公分。
- (4) **總結：**邊長 1 公尺的正方形構成的面積是 1 平方公尺，也就是 10000 平方公分，屬於二維的平面空間；邊長 1 公尺的正方體構成的體積是 1 立方公尺，也就是 1000000 立方公分，是屬於三維的立體空間。所以平方公分或平方公尺是計算平面面積的單位，而立方公分或立方公尺是計算立體體積的單位，兩者不可以混淆。

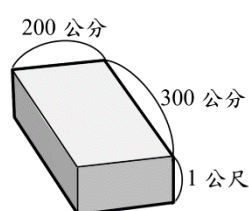
3. 「1 立方公尺」與「1 立方公分」的關係

作 1 立方公分與 1 立方公尺間的關係及其換算。並以 1 公升做無縫隙的立體堆疊，培養 1 立方公尺的量感。生活中，孩子很少有機會接觸 1 立方公尺的物品，所以缺乏 1 立方公尺的量感，老師可利用紙板拼成實際大小 1 立方公尺的紙箱，讓學生感受 1 立方公尺的大小，有了量感後才能有數感。

1 立方公尺是每邊長 1 公尺所組成的正方體，也可以說是每邊長 100 公分所組成的正方體，所以 1 立方公尺正方體的體積是 $100 \times 100 \times 100$ 個 1 立方公分所組成，體積是 1000000 立方公分。

(四) 本題教學的加強重點

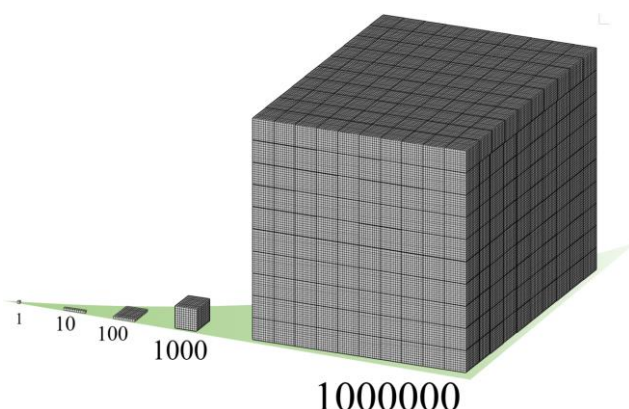
1. 注意單位的重要性：老師可以請學生先觀察【圖 20-1】所標示的長度及單位。



【圖 20-1】

教師可提問關鍵問話，引導學生注意數字及單位的意義。如：「圖示中標示的數字長度 1 和長度 200 看起來沒有差 200 倍，為什麼？」、「圖示中標示的單位相同嗎？不同要怎麼計算體積？」透過提問讓學生注意到數字及單位的關係。

2. 連結「1 立方公尺」與「1 立方公分」的關係：本題學生可以將公分單位統一都換成公尺單位， $300 \text{ 公分} = 3 \text{ 公尺}$ ， $200 \text{ 公分} = 2 \text{ 公尺}$ ，用 $3 \times 2 \times 1 = 6$ (立方公尺)，即可算出選項中以立方公尺為單位的答案。但是建議老師也可在教學討論時，讓學生試著統一將公尺換成公分的單位， $1 \text{ 公尺} = 100 \text{ 公分}$ ，用 $300 \times 200 \times 100 = 6000000$ (立方公分)，然後透過【圖 20-2】的表徵來連結 1 立方公尺是 1000000 立方公分：

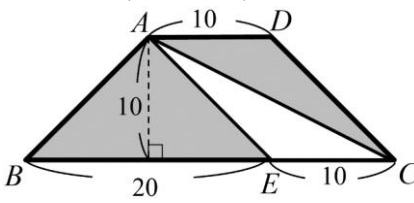


【圖 20-2】

3. 使用正方體體積計算：每邊長 1 公尺 = 100 公分，正方體體積 = 邊長 \times 邊長 \times 邊長，也就是 $100 \times 100 \times 100 = 1000000$ 立方公分。

再回到原題中計算出來的體積 6000000 (立方公分)，和 6 個 1000000 立方公分一樣大，所以 $6000000 \text{ (立方公分)} = 6 \text{ (立方公尺)}$ ，讓學生看到不論把邊長統一換成公尺或是公分單位，結果都是相同的。

第 21 題

知識向度	幾何	認知向度	解題思考																												
對應分年細目	5-s-05 簡單平行四邊形、三角形及梯形複合圖形面積的問題。																														
題目	<p>有一個梯形 $ABCD$(如下圖)，灰色部分的面積是多少平方公分？</p>  <p>(單位：公分)</p> <p>① 100 平方公分 ② 150 平方公分 ③ 300 平方公分 ④ 350 平方公分</p>																														
答題表現 選項分析	<table> <tr> <th>選 項</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> <th>其他</th> <th>答案：2</th> </tr> <tr> <td>選項率</td> <td>0.12</td> <td>0.64</td> <td>0.16</td> <td>0.08</td> <td>0.00</td> <td></td> </tr> <tr> <td>高分組</td> <td>0.04</td> <td>0.91</td> <td>0.03</td> <td>0.02</td> <td>0.00</td> <td></td> </tr> <tr> <td>低分組</td> <td>0.21</td> <td>0.31</td> <td>0.31</td> <td>0.17</td> <td>0.00</td> <td></td> </tr> </table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：2	選項率	0.12	0.64	0.16	0.08	0.00		高分組	0.04	0.91	0.03	0.02	0.00		低分組	0.21	0.31	0.31	0.17	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：2																									
選項率	0.12	0.64	0.16	0.08	0.00																										
高分組	0.04	0.91	0.03	0.02	0.00																										
低分組	0.21	0.31	0.31	0.17	0.00																										

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.60，通過率為 0.64，試題難易度 0.61。

(二) 評量目標說明

本題主要是評量學童在面對複合圖形時，能否運用平行四邊形、三角形及梯形的面積公式計算出指定圖形的面積。

(三) 選項表現說明

- 有 64% 的學生選擇②，顯示這些學生能求出梯形 $ABCD$ 面積 $= (\text{上底} + \text{下底}) \times \text{高} \div 2 = (10 + 30) \times 10 \div 2 = 200$ 及三角形 AEC 面積 $= \text{底} \times \text{高} \div 2 = 10 \times 10 \div 2 = 50$ 。最後求出灰色部分的面積為 $200 - 50 = 150$ 。亦或知道三角形 AEC 面積 $=$ 三角形 ACD 面積，灰色部分的面積 $=$ 三角形 ABE 面積 $+$ 三角形 AEC 面積 $=$ 三角形 ABC 面積 $= (20 + 10) \times 10 \div 2 = 150$ 。

- 有 16% 的學生選擇③，顯示這些學生可能對於梯形面積公式與三角形面積

公式記憶或計算錯誤，都沒有「 $\div 2$ 」，所以得到正確答案的 2 倍的數字。

3. 有 12% 的學生選擇正確選項①，顯示這些學生可能用對梯形面積公式進行面積的計算，梯形面積 $= (\text{上底} + \text{下底}) \times \text{高} \div 2 : (10 + 30) \times 10 \div 2 = 200$ ，但是三角形面積公式的使用或計算發生錯誤，僅計算底 \times 高： $10 \times 10 = 100$ 沒有再除以 2。變成灰色部分面積為 $200 - 100 = 100$ 。
4. 有 8% 的學生選擇④，顯示這些學生對梯形面積公式的使用或計算發生錯誤，僅計算 $(\text{上底} + \text{下底}) \times \text{高} : (10 + 30) \times 10 = 400$ ，沒有再除以 2，而三角形面積運用及計算接正確：底 \times 高 $\div 2 = 10 \times 10 \div 2 = 50$ ，結果灰色部分的面積就為 $400 - 50 = 350$ 。

(四) 學生表現說明

1. 灰色部分的面積 $=$ 梯形面積 $ABCD -$ 三角形面積 $AEC =$ 三角形 ABC 面積(因為三角形 $AEC =$ 三角形 ACD)，而梯形和三角形面積的公式都有「除以 2」的部分。所以四個選項是考驗學生是否熟悉梯形和三角形面積公式的運用。
2. 本題難易度為 0.61。表示約有六成學生能熟稔梯形和三角形面積公式。從高分組與低分組學生的表現來看，91% 的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生只有 31% 回答正確，有 69% 的低分組學生選擇選項①、③、④，顯示低分組多數學生對於梯形和三角形的面積公式未能精確掌握。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

(一) 評量重點

5-s-05 能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。(同 5-n-18)

(二) 先備的知識

1. 4-s-07 能認識平行四邊形和梯形。
2. 4-s-09 能理解長方形和正方形的面積公式與周長公式。(同 4-n-18)
3. 5-n-18 能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。(同 5-s-05)

(三) 延伸的知識

6-s-01 能利用幾何形體的性質解決簡單的幾何問題。

十二年國教課綱（學習內容）

(一) 評量重點

S-5-2 三角形與四邊形的面積：操作活動與推理。利用切割重組，建立面積公式，並能應用。

(二) 先備的知識

1. N-3-14 面積：「平方公分」。實測、量感、估測與計算。
2. S-4-7 三角形：以邊與角的特徵認識特殊三角形並能作圖。如正三角形、等腰三角形、直角三角形、銳角三角形、鈍角三角形。
3. S-4-8 四邊形：以邊與角的特徵（含平行）認識特殊四邊形並能作圖。如正方形、長方形、平行四邊形、菱形、梯形。

(三) 延伸的知識

S-6-4 柱體體積與表面積：含角柱和圓柱。利用簡單柱體，理解「柱體體積＝底面積×高」的公式。簡單複合形體體積。

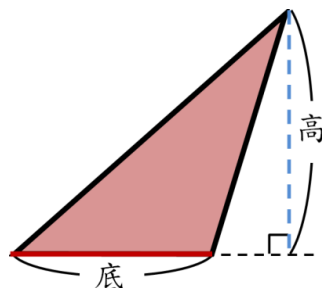
三、教學建議

(一) 評量核心概念

長方形、三角形及梯形圖形面積比較問題。

(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念：

1. 無法找出在三角形外的高：學生遇到求三角形面積時，對於如何畫出三角形的高不是非常清楚。如果可以從頂點順利做垂直線段到底邊，便能找出三角形的高。但如果是如【圖 21-1】的三角形，便無法找出三角形的高，因此也無法順利求出三角形的面積。



