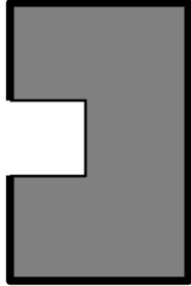
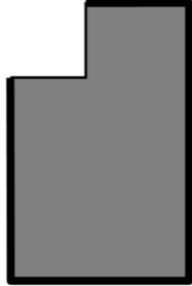
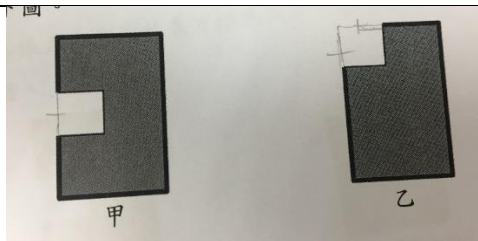
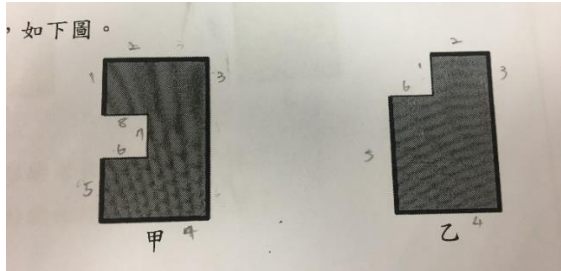


新北市 106 學年度國小數學檢測非選擇題學生解題分析及教學建議報告

一、試題內容及評閱規準：

分年細目	4-s-09 能理解長方形和正方形的面積公式與周長公式。	知識向度	概念理解
評量內涵	能理解等積異形圖形的周長。	認知層次	應用
試題內容	<p>小玉在甲、乙二張大小相同的長方形紙張上，分別剪下一個一樣大的正方形，如下圖：</p> <div style="text-align: center;">   </div> <p>圖形甲和乙的周長哪一個比較長？為什麼？</p>		
評閱標準	類別	評閱說明	評閱舉隅
	2A	正確回答圖形甲的周長較長，以原來的長方形的周長為基準，甲多二個邊、乙和原來的長方形邊數一樣多進行判斷。	因為乙的周長和