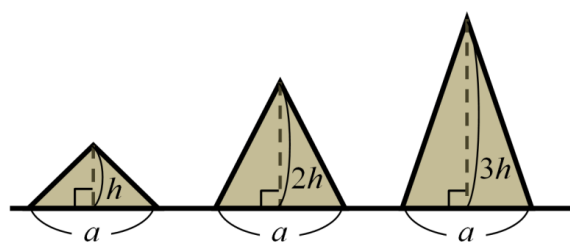
【圖 21-1】

2. 不清楚梯形面積公式的由來：梯形面積公式為（上底＋下底）×高÷2，學生列式時因為不知道梯形面積公式的由來，常常會將括號忘記。計算時便會先算「下底×高÷2」，導致無法正確算出梯形的面積。

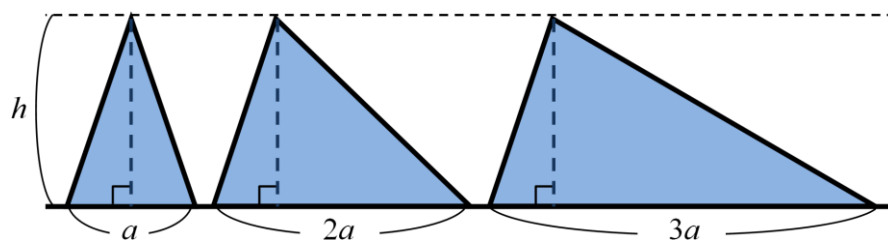
(三) 核心概念的教學重點：

1. 國小五年級的學生，對於長方形面積公式的由來及意義應該均已熟悉。一般來說，可以利用切割及重新拼湊的方式將三角形及梯形，變形成平行四邊形後導出三角形及梯形面積公式，並探討三角形、梯形的高及底，改變後面積會如何改變及其之間的關係。
2. 學生知道三角形的面積公式為「底×高÷2」之後，再和學生探討當三角形的底不變，高增加幾倍，三角形的面積就會變為原來面積的幾倍，如【圖 21-2】；三角形的高不變，底增加幾倍，三角形的面積就會變為原來面積的幾倍。如

【圖 21-3】。

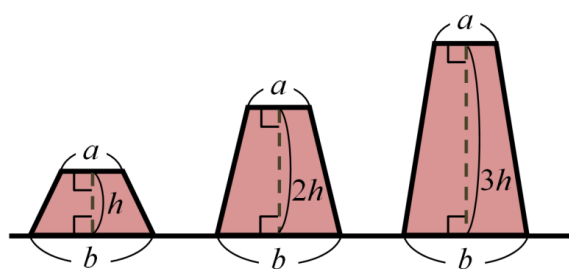


【圖 21-2】



【圖 21-3】

3. 同樣學生知道梯形的面積公式為「(上底+下底) \times 高 $\div 2$ 」之後，再和學生探討梯形的上底和下底不變，高增加幾倍，梯形的面積就會變為原來面積的幾倍，如【圖 21-4】。



【圖 21-4】

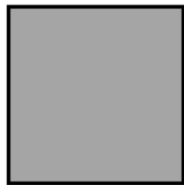

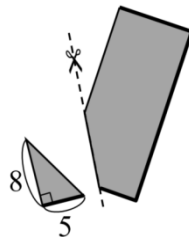
(四) 本題教學的加強重點

1. 對於基本幾何圖形的認識

- (1) 引導學生回想三角形面積、梯形面積的計算公式。

2. 觀察本題中三角形 AEC 和梯形 $ABCD$ 二者之間的關係：為梯形 $ABCD$ 的面積扣除三角形 AEC 面積的部分即為灰色部分的面積。
3. 對於三角形和梯形面積計算掌握：國小五年級的學生，對於三角形和梯形面積公式的由來及意義應已熟悉。一般來說，可以利用切割的方式將長方形延對角線平均切割成二個全等的三角形，即公式中「 $\div 2$ 」的考量原因。
4. 圖形分割與重組訓練掌握：如果知道平行四邊形 $AECD$ 的對角線 AC 能將平行四邊形平分兩個面積相等的三角形，灰色部分面積便可改為用三角形 ABC 面積處理，則可更簡單獲得答案。

第 22 題

知識向度	代數	認知向度	概念理解																												
對應分年細目	5-s-05 能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。																														
題目	<p>有一張邊長為 20 公分的正方形紙卡（如圖一），<u>小明</u>將它對摺後（如圖二），從摺線處剪出一個直角三角形（如圖三）。若他把剪下來的三角形打開後，該三角形的面積是多少平方公分？</p> <div><div><p>圖一</p></div><div><p>圖二</p></div><div><p>圖三</p></div><p>（單位：公分）</p></div> <p>① 80 平方公分 ② 50 平方公分 ③ 40 平方公分 ④ 20 平方公分</p>																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：3</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.14</td><td>0.05</td><td>0.53</td><td>0.27</td><td>0.02</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.06</td><td>0.01</td><td>0.77</td><td>0.17</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.20</td><td>0.14</td><td>0.38</td><td>0.28</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：3	選項率	0.14	0.05	0.53	0.27	0.02		高分組	0.06	0.01	0.77	0.17	0.00		低分組	0.20	0.14	0.38	0.28	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：3																									
選項率	0.14	0.05	0.53	0.27	0.02																										
高分組	0.06	0.01	0.77	0.17	0.00																										
低分組	0.20	0.14	0.38	0.28	0.00																										

一、 試題分析

（一） 數據解析

本題鑑別度為 0.39，通過率為 0.53，試題難易度 0.57。

（二） 評量目標說明

本題旨在評量學生是否能夠知道一個經過對摺的正方形圖卡，從截角中所剪下的三角形如何找出其底和高，進而求出三角形的面積。

（三） 選項表現說明

1. 本題僅約 53% 的學生選擇正確選項③，顯示許多學生對於一個經過對摺後

再打開的三角形能掌握其底是題目所示之底的 2 倍，進而找出截角中所剪下的三角形之面積。

2. 有 27% 的學生選擇選項④，這些學生可能未注意到題目所剪下的三角形，其實是對摺的，因此計算三角形面積時未考慮到要計算的是展開後的底，而選擇選項④。
3. 有 14% 的學生選擇選項①，學生可能有考慮到將剪下的三角形展開，但計算三角形面積時沒有除以 2， $8 \times 5 \times 2 = 80$ ，而選擇選項①。
4. 有 4.7% 的學生選擇選項②，這些學生可能不理解三角形面積的計算方式，但有考慮到將剪下的三角形展開 $(2+8) \times 5 = 80$ ，而選擇選項②。

(四) 學生表現說明

1. 本題的命題設計中，圖一的正方形紙卡經過對摺後形成兩個重疊的長方形，因此圖三所剪下的三角形，實際上是兩個全等的直角三角形重疊在一起，因此展開後的三角形其底的長是圖上所看三角形長的兩倍。
2. 本題難易度為 0.57。只有將近 5 成 3 的學生通過。低分組的學生中未選擇正確選項的學生中有 14% 的學生選擇選項②，表示這些學生對於三角形面積的算法根本不曉得。低分組的學生中僅約 3 成 8 的學生選擇正確的選項，顯示低分組的學生對三角形面積的求法，掌握度並非很好。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

(一) 評量重點

5-s-05 能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。（同 5-n-18）。

(二) 先備的知識

4. 4-n-18 能理解長方形和正方形的面積公式與周長公式。（同-s-09）
5. 4-s-07 能認識平行四邊形和梯形。

(三) 延伸的知識

6-s-05 能理解簡單直柱體的體積為底面積與高的乘積。

十二年國教課綱（學習內容）

(一) 評量重點

S-5-2 三角形與四邊形的面積：操作活動與推理。利用切割重組，建立面積公式，並能應用。

(二) 先備的知識

1. N-3-14 面積：「平方公分」。實測、量感、估測與計算。

2. S-4-3 正方形與長方形的面積與周長：理解邊長與周長或面積的關係，並能理解其公式與應用。簡單複合圖形。
3. S-4-7 三角形：以邊與角的特徵認識特殊三角形並能作圖。如正三角形、等腰三角形、直角三角形、銳角三角形、鈍角三角形。

(三) 延伸的知識

S-6-4：柱體體積與表面積：含角柱和圓柱。利用簡單柱體，理解「柱體體積＝底面積×高」的公式。簡單複合形體體積。

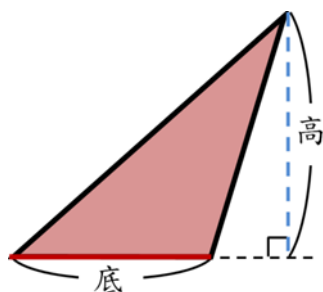
三、教學建議

(一) 評量核心概念

由切割重組中，認識三角形的面積公式＝（底×高）÷2。

(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. 受圖形影響忽略重疊的部分：認為圖示中的三角形即是整個三角形沒有注意到其實圖示中所看到圖形其實只有展開後整個三角形的一半。
2. 無法找出在三角形外的高：學生遇到求三角形面積時，對於如何畫出三角形的高不是非常清楚。如果可以從頂點順利做垂直線段到底邊，便能找出三角形的高。但如果是如【圖 22-1】的三角形，便無法找出三角形的高，因此也無法順利求出三角形的面積。



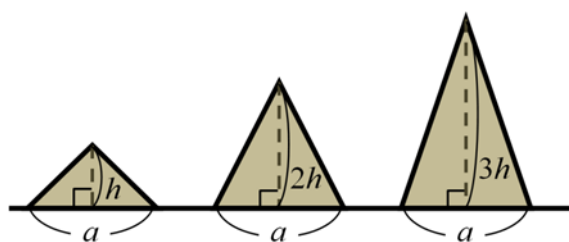
【圖 22-1】

3. 不清楚三角形面積公式的由來：三角型的面積公式為底×高÷2，學生列式時因為不知道三角形面積公式的由來，常常在計算「底×高」之後會忘記「÷2」。計算時導致無法正確算出三角形的面積。

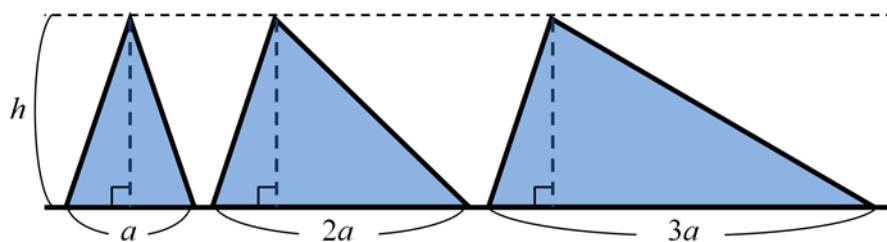
(三) 核心概念的教學重點

1. 國小五年級的學生，對於平行四邊形面積公式的由來及意義應該較易熟悉。一般來說，可以利用切割及拼湊的方式將三角形，變形成平行四邊形後導出三角形面積公式，並探討三角形的高及底，改變後面積會如何改變及其之間的關係。
2. 學生知道三角形的面積公式為「底×高÷2」之後，再和學生探討當三角形的底不變，高增加幾倍，三角形的面積就會變為原來面積的幾倍，如【圖 22-2】；三角形的高不變，底增加幾倍，三角形的面積就會變為原來面積的幾倍。如

【圖 22-3】。



【圖 22-2】



【圖 22-3】

(四) 本題的教學重點

教師於教學時可按照題意中的圖示，讓學生取正方形的紙張，依照圖一、圖二、圖三的步驟，實際操作一遍，學生便會發現其實剪下的三角形展開後，面積是對摺後再剪下未展開的三角形面積的兩倍。

第 23 題

知識向度	數與量	認知向度	概念理解																												
對應分年細目	5-a-04 能將整數單步驟的具體情境問題列成含有未知數符號的算式，並能解釋算式、求解及驗算。																														
題目	判斷下列哪個選項中 y 所代表的數與其他選項 <u>不同</u> ？ ① $y-28=40$ ② $y+28=40$ ③ $40-y=28$ ④ $28+y=40$																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：1</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.66</td><td>0.10</td><td>0.17</td><td>0.05</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.93</td><td>0.03</td><td>0.03</td><td>0.01</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.31</td><td>0.18</td><td>0.37</td><td>0.14</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：1	選項率	0.66	0.10	0.17	0.05	0.00		高分組	0.93	0.03	0.03	0.01	0.00		低分組	0.31	0.18	0.37	0.14	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：1																									
選項率	0.66	0.10	0.17	0.05	0.00																										
高分組	0.93	0.03	0.03	0.01	0.00																										
低分組	0.31	0.18	0.37	0.14	0.00																										

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.62，通過率為 0.66，試題難易度 0.62。

(二) 評量目標說明

本題旨在評量學生能否在單步驟的題目中，透過加減互逆的概念正確求解未知數。

(三) 選項表現說明

- 有 66% 的學生選擇正確選項①，顯示大部分的學生已經掌握在單步驟且含有未知數的加、減情境中，運用加減互逆的概念求解未知數的能力。
- 有 17% 的學生選擇選項③，學生可能認為等號即表示計算結果，所以看到等號後面是 28，便選擇此為答案，或因為對於加減互逆的概念不熟悉，認為本選項中等號左側的 y 值是被 40 所減，與其他選項探求 28 與 y 之間的關係顯然不太相同，因此選擇選項③。
- 有 10% 的學生選擇選項②，學生可能對於加減互逆及加法交換率的觀念顯然未熟悉，以直觀的方式進行答題選擇，誤以為選項②中的 y 值與選項①不同即滿足題目中要求的條件，因而選擇選項②。

4. 有 5% 的學生選擇選項④，學生可能對於加減互逆及加法交換率的觀念顯然未熟悉，以直觀的方式進行答題，因而選擇選項④。

(四) 學生表現說明

1. 本題的命題設計主要希望了解學生對於「單步驟且含有未知數」的題目中能運用加減互逆的概念，檢驗學生是否能檢驗兩數間的關係（即加數、被加數與和之間；減數、被減數與差之間的關係），以正確求得未知數。
2. 本題難易度為 0.62。有將近 6 成的學生已能掌握對於「單步驟且含有未知數」的題目中能運用加減互逆的概念，但仍有將近 4 成的學生，概念並不清楚。從高分組與低分組學生的表現來看，93% 的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生有將近 70% 的生未能回答正確，尤其有高達 37% 的低分組學生選擇選項③。顯示低分組學生中有許多學生對於「加減互逆」的概念尚未能充分掌握。

二、 教材地位分析

97 課綱（分年細目）

(一) 評量重點

5-a-04 能將整數單步驟的具體情境問題列成含有未知數符號的算式，並能解釋算式、求解及驗算。

(二) 先備的知識

2-a-04 能理解加減互逆，並運用於驗算與解題。

(三) 延伸的知識

6-a-01 能理解等量公理。

十二年國教課綱（學習內容）

(一) 評量重點

R-5-3 以符號表示數學公式：國中代數的前置經驗。初步體驗符號之使用，隱含「符號代表數」「符號與運算符號的結合」的經驗。應併入其他教學活動。

(二) 先備的知識

R-4-3 以文字表示數學公式：理解以文字和運算符號聯合表示的數學公式，並能應用公式。可併入其他教學活動（如 S-4-3）。

(三) 延伸的知識

R-6-3 數量關係的表示：代數與函數的前置經驗。將具體情境或模式中的數量關係，學習以文字或符號列出數量關係的關係式。

三、 教學建議

(一) 評量核心概念

能以「加減互逆」的概念在整數單步驟含未知數的情境中正確求得未知數。

(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. 用一般語言來描述問題，不會用符號表達未知數：例如：題目「花店裡有 99 朵花，其中有 66 朵是紅花，其餘都是白花，白花的數量是多少朵？」當老師詢問白花的數量如何表示時，學生因代數的概念尚未穩固，因此會回答：「白花的數量不知道有多少。」
2. 能用符號來代表未知數，但不會列式：以前一例題的情境為例，老師上課時告知學生未知數以「 x 」來表示，學生亦知道將「白花的數量」設為 x ，但對於花、紅花、白花等，情境中提到的三個物品，其在脈絡中的相互關係未能理解，因次出現不會列式或列式出現錯誤的情形。
3. 基本四則運算的理解及應用於解題成效不佳：學生能理解題目的情境脈絡、以未知數為代表符號後進行正確列式，唯對於整數四則混合計算的原則未能熟稔，另外對於加減互逆、乘除互逆的關係亦未能明確了解，因此造成解題錯誤。

(三) 核心概念的教學重點

1. 強化對文字符號意義的理解：教師應讓學生理解文字符號如同數字，代表一個可以算出來的數值，例如：算式「 $x+3=5$ 」中的 x ，藉由加減互逆的概念，可以知道 $x=2$ 。；另外文字符號亦可當作特定的物體，例如正方形的邊長為 y 公分，因此，在教學時，教師可以在解題時，鼓勵學生適度運用文字符號來擬訂解題思考與策略。
2. 避免運算錯誤：因為算式中出現文字符號，讓學生有陌生感，因而造成對四則混合計算的規約使用錯誤，因此除了強化學生對於文字符號的意義理解以外，應加強學生對於四則運算規約的使用。（先乘除、後加減；有括號先計算；由左至右計算）。

(四) 本題教學的加強重點

本題主要在考驗學生對於「加減互逆」的概念是否熟悉，因此老師可複習低年級「分與合」、「加、減法的計算與驗算」單元，讓學生重新確認算式中「加數、被加數與和之間；減數、被減數與差之間的關係」。

第 24 題

知識向度	代數	認知向度	解題思考																												
對應分年細目	5-a-02 能在具體情境中，理解先乘再除與先除再乘的結果相同，也理解連除兩數相當於除此兩數之積。																														
題目	「1 盒原子筆有 6 枝， <u>小傑</u> 買了 84 盒，共花了 5040 元。1 枝原子筆是多少元？」下列哪一個算式 <u>不能</u> 算出正確答案？ ① $5040 \div (84 \div 6)$ ② $5040 \div 84 \div 6$ ③ $5040 \div (6 \times 84)$ ④ $5040 \div (84 \times 6)$																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：1</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.55</td><td>0.21</td><td>0.14</td><td>0.10</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.88</td><td>0.05</td><td>0.05</td><td>0.02</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.24</td><td>0.33</td><td>0.23</td><td>0.20</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：1	選項率	0.55	0.21	0.14	0.10	0.00		高分組	0.88	0.05	0.05	0.02	0.00		低分組	0.24	0.33	0.23	0.20	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：1																									
選項率	0.55	0.21	0.14	0.10	0.00																										
高分組	0.88	0.05	0.05	0.02	0.00																										
低分組	0.24	0.33	0.23	0.20	0.00																										

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.63，通過率為 0.55，試題難易度 0.56。

(二) 評量目標說明

本題旨在評量學生除了能列出算式外，是否理解四則運算規則中連除兩數與除以兩數之積的結果是相同的，以及添加括號的差異。

(三) 選項表現說明

- 有 55% 的學生選擇正確選項①，顯示約五成的學生已經能在具體情境中，理解連除兩數相當於除此兩數之積，並清楚四則運算的算則，包含括號內先算以及乘法交換律。
- 有 21% 的學生選擇選項②，這些學生可能誤以為連除的情境皆須在算式中加上括弧，而未清楚理解題意，或是受到其他三個選項皆有括號的影響，而選擇選項②。
- 有 14% 的學生選擇選項③，這些學生可能對於乘法交換律不熟悉，誤以為

選項③和選項④不同，或是受到其他三個選項的算式數字皆由大到小排列的影響，而選擇選項③。

4. 有 10% 的學生選擇選項④，這些學生可能對於乘法交換率不熟悉，誤以為選項④和選項③不同，而選擇選項④。

(四) 學生表現說明

1. 本題的命題設計為基本題，主要希望了解學生對於「理解連除兩數相當於除以此兩數之積」概念是否完全清楚，同時在選項的設計上，也使得學生同時需運用四則運算的基本算則來進行判斷，包含括號先算、乘法交換律等，若學生皆能充分理解，無需計算即能從選項中判斷出正確答案。
2. 本題的通過率為 0.55，表示有五成五的學生已能四則運算算則的概念，但仍有四成多的學生，概念並不清楚。從高分組與低分組學生的表現來看，高分組學生的答對率為 88%，低分組學生的答對率 24%，其中低分組有近四分之三的學生對於四則運算的算則並不熟悉或不了解，以致在解題判斷上的出現錯誤。教師在進行相關教學時，要注意引導學生從生活情境中去理解各種算則產生的需求與必要性。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

(一) 評量重點

5-a-02 能在具體情境中，理解先乘再除與先除再乘的結果相同，也理解連除兩數相當於除以此兩數之積。

(二) 先備的知識

1. 4-a-01 能在具體情境中，理解乘法結合律。
2. 4-a-02 能在四則混合計算中，應用數的運算性質。

(三) 延伸的知識

1. 5-a-03 能熟練運用四則運算的性質，做整數四則混合計算。
2. 6-a-04 能利用常用的數量關係，列出恰當的算式，進行解題，並檢驗答案的合理性。

十二年國教課綱（學習內容）

(一) 評量重點

R-5-2 四則計算規律 (II)：乘除混合計算。「乘法對加法的分配律」。將計算規律應用於簡化混合計算。熟練整數四則混合計算。

(二) 先備的知識

1. R-4-1 兩步驟問題併式：併式是代數學習的重要基礎。含四則混合計算的約

定（由左往右算、先乘除後加減、括號先算）。學習逐次減項計算。

2. R-4-2 四則計算規律（I）：兩步驟計算規則。加減混合計算、乘除混合計算。在四則混合計算中運用數的運算性質。

（三） 延伸的知識

R-6-1 數的計算規律：小學最後應認識（1）整數、小數、分數都是數，享有一樣的計算規律。（2）整數乘除計算及規律，因分數運算更容易理解。（3）逐漸體會乘法和除法的計算實為一體。併入其他教學活動。

三、 教學建議

（一） 評量核心概念

利用先乘再除與先除再乘的結果相同，以及連除兩數相當於除此兩數之積簡化計算過程。

（二） 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. 對於四則運算的算則不清楚：因此學生習慣由左至右進行運算，或是算式中看起來好算的部份先算而造成計算錯誤，或是誤以為先乘除意指先乘再除（加減部分亦同），如下列三個錯誤計算的算式：
(1) $35-5\times 4=120$ （學生由左至右計算，因此先算 $35-5$ ，再算 30×4 ，所以計算錯誤。）
(2) $25\times 7-5=50$ （學生先算比較好算的 $7-5$ ，再算 25×2 ，因此計算錯誤。）
(3) $32\div 8\times 2=2$ （學生先算乘的部分 8×2 ，再算除的部分，因此計算錯誤。）
2. 對於併式的過程及方式不了解：如： $7\times 18=126$ ， $7\times 12=84$ ， $126+84=210$ 等三步驟混合計算，如果先算 $18+12=30$ ，再算 $7\times 30=210$ ，可以簡化計算，因此可以併式為 $7\times (18+12)$ 。當學生不了解這個併式過程及括號先算的意義時，就無法理解各種四則運算的算則，而只是一味的從左至右逐項運算。
3. 計算過程中忽略等號的對稱性：學生不了解等號具有兩邊需等值的觀念，把等號當作運算結果，因此在逐次減項的算式中可能遺漏了數字，而只列出自己正在計算的數字，如： $100-6\times 5+8=100-30=70+8=78$ ，此計算結果雖然正確，過程卻是錯誤的。
4. 以為分配律的反推算式就是結合律：因為 $8\times (3+2)=8\times 3+8\times 2$ 是乘法對加法的分配律，學生誤以為 $8\times 3+8\times 2=8\times (3+2)$ 就是乘法對加法的結合律，其實 $8\times 3+8\times 2=8\times (3+2)$ 只是分配律的反推算式，仍然屬於分配律。
5. 因為加法和乘法有結合律，以為減法和除法也有結合律：因為 $(8+2)+5=8+(2+5)$ 及 $(12\times 5)\times 2=12\times (5\times 2)$ 成立，所以學生誤以為 $(32\div 8)\div 2=32\div (8\div 2)$ 或 $(10-8)-2=10-(8-2)$ 也成立。

6. 因為加法和乘法有交換律，以為減法和除法也有交換律：因為 $3+4=4+3$ 及 $5\times 6=6\times 5$ 成立，所以學生誤以為 $3-5=5-3$ 及 $2\div 8=8\div 2$ ，因此容易出現不去理解題意，直接用大數減小數或用大數除以小數。尤其是分數的除法，如題目是 2 個披薩分給 8 個人，學生常列成錯誤算式： $8\div 2$ 。
7. 因為乘法對加、減法有分配律，以為除法對加、減法也有分配律：因為乘法對加、減法有左右分配律，所以可以說乘法對加、減法的分配律成立；而除法對加、減法只有右分配律，即 $(12+6)\div 3=12\div 3+6\div 3$ ，但是 $36\div (9+3)\neq 36\div 9+36\div 3$ ，所以除法對加、減法的分配律不成立。

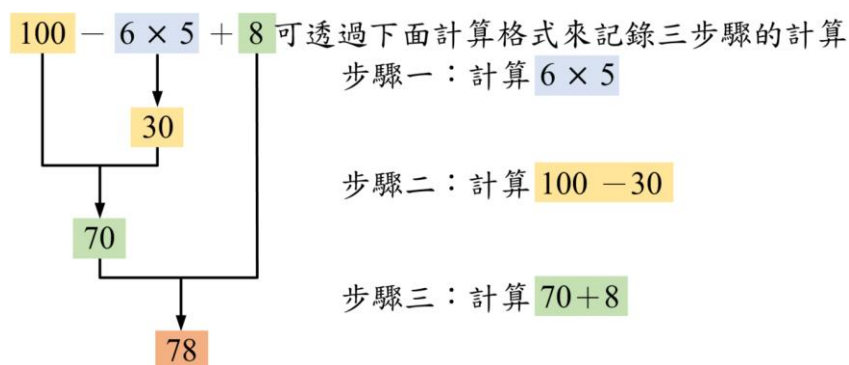
(三) 核心概念的教學重點

1. 理解題意後再列式及學習併式

教師應利用多步驟問題讓學生從理解題意後有次序的一一系列式解題，待學生能熟練解決多步驟問題後再開始學習併式。併式教學時需同時呈現多步驟算式，再慢慢併式過渡到能以一個算式紀錄問題。

例如「小明口袋有 1 個 10 元硬幣和 6 個 5 元硬幣，請問小明共有多少元？」學生理解題意後多步驟解題算式可能為： $6\times 5=30$ ， $10+30=40$ ；引導學生併式為 $10+6\times 5=(\quad)$ ，再討論因為乘或除是連加或連減的簡化紀錄形式，因此運算位階高於加或減，所以約定「先乘除後加減」。括號先算也是利用併式需求而產生的共同約定算則。

2. 提供層次清楚的計算格式



3. 乘法對加法的分配律

乘法對加法有右分配律及左分配律，乘號在加號右邊時，如： $(6+4)\times 5=6\times 5+4\times 5$ ，稱為乘法對加法的右分配律；乘號在加號左邊時，如： $8\times (7+3)=8\times 7+8\times 3$ ，稱為乘法對加法的左分配律。教師應用具體的情境讓學生理解乘法對加法的分配律為何會成立，情境題的數字可以設計成用分配律計算更容易，以產生使用分配律的需求。

例如「一打鉛筆有 12 枝，小明有黃色鉛筆 8 打，小華有紅色鉛筆 2 打，兩人共有幾枝鉛筆？」引導學生發現 $12\times 8+12\times 2=(\quad)$ 比較不容易計算，若能利用分配律改成 $12\times 8+12\times 2=12\times (8+2)=12\times 10=120$ ，計算上會容易許多。

4. 乘法對減法的分配律

乘號在減號右邊時，如： $(8-5) \times 9 = 8 \times 9 - 5 \times 9$ 」稱為乘法對減法的右分配律；乘號在減號左邊時，「 $10 \times (9-4) = 10 \times 9 - 10 \times 4$ 」稱為乘法對減法的左分配律。教師應用具體的情境讓學生理解乘法對減法的分配律為何會成立，情境題的數字可以設計成用分配律計算更容易，以產生使用分配律的需求。

例如「一打鉛筆有 12 枝，小明有黃色鉛筆 8 打，小華有紅色鉛筆 2 打，小明比小華多幾枝鉛筆？」引導學生發現 $12 \times 8 - 12 \times 2 = (\quad)$ 比較不容易計算，若能利用分配律改成 $12 \times 8 + 12 \times 2 = 12 \times (8-2) = 12 \times 6 = 72$ ，計算上會容易許多。

5. 加法與乘法的結合律

在連加算式中， $(5+3)+7=5+(3+7)$ ，所以加法有結合律；在連乘算式中， $(17 \times 5) \times 2 = 17 \times (5 \times 2)$ ，所以乘法也有結合律。教師應用具體的情境讓學生理解加法與乘法的結合律為何會成立，情境題的數字可以設計成用結合律計算更容易，以產生使用結合律的需求。

例如「有一個長 24 公分、寬 8 公分、高 5 公分長方體，它的體積是多少？」由於長方體是由許多 1 立方公分的白色積木堆疊而成，所以計算體積 = 長 \times 寬 \times 高時，可以先算前面「 $(24 \times 8) \times 5$ 」，也可以先算後面「 $24 \times (8 \times 5)$ 」，其體積雖然相同，但學生會發現先算 8×5 會比較容易計算。

(四) 本題教學的加強重點

1. 依題意列式

本題僅需依題意找出正確的算式不需計算出答案，教師可引導學生運用四則運算的算則，盡量列出各種符合題意的正確算式，如「 $5040 \div 84 \div 6$ 」、「 $5040 \div (6 \times 84)$ 」和「 $5040 \div (84 \times 6)$ 」，無需實際進行運算，同時並討論不同的算式所代表的意思。

例如「 $5040 \div 84 \div 6$ 」表示先算 1 盒原子筆多少錢，再算 1 枝原子筆多少錢、「 $5040 \div (6 \times 84)$ 」和「 $5040 \div (84 \times 6)$ 」表示先算 84 盒原子筆有幾枝，再算 1 枝原子筆多少錢，由此也可再次得知「連除兩數與除以兩數之積的結果相同」，並經驗乘法加換律。

2. 複習兩步驟列式

若學生列式有困難或列出錯誤的算式如「 $5040 \div 6 \times 84$ 」，可先讓學生退回兩步驟列式，確定何者先算？何者後算？再簡化成一個算式，並比較算式中有無括號的差異，再次澄清四則運算中括號的部分先算的意涵。

第 25 題

知識向度	數與量	認知向度	概念理解																												
對應分年細目	5-n-01 能熟練整數乘、除的直式計算。																														
題目	小傑計算四位數除以三位數「 $5605 \div \square 65$ 」，得到商為「二位數」，除數可能是下列哪一個數？ ① 865 ② 665 ③ 565 ④ 465																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：4</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.13</td><td>0.11</td><td>0.15</td><td>0.58</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.04</td><td>0.03</td><td>0.04</td><td>0.89</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.23</td><td>0.22</td><td>0.28</td><td>0.27</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：4	選項率	0.13	0.11	0.15	0.58	0.00		高分組	0.04	0.03	0.04	0.89	0.00		低分組	0.23	0.22	0.28	0.27	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：4																									
選項率	0.13	0.11	0.15	0.58	0.00																										
高分組	0.04	0.03	0.04	0.89	0.00																										
低分組	0.23	0.22	0.28	0.27	0.00																										

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.62，通過率為 0.58，試題難易度 0.58。

(二) 評量目標說明

本題為除法直式計算的變化題，旨在評量學生是否能理解四位數除以三位數的計算中的位值概念，據以檢視學生能否熟練以直式計算解決四位數除以三位數的除法問題。

(三) 選項表現說明

1. 有 58% 的學生選擇正確選項④，顯示超過半數的學生已經能掌握除法計算中的適切的估商方式。
2. 有 15% 的學生選擇選項③，這些學生可能未能掌握正確的估商方式，受到題目中被除數與除數中皆有 5、6 的影響，認為選 5 或 6 即為可能的答案。
3. 有 13% 的學生選擇選項①，這些學生可能忽略了題幹中敘明「四位數除以三位數」的條件，而直接以「 $5605 \div 65$ 」來進行概算，因此選擇選項①。
4. 有 11% 的學生選擇選項②，這些學生可能未能掌握正確的估商方式，受到題

目中被除數與除數中皆有 5、6 的影響，認為選 5 或 6 即為可能的答案。

(四) 學生表現說明

1. 本題的命題設計主要希望了解學生對於能熟練整數四位數除以三位數的直式計算是否完全清楚。因此，在題目中算式中遮住除數的百位部分，讓學生試著利用估商的方式求解，以檢視學生是否透過題目線索掌握正確的估商方式。
2. 本題難易度為 0.58。有 5 成 8 的學生已能掌握除法計算中的適切的估商方式。但仍有 4 成 2 的學生，概念並不清楚。從高分組與低分組學生的表現來看，89% 的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生有 27% 回答正確，但每一選項都有約兩成多的低分組學生選擇。顯示低分組學生中有許多學生尚未掌握正確估商的方式。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

(一) 評量重點

5-n-01 能熟練整數乘、除的直式計算。

(二) 先備的知識

4-n-03 能熟練較大位數的乘除直式計算。

(三) 延伸的知識

6-n-07 能在具體情境中，對整數極小數在指定位數取概數（含四捨五入法），並作加、減、乘、除之估算。

十二年國教課綱（學習內容）

(一) 評量重點

N-5-9 整數、小數除以整數（商為小數）：整數除以整數（商為小數）、小數除以整數的意義。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。能用概數協助處理除不盡的情況。熟悉分母為 2、4、5、8 之真分數所對應的小數。

(二) 先備的知識

N-4-2 較大位數之乘除計算：處理乘數與除數為多位數之乘除直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。

(三) 延伸的知識

N-6-5 解題：整數、分數、小數的四則應用問題：二到三步驟的應用解題。含使用概數協助解題。

三、教學建議

(一) 評量核心概念

能用正確的估商方式來解決除法問題。

(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. **誤用其他計算方式進行解題**：學生未具有除法的概念，以其熟悉的解題方式進行解題，例如：「 $297 \div 19$ 」，學生採用「 $297 - 19$ 」、「 $297 + 19$ 」、「 297×19 」的方式來進行解題。
2. **題目數值看錯**：例如：「 $297 \div 19$ 」，學生在進行計算時，誤寫成「 $291 \div 79$ 」，造成計算錯誤。
3. **直式列式錯誤**：學生將被除數和除數的位置寫相反。
4. **估商錯誤**：估商出現過高或過低的情形。
5. **直式記錄錯誤**：直式計算過程中的數值位記錄在正確的位置，或出現紀錄錯位的情形。
6. **減法計算錯誤**：學生能正確的估商，但在計算過程中出現減法計算錯誤的情形。

(三) 核心概念的教學重點

1. **了解數值的意義**：在除法的計算過程中，學生無法辨別被除數、除數、商及餘數的關係，例如以算式「 $129 \div 15 = 8 \cdots 9$ 」為例，「129」為被除數，「15」為除數，「8」為商，「9」為餘數。
2. **了解除法直式計算的紀錄位置**：同樣以算式「 $129 \div 15 = 8 \cdots 9$ 」為例，各個數值在除法直式紀錄中的對應位置如下：

$$\begin{array}{r} \begin{array}{c} \text{商} \longrightarrow 8 \\ \longleftarrow 15 \text{ 除數} \end{array} \overline{)129} \longrightarrow \text{被除數} \\ \underline{120} \\ 9 \longrightarrow \text{餘數} \end{array}$$

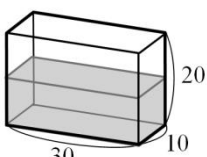
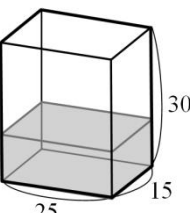
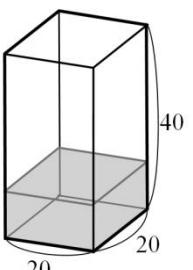
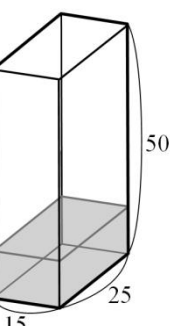
3. 估商的策略

- (1) **累乘**：將除數乘以某數，直到逼近被除數。以算式「 $129 \div 15$ 」為例，以除數「15」進行估商，第一次估商取被除數的前二位，發現「 $12 < 15$ 」，因此後推一位，取「129」來以15進行第二次估商。學生得以累進加1的方式尋找某個數，用15乘以「某數」得到一個小於被除數且最接近被除數的積，例如： $15 \times 6 = 90$ ， $15 \times 7 = 105$ ， $15 \times 8 = 120$ （最接近被除數129）。
- (2) **取概數**：先將除數想成幾十，再估商。以算式「 $129 \div 15$ 」為例，學生可以四捨五入法將除數「15」取概數變成「20」，同時將被除數「129」取概數變成「130」，以「13個十是2個十的6倍至7倍之間」進行估商，並以實際的除數「15」 $\times 6 = 90$ ，來進行檢視，發現太少（餘數大於除數15），再以「15」 $\times 7 = 105$ ，來進行檢視，發現仍然太少（餘數仍大於除數15）；再以「15」 $\times 8 = 120$ ，來進行檢視，發現餘數小於除數15，則據此判斷8為最合適的商。

(四) 本題教學的加強重點

本題四位數除以三位數除法中，因為除數為三位數，必須取被除數的前三個位值（千位、百位、十位）來進行估商，先判斷是否能進行除法運算。若可以運算，則商為二位數；若不能運算，則須退位至個位，商為一位數。

第 26 題

知識向度	量與實測	認知向度	解題思考																												
對應	5-n-21 能理解容量、容積和體積間的關係。																														
題目	<p>下面有甲、乙、丙、丁四個裝水的透明長方體容器，水深皆是 10 公分。分別丟入體積都是 50 立方公分的石頭，而且都完全沉入水中，哪一個容器的水位上升最多？</p> <p>(單位：公分)</p> <div><div><p>甲 容器</p></div><div><p>乙 容器</p></div><div><p>丙 容器</p></div><div><p>丁 容器</p></div></div> <p>① 甲 容器 ② 乙 容器 ③ 丙 容器 ④ 丁 容器</p>																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：1</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.53</td><td>0.10</td><td>0.20</td><td>0.15</td><td>0.02</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.71</td><td>0.03</td><td>0.18</td><td>0.08</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.37</td><td>0.18</td><td>0.22</td><td>0.23</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：1	選項率	0.53	0.10	0.20	0.15	0.02		高分組	0.71	0.03	0.18	0.08	0.00		低分組	0.37	0.18	0.22	0.23	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：1																									
選項率	0.53	0.10	0.20	0.15	0.02																										
高分組	0.71	0.03	0.18	0.08	0.00																										
低分組	0.37	0.18	0.22	0.23	0.00																										

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.34，通過率為 0.53，試題難易度 0.54。

(二) 評量目標說明

本題旨在評量學生能否瞭解「容量、容積和體積間的關係」，學生必須先瞭解放入水中物體的體積與長方體容器水位增高後，上升的水的體積與物體的體積是一樣的，再理解相同的物體投入不同容器中水面上升的高度與容器底面積的大小有關，底面積愈大的容器水位上升的高度愈小，底面積愈小的容器，水位

上升的高度愈高。

(三) 選項表現說明

1. 有 53% 的學生選擇正確選項①，顯示只有將近五成的學生能理解將相同的物體投入不同長方體容器中，水位上升的高度與「容器的底面積」有關，甲容器底面積 300 平方公分、乙容器、丁容器的底面積皆是 375 平方公分，丙容器的底面積 400 平方公分，因此判斷底面積較小的容器水位上升的高度較高，選擇正確答案①。
2. 有 20% 的學生選擇選項③，這些學生可能對沉入水中物體的體積概念不清，只利用底面積÷石頭體積來判斷：甲容器底面積是 $300 \div 50 = 6$ 、乙、丁容器都是 $375 \div 50 = 7.5$ 、丙容器是 $400 \div 50 = 8$ ，所以選擇選項③。
3. 有 10% 的學生選擇選項②，這些學生可能是用自己的邏輯判斷石頭丟入甲容器時，水會滿出來，乙容器相較於丙容器與丁容器看起來比較小，故水位上升應該比較多，因而選擇選項②。
4. 有 15% 的學生選擇選項④，這些學生可能認為容器的高度比較高，水位就會上升比較多，因而選擇選項④。

(四) 學生表現說明

1. 本題命題設計是在檢視五年級學生是否瞭解容量、容積和體積間的關係，首先學生要知道沉入水中的物體體積等於水位所上升的體積。水位所上升的體積＝容器的長×容器的寬×水位所上升的高度，進而理解水位上升的高度與容器的底面積的大小有關，底面積愈大的容器，水位上升的高度愈小。
2. 本題的通過率為 0.53，試題難度 0.54，顯示約五成的學生能正確判斷當物體沉入水中「容器底面積愈小及水位上升高度愈高」，此題對學生偏難，沉入水中物體的體積等於容器的水位上升的高度這個概念是困難的。當學生沒有經驗 1 毫升水的體積是 1 立方公分時，便無法理解沉入水中的石頭體積與水位上升的高度有關。讓學生透過實際操作觀察水位的變化並運用容積與容量的關係求出不規則物體的體積，以建立此題的概念。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

(一) 評量重點

5-n-21 能理解容量、容積和體積間的關係。

(二) 先備的知識

1. 3-n-15 能認識容量單位「公升」、「毫公升」（簡稱「毫升」）及其關係，並做相關的實測、估測與計算。
2. 4-n-14 能以複名數解決量(長度、容量、重量)的計算問題。

3. 4-n-19 能認識體積及體積單位「立方公分」。

4. 5-n-20 能理解長方體和正方體體積的計算公式，並能求出長方體和正方體的表面積。(同 5-s-07)。

(三) 延伸的知識

6-n-15 能理解簡單直柱體的體積為底面積與高的乘積。

十二年國教課綱（學習內容）

(一) 評量重點

N-5-15 解題：容積。容量、容積和體積間的關係。知道液體體積的意義。

(二) 先備的知識

1. N-3-15 容量：「公升」、「毫升」。實測、量感、估測與計算。單位換算。

2. N-4-12 體積與「立方公分」：以具體操作為主。體積認識基於 1 立方公分之正方體。

3. S-4-4 體積：以具體操作為主。在活動中認識體積的意義與比較。認識 1 立方公分之正方體，能理解並計數正方體堆疊的體積。

4. S-5-5 正方體和長方體：計算正方體和長方體的體積與表面積。正方體與長方體的體積公式。

(三) 延伸的知識

S-6-4 柱體體積與表面積：含角柱和圓柱。利用簡單柱體，理解「柱體體積＝底面積×高」的公式。簡單複合形體體積。

三、教學建議

(一) 評量核心概念

了解容量與體積的關係，並算出沉入水中物體的體積等於物體所排開的水量。

(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. 容器的容積與放入容器中物體的體積概念混淆不清：學生誤以為容器的容積就是放入容器中物體的體積。

2. 容器的容積與容器的容量與放入物的體積之間關係概念不清：學生誤以為容器的容積是容器的原有容量與放入容器中物體的體積總合

3. 放入物的體積與上升水位的體積之間關係混淆不清：學生不知道容器放入物體後，容器水位上升 5 公分，上升水位的體積就是容器的長×寬×水位上升高度（5 公分），也就是放入容器中物體的體積。

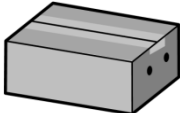



4. 沉入水中物體的體積與排開水量之間關係混淆不清：學生不知道物體沉入水

中部份的體積，會與放入容器中後所排開水量的體積相等。

(三) 核心概念的教學重點

1. 體積、容積、液量與容量之定義

- (1) **體積**：物體所佔空間的大小。
- (2) **容積**：某一具有確定三度空間的周界內的空間大小，通常此空間有容納物質可以隨時存取的功能。
- (3) **液量**：指容器內液體的量。
- (4) **容量**：指容器可裝載的最大

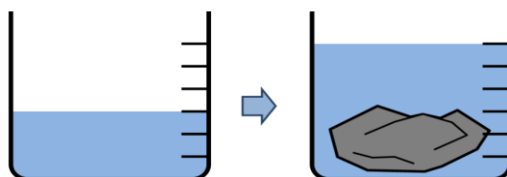
類別	體積	容積	液量	容量
範例	紙箱的大小 20×30×50 (公分)。 	水壺可以用 來裝多少的 水。 	浴缸裡的水 有多少。 	杯子裡面最 多可裝125 ml的水。 

2. **體積推算容量**：引導學生先將盒子的體積計算出來，之後再告知學生盒子內部空間的體積就是盒子的容積。而容器裡面若裝液體，則此液體量即為容量。

3. 不規則實體的體積之測量

一般像石頭這種不規則的物體不容易由直接測量邊長方式獲得體積大小。因此需要藉由間接測量得知體積大小。老師可以透過排容原理，讓學生了解容積和體積的關係。簡單的說是建立學生「一公升的水是1000立方公分」，也就是說「一毫升的水的體積等於一立方公分」的基本概念。學生必須知道將一個立體物品放入量筒時，水上升的毫升數會和立體物品體積的立方公分數一樣。

而在測量不規則物體的體積時就可以利用「物體的體積等於排開水的體積」的概念，以及利用容積和容量對等關係的概念，計算出不規則物體的體積。也就是說，如果把一塊石頭放入水中，如測出上升（或排出）的水量是300毫升，如【圖 26-1】，則這塊石頭的體積就是300立方公分。



【圖 26-1】

4. 以排水法測定浸沒水中物體體積

將一個容器裝水後測量容器內的水量是 A 毫升。將一個物體完全沉入水中，就其水面上升水量變成是 B 毫升。那麼這個物體的體積就是 $(B-A)$ 水量的體積。這是用排水法測量放入水中不規則物體體積的原理。測量物體體積最直接可行的方法是將容器放入一個盆子內，容器盛滿水後，再將物體小心置入，確定物體完全沒入水中。這時盆子內可以接到全部溢出的水，再將溢出來的水加以測量，就可以知道物體的體積大小。

課堂中老師在講解 1 公升 $= 1000$ 毫公升 $= 1000$ 立方公分，學生會好奇：一個是容量單位，一個是體積單位為何可以劃上等號。老師可利用一個量筒及一個立方體的盒子。將積木排入立方體盒中，共可排入 1000 個邊長為 1 公分的 1 立方公分積木，所以這個盒子的體積是 1000 立方公分。再利用量筒將 1 公升水倒入這個立方體盒子中，剛好裝滿立方體盒子。因此我們可以說 1 公升 $= 1000$ 立方公分，建立孩子體積與容積的概念。

這樣的概念運用在應用題中「在一個邊長 5 公分裝有水的正方體水槽內放入一顆石頭，水位由 10 公分上升至 16 公分，請問石頭的體積為多少？」老師可引導孩子：水位上升幾公分呢？放入石頭後水上升的體積是多少呢？放入石頭後水位上升的體積和石頭的體積有什麼關係呢？一步步引導孩子說出：因為水位上升 6 公分，所以上升水位的體積是 $5 \times 5 \times 6 = 150$ 立方公分。上升水位的體積就是石頭的體積。所以石頭的體積是 150 立方公分。

5. **有關牽涉容器的厚度的容積問題：**容積的概念可從容器內部的形狀和大小開始討論，老師可以帶領學生用多少個 1 立方公分積木填滿一個盒子內部的空間，透過這樣的活動才能宣告盒子內部空間的體積就是容積。接著再與學生討論容器外部的長寬高和內部長寬高的差異，也就是容器的厚度，並知道如何用外部的長寬高算出內部的長寬高，以計算出容器的容積。

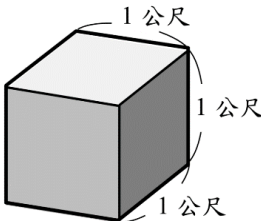
- (1) **已知容器內部的長、寬、高：**學生就可以直接利用長 \times 寬 \times 高的體積計算方式來計算容器的容積。
- (2) **無蓋容器求容量：**學生在解題時，必須先將容器外部的長、寬分別扣掉容器厚度 $\times 2$ ，才是容器內部的長、寬；而容器內部的高是將外部的高扣掉容器厚度 $\times 1$ 。如此一來才能知道容器內部的長、寬、高，再進一步可計算出容器內部的容積。（計算內部長寬高時，「長」和「寬」須扣掉 2 個容器厚度，「高」因為無蓋，所以只須扣掉 1 個厚度）
- (3) **有蓋容器求容量：**學生在解題時，必須先將容器外部的長、寬、高分別扣掉容器厚度 $\times 2$ ，才能算出內部的長寬高，再進一步計算出容器的容積。（「長」和「寬」須扣掉 2 個容器厚度，「高」因為有蓋，所以必須扣掉 2 個厚度）

(四) 本題教學的加強重點

1. **容器的高度不會影響到水位上升的高度：**觀察三個底面積相同但高度不同的容器分別將體積相同的磁鐵塊入三個容器中觀察水的變化。透過觀察發現水位上升的高度都一樣，不會因為容器的高度不同而有不同。
2. **容器的底面積相同，則水位上升高度會一樣：**利用三個長寬不同但底面積相同的容器，在水深相同的情況下投入同體積的磁鐵。發現水位上升的高度會一樣。
3. **觀察容器的底面積的大小對水位上升的變化：**利用多個相同高度但底面積不同的容器，容器內部的水位高度都相同，投入體積相同石頭（可用 1 立方公分的積木在拼組成體積相同的積木取代體積相同的石頭），讓學生觀察發現底面積愈大的容器，水位上升的高度愈小，容器底面積愈小，水位上升的高度愈大。

加強上述三個概念，即可知道容器的高度與水位上升的高度無關，因投入相同的體積的石頭，水位上升的高度與底面積有關，乙、丁容器長寬都是 25 公分、15 公分故可判斷成底面積相同的容器，乙容器底面積 $=20\times20=400$ 平方公分、甲容器底面積是 $30\times10=300$ 平方公分，故甲容器底面積較小，水位上升高度最多。

第 27 題

知識向度	量與實測	認知向度	程序執行																												
對應	5-n-20 能理解長方體和正方體體積的計算公式，並能求出長方體和正方體的表面積。(同 5-s-07)																														
題目	<p>右圖中正方體的體積，與幾個邊長 20 公分的正方體一樣大？ (1 公尺=100 公分)</p> <div></div> <p>① 5 個 ② 125 個 ③ 2500 個 ④ 50000 個</p>																														
答題表現 選項分析	<table><tr><th>選 項</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>其他</th><th>答案：2</th></tr><tr><td>選項率</td><td>0.20</td><td>0.40</td><td>0.12</td><td>0.26</td><td>0.02</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.09</td><td>0.68</td><td>0.05</td><td>0.18</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.29</td><td>0.24</td><td>0.23</td><td>0.24</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：2	選項率	0.20	0.40	0.12	0.26	0.02		高分組	0.09	0.68	0.05	0.18	0.00		低分組	0.29	0.24	0.23	0.24	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：2																									
選項率	0.20	0.40	0.12	0.26	0.02																										
高分組	0.09	0.68	0.05	0.18	0.00																										
低分組	0.29	0.24	0.23	0.24	0.00																										

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.44，通過率為 0.40，試題難易度 0.46。

(二) 評量目標說明

本題旨在評量學生是否理解正方體的體積公式為「邊長×邊長×邊長」，邊長 1 公尺的正方體表示長、寬、高都是 1 公尺也就是 100 公分。邊長 1 公尺的正方體，一邊可以排下 5 個 20 立方公分的正立方體，每一層可以排下 5 排，有 $5 \times 5 = 25$ 個邊長 20 立方公分的正立方體，共有五層，所以可以排下 $25 \times 5 = 125$ 個 20 立方公分的正立方體。

(三) 選項表現說明

1. 有 40% 的學生選擇正確選項②，顯示只有 4 成的學生已經理解邊長為 1 公尺的正方體體積為 1 立方公尺，1 公尺=100 公分，100 公分=20×5 或者

$100 \div 20 = 5$ ，得知邊長 1 公尺的正方體可排 5 個邊長 20 公分的正立方體，一排可以排 5 個，每一層有 5 排，共有 5 層，所以會有 $5 \times 5 \times 5 = 125$ 個 20 立方公分的正立方體。另有一部分的學生是利用大正方體的體積 1000000 立方公分 \div 小正方體的體積 $8000 = 125$ 個求得正解。

2. 有 20% 的學生選擇選項①，學生可能不理解體積與邊長之間的關係，直接利用邊長 1 公尺 = 100 公分， $100 \div 20 = 5$ ，就認為邊長 100 公分的大正方體的體積是邊長 20 公分小正方體體積的 5 倍，所以大正方體的體積就等於 5 個小正方體的體積大小。
3. 有 12% 的學生選擇選項③，學生可能不理解體積與邊長之間的關係，直接利用 $100 \div 20 = 5$ 算出大正方體邊長是小正方體邊長的 5 倍，知道面積是 $5 \times 5 = 25$ 倍，但卻直接乘上高度 100 公分，即算出 2500。
4. 有 26% 的學生選擇選項④，學生可能不理解體積與邊長之間的關係，直接利用 $100 \div 20 = 5$ 算出大正方體邊長是小正方體邊長的 5 倍，也知道正方體的體積要 3 個邊長相乘，但卻直接乘上邊長 100 公分，於是 $5 \times 100 \times 100 = 50000$ 。

(四) 學生表現說明

1. 本題評量五年級學生對正方體體積(公式)的理解，邊長 1 公尺可以排下 5 個 20 立方公分的小正方體，每一層有 5 排，共有 5 層，所以可以算出 $5 \times 5 \times 5 = 125$ 個。另一部分學生可以會利用大正方體的體積 1000000 立方公分，小正方體體積 $= 20 \times 20 \times 20 = 8000$ 立方公分，兩者相除求得答案 125 個。
2. 本題的通過率為 0.4，顯示只有 4 成多的學生能理解正方體的體積公式並運用公式進行計算，仍有高達六成的學生無法解題，以組別來看，低分組有 29% 及高分組有 9% 的學生選擇錯誤選項①，這些學生將邊長的倍數關係錯誤理解成體積關係。低分組有 23% 及高分組有 5% 的學生選擇錯誤選項③、低分組有 24% 及高分組 18% 選擇錯誤選項④，這些學生對於體積公式有錯誤的理解，對於邊長、面積、體積的概念不夠清楚而湊出選項中的數字。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

(一) 評量重點

1. 5-n-19 能認識體積單位「立方公尺」、「立方公分」及「立方公尺」間的關係，並做相關計算。
2. 5-n-20 能理解長方體和正方體體積的計算公式，並能求出長方體和正方體的表面積。

(二) 先備的知識

1. 2-n-15 能認識長度單位「公分」、「公尺」及其關係，並能做相關的實測、估測與同單位的計算。

2. 3-n-14 能認識長度單位「毫米」及「公尺」、「公分」、「毫米」間的關係，並做相關的實測、估測與計算。

3. 4-n-19 能認識體積及體積單位「立方公分」。

(三) 延伸的知識

6-n-15 能理解簡單直柱體的體積為底面積與高的乘積。

十二年國教課綱（學習內容）

(一) 評量重點

1. S-5-5 正方體和長方體：計算正方體和長方體的體積與表面積。正方體與長方體的體積公式。

2. N-5-14 體積：「立方公尺」。簡單實測、量感、估測與計算。

(二) 先備的知識

1. N-2-11 長度：「公分」、「公尺」。實測、量感、估測與計算。單位換算。

2. S-4-4 體積：以具體操作為主。在活動中認識體積的意義與比較。認識 1 立方公分之正方體，能理解並計數正方體堆疊的體積。

3. N-4-12 體積與「立方公分」：以具體操作為主。體積認識基於 1 立方公分之正方體。

(三) 延伸的知識

S-6-4 柱體體積與表面積：含角柱和圓柱。利用簡單柱體，理解「柱體體積＝底面積×高」的公式。簡單複合形體體積。

三、教學建議

(一) 評量核心概念

做「立方公尺」、「立方公分」的單位換算（以分數或小數表徵，如：1 立方公尺＝ $\frac{1}{1000000}$ 立方公分）

(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. 表面積與體積概念混淆不清：長方體或正方體的表面積和體積計算方式搞混，例如邊長 3 公尺的正方體體積是多少立方公尺？學生容易計算為表面積 $3 \times 3 \times 6 = 54$ 正確應為 $3 \times 3 \times 3 = 27$ 立方公尺。

2. 體積單位與面積單位混淆不清：立方公尺和立方公分單位換算錯誤：1000000「立方公分」是 1「立方公尺」，學生容易將 1 立方公尺＝10000 立方公分，與 1 平方公尺＝10000 平方公分混淆，或是誤認 1 立方公尺＝1000 立方公分。

(三) 核心概念的教學重點

1. 1 立方公尺與 1 立方公分的關係

作 1 立方公分與 1 立方公尺間的關係及其換算。並以 1 公升做無縫隙的立體堆疊，培養 1 立方公尺的量感。生活中，孩子很少有機會接觸 1 立方公尺的物品，所以缺乏 1 立方公尺的量感，老師可利用紙板拼成實際大小 1 立方公尺的紙箱，讓學生感受 1 立方公尺的大小，有了量感後才能有數感。

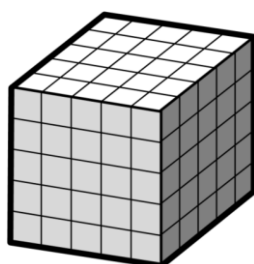
1 立方公尺是每邊長 1 公尺所組成的正方體，也可以說是每邊長 100 公分所組成的正方體，所以 1 立方公尺正方體的體積是 $100 \times 100 \times 100$ 個 1 立方公分所組成，體積是 1000000 立方公分。

2. 長方體與正方體的體積

體積是實體佔有的空間，在進行長方體體積教學時，一開始應以逐層堆疊的方式，發展出「長方體體積＝長×寬×高」的公式。老師可以讓學生操作 1 立方公分的小積木，透過逐層推疊，發展出長方體的體積公式，而正方體體積公式也可以透過同樣的活動，學生甚至只要將長方體的長、寬、高替換為正方體的邊長，也可以發展出「正方體的體積＝邊長×邊長×邊長。」的公式。

(四) 本題教學的加強重點

1. **畫圖解題：**建議老師畫一個邊長 1 公尺的正方體在黑板上，如【圖 27-1】，每一邊可以放下 5 個邊長 20 公分的小正方體，每一排可以放 5 個，每一層可以放下 $5 \times 5 = 25$ 個邊長 20 公分的小正方體，可以分成五層所以總共可以放 125 個邊長 20 公分的小正方體。



【圖 27-1】

2. **使用正方體體積計算：**每邊長 1 公尺＝100 公分，正方體體積＝邊長×邊長×邊長， $100 \times 100 \times 100 = 1000000$ 立方公分、邊長 20 公分的正方體體積是 $20 \times 20 \times 20 = 8000$ 立方公分， $1000000 \div 8000 = 125$ 答：有 125 個邊長 20 公分的小正方體。
3. **計算完成後再換單位：**邊長 3 公尺的正方體，體積是 $3 \times 3 \times 3 = 27$ 立方公尺，1 立方公尺＝1000000 立方公分，所以 27 立方公尺也可以說是 27000000 立方公分。

(五) 其他

可利用體積定位板（1 立方公尺＝1000000 立方公分）

	立方公尺						立方公分
	百萬位	十萬位	萬位	千位	百位	十位	個位

第 28 題

知識向度	代數	認知向度	程序執行																												
對應分年細目	5-a-03 能熟練運用四則運算的性質，做整數四則混合計算。																														
題目	<p>請用四則運算規則判斷，哪兩個算式是正確的？</p> <p>甲：$(891+33)+3=891+(33+3)$</p> <p>乙：$(891-33)-3=891-(33-3)$</p> <p>丙：$(891\times 33)\times 3=891\times (33\times 3)$</p> <p>丁：$(891\div 33)\div 3=891\div (33\div 3)$</p> <p>① 甲和乙</p> <p>② 丙和丁</p> <p>③ 乙和丁</p> <p>④ 甲和丙</p>																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：4</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.22</td><td>0.14</td><td>0.12</td><td>0.52</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.12</td><td>0.04</td><td>0.03</td><td>0.81</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.27</td><td>0.26</td><td>0.22</td><td>0.25</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：4	選項率	0.22	0.14	0.12	0.52	0.00		高分組	0.12	0.04	0.03	0.81	0.00		低分組	0.27	0.26	0.22	0.25	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：4																									
選項率	0.22	0.14	0.12	0.52	0.00																										
高分組	0.12	0.04	0.03	0.81	0.00																										
低分組	0.27	0.26	0.22	0.25	0.00																										

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.56，通過率為 0.51，試題難易度 0.53。

(二) 評量目標說明

本題是四則混合計算題型，不側重實際計算而是要求學生透過四則運算算則來檢驗算式是否正確，評量學生是否知道「加法與乘法有結合律」，然而減法與除法沒有結合律。

(三) 選項表現說明

- 有 52% 的學生選擇選項④，此為正確選項，代表這些學生可能已充分理解結合律僅在加法與乘法算式使用，而減法和除法算式無法使用結合律。
- 有 22% 的學生選擇正確選項①，顯示約兩成的學生誤以為結合律在加法與減

法算式皆可以使用，而乘法和除法算式則無法使用結合律。

3. 有 14% 的學生選擇選項②，這些學生可能誤以為結合律在乘法與除法算式皆可以使用，而加法和減法算式則無法使用結合律。
4. 有 12% 的學生選擇選項③，這些學生可能誤以為結合律在減法與除法算式皆可以使用，而加法和乘法算式則無法使用結合律。

(四) 學生表現說明

1. 本題的命題設計旨在了解學生對於整數四則混合計算中「加法與乘法有結合律，然而減法與除法沒有結合律」的規約是否熟悉，本題評量的目的不在於要求學生一定要將答案計算出來，而是由學生就題目所安排四個選項中的算式來進行判斷，判斷這四個算式是否在四則運算的算則下成立。
2. 本題的通過率為 0.52，表示有五成二的學生已能理解結合律僅在加法與乘法算式使用，但仍有四成多的學生，結合律的概念並不清楚。從高分組與低分組學生的表現來看，高分組學生的答對率 81%，低分組學生的答對率 25%，也就是 $\frac{3}{4}$ 的低分組學生對於結合律僅能在加法與乘法使用的概念不熟悉或不了解，以致於造成選項判斷上的錯誤。教師在進行相關教學時，要注意引導學生從生活情境中去理解各種算則為何成立及產生使用需求。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

(一) 評量重點

5-a-03 能熟練運用四則運算的性質，做整數四則混合計算。

(二) 先備的知識

4-a-02 能在四則混合計算中，運用數的運算性質。

(三) 延伸的知識

6-a-04 能利用常用的數量關係，列出恰當的算式，進行解題，並檢驗答案的合理性。

十二年國教課綱（學習內容）

(一) 評量重點

R-5-2 四則計算規律(II)：乘除混合計算。「乘法對加法的分配律」。將計算規律應用於簡化混合計算。熟練整數四則混合計算。

(二) 先備的知識

1. R-4-1 兩步驟問題併式：併式是代數學習的重要基礎。含四則混合計算的約定（由左往右算、先乘除後加減、括號先算）。學習逐次減項計算。
2. R-4-2 四則計算規律(I)：兩步驟計算規則。加減混合計算、乘除混合計算。

在四則混合計算中運用數的運算性質。

(三) 延伸的知識

R-6-1 數的計算規律：小學最後應認識(1)整數、小數、分數都是數，享有一樣的計算規律。(2)整數乘除計算及規律，因分數運算更容易理解。(3)逐漸體會乘法和除法的計算實為一體。併入其他教學活動。

三、教學建議

(一) 評量核心概念

加法與乘法可以使用結合律，如 $(a+b)+c=a+(b+c)$ 以及 $(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$ ，但減法與除法無法使用結合律，如 $(a-b)-c\neq a-(b-c)$ 以及 $(a\div b)\div c\neq a\div(b\div c)$ 。

(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. 對於四則運算的算則不清楚：因此學生習慣由左至右進行運算，或是算式中看起來好算的部份先算而造成計算錯誤，或是誤以為先乘除意指先乘再除(加減部分亦同)，如下列三個錯誤計算的算式：
 - (1) $35-5\times4=120$ (學生由左至右計算，因此先算 $35-5$ ，再算 30×4 ，所以計算錯誤。)
 - (2) $25\times7-5=50$ (學生先算比較好算的 $7-5$ ，再算 25×2 ，因此計算錯誤。)
 - (3) $32\div8\times2=2$ (學生先算乘的部分 8×2 ，再算除的部分，因此計算錯誤。)
2. 對於併式的過程及方式不了解：如： $7\times18=126$ ， $7\times12=84$ ， $126+84=210$ 等三步驟混合計算，如果先算 $18+12=30$ ，再算 $7\times30=210$ ，可以簡化計算，因此可以併式為 $7\times(18+12)$ 。當學生不了解這個併式過程及括號先算的意義時，就無法理解各種四則運算的算則，而只是一味的從左至右逐項運算。
3. 計算過程中忽略等號的對稱性：學生不了解等號具有兩邊需等值的觀念，把等號當作運算結果，因此在逐次減項的算式中可能遺漏了數字，而只列出自己正在計算的數字，如： $100-6\times5+8=100-30=70+8=78$ ，此計算結果雖然正確，過程卻是錯誤的。
4. 以為分配律的反推算式就是結合律：因為 $8\times(3+2)=8\times3+8\times2$ 是乘法對加法的分配律，學生誤以為 $8\times3+8\times2=8\times(3+2)$ 就是乘法對加法的結合律，其實 $8\times3+8\times2=8\times(3+2)$ 只是分配律的反推算式，仍然屬於分配律。
5. 因為加法和乘法有結合律，以為減法和除法也有結合律：因為 $(8+2)+5=8+(2+5)$ 及 $(12\times5)\times2=12\times(5\times2)$ 成立，所以學生誤以為 $(32\div8)\div2=32\div(8\div2)$ 及 $(10-8)-2=10-(8-2)$ 也成立。
6. 因為加法和乘法有交換律，以為減法和除法也有交換律：因為 $3+4=4+3$

及 $5 \times 6 = 6 \times 5$ 成立，所以學生誤以為 $3 - 5 = 5 - 3$ 及 $2 \div 8 = 8 \div 2$ ，因此容易出現不去理解題意，直接用大數減小數或用大數除以小數。尤其是分數的除法，如題目是 2 個披薩分給 8 個人，學生常列成錯誤算式： $8 \div 2$ 。

7. 因為乘法對加、減法有分配律，以為除法對加、減法也有分配律：因為乘法對加、減法有左右分配律，所以可以說乘法對加、減法的分配律成立；而除法對加、減法只有右分配律，即 $(12 + 6) \div 3 = 12 \div 3 + 6 \div 3$ ，但是 $36 \div (9 + 3) \neq 36 \div 9 + 36 \div 3$ ，所以除法對加、減法的分配律不成立。

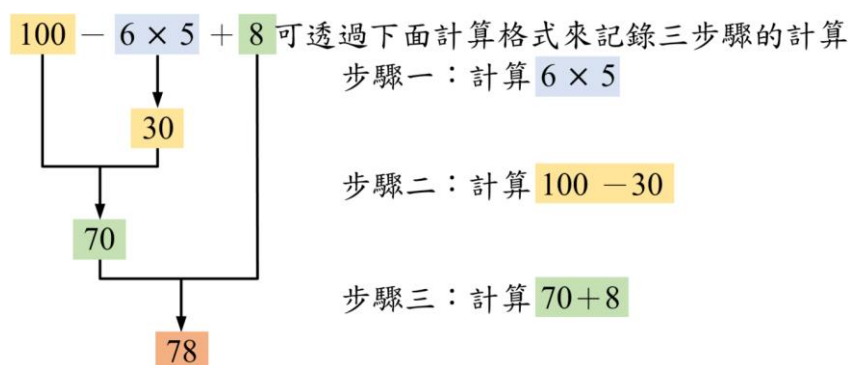
(三) 核心概念的教學重點

1. 理解題意後再列式及學習併式

教師應利用多步驟問題讓學生從理解題意後有次序的一一列式解題，待學生能熟練解決多步驟問題後再開始學習併式。併式教學時需同時呈現多步驟算式，再慢慢併式過渡到能以一個算式紀錄問題。

例如：「小明口袋有 1 個 10 元硬幣和 6 個 5 元硬幣，請問小明共有多少元？」學生理解題意後多步驟解題算式可能為： $6 \times 5 = 30$ ， $10 + 30 = 40$ ；引導學生併式為 $10 + 6 \times 5 = (\quad)$ ，再討論因為乘或除是連加或連減的簡化紀錄形式，因此運算位階高於加或減，所以約定「先乘除後加減」。括號先算也是利用併式需求而產生的共同約定算則。

2. 提供層次清楚的計算格式



3. 乘法對加法的分配律

乘法對加法有右分配律及左分配律，乘號在加號右邊時，如： $(6 + 4) \times 5 = 6 \times 5 + 4 \times 5$ ，稱為乘法對加法的右分配律；乘號在加號左邊時，如： $8 \times (7 + 3) = 8 \times 7 + 8 \times 3$ ，稱為乘法對加法的左分配律。教師應用具體的情境讓學生理解乘法對加法的分配律為何會成立，情境題的數字可以設計成用分配律計算更容易，以產生使用分配律的需求。

例如：「一打鉛筆有 12 枝，小明有黃色鉛筆 8 打，小華有紅色鉛筆 2 打，兩人共有幾枝鉛筆？」引導學生發現 $12 \times 8 + 12 \times 2 = (\quad)$ 比較不容易計算，若能利用分配律改成 $12 \times 8 + 12 \times 2 = 12 \times (8 + 2) = 12 \times 10 = 120$ ，計算上會容易許多。

4. 乘法對減法的分配律

乘號在減號右邊時，如： $(8-5) \times 9 = 8 \times 9 - 5 \times 9$ 」稱為乘法對減法的右分配律；乘號在減號左邊時，「 $10 \times (9-4) = 10 \times 9 - 10 \times 4$ 」稱為乘法對減法的左分配律。教師應用具體的情境讓學生理解乘法對減法的分配律為何會成立，情境題的數字可以設計成用分配律計算更容易，以產生使用分配律的需求。

例如：「一打鉛筆有 12 枝，小明有黃色鉛筆 8 打，小華有紅色鉛筆 2 打，小明比小華多幾枝鉛筆？」引導學生發現 $12 \times 8 - 12 \times 2 = (\quad)$ 比較不容易計算，若能利用分配律改成 $12 \times 8 + 12 \times 2 = 12 \times (8-2) = 12 \times 6 = 72$ ，計算上會容易許多。

5. 加法與乘法的結合律

在連加算式中， $(5+3)+7=5+(3+7)$ ，所以加法有結合律；在連乘算式中， $(17 \times 5) \times 2 = 17 \times (5 \times 2)$ ，所以乘法也有結合律。教師應用具體的情境讓學生理解加法與乘法的結合律為何會成立，情境題的數字可以設計成用結合律計算更容易，以產生使用結合律的需求。

例如：「有一個長 24 公分、寬 8 公分、高 5 公分長方體，它的體積是多少？」由於長方體是由許多 1 立方公分的白色積木堆疊而成，所以計算體積＝長×寬×高時，可以先算前面「 $(24 \times 8) \times 5$ 」，也可以先算後面「 $24 \times (8 \times 5)$ 」，其體積雖然相同，但學生會發現先算 8×5 會比較容易計算。

(四) 本題教學的加強重點

1. 透過擬題討論結合律

本題僅需依題意找出正確的算式不需計算出答案，然而在無情境的算式中，學生容易遺忘結合律使用的規約而僅靠所記憶的算則來進行判斷，因此可透過文字情境敘述幫助學生重新理解結合律，教師可利用題目中的左邊算式數字請學生分別擬題，再讓學生討論右邊算式是否也符合題意，藉以理解結合律在何種條件下成立。

例如依據算式 $(891+33)+3$ 擬題為「養雞場裡面原有 891 隻雞，上個月母雞孵出了 33 隻小雞，昨天母雞又孵出了 3 隻小雞，現在農場共有幾隻雞？」並讓學生討論得知在此情境下左邊的算式 $(891+33)+3$ 與右邊的算式 $891+(33+3)$ 皆成立。

減法、乘法、除法可以此方式類推進行討論。

2. 透過簡化數字的計算進行驗證

結合律的規約除了可以透過文字情境來理解，也可以藉由實際計算來驗證，教師可以將本題數字縮小為 1000、100 與 10，讓學生透過計算再次發現結合律無法在減法與除法情境使用。

$$\begin{array}{lll} (1000+100)+10=1110 & \Rightarrow & 1000+(100+10)=1110, \\ (1000-100)-10=890 & \Rightarrow & 1000-(100-10)=910, \\ (1000 \times 100) \times 10=1000000 & \Rightarrow & 1000 \times (100 \times 10)=1000000, \end{array}$$

$$(1000 \div 100) \div 10 = 1 \quad \Rightarrow \quad 1000 \div (100 \div 10) = 100。$$

3. 結合律在簡化計算的應用

教師可以舉幾個計算題讓學生感受使用結合律能簡化計算，以利學生未來能靈活運用結合律。

例如加法算式 $(542 + 982) + 18$ ，使用結合律 $542 + (982 + 18)$ 先計算後兩項較為方便；乘法算式 $(24 \times 125) \times 8$ ，使用結合律 $24 \times (125 \times 8)$ 先計算後兩項較為方便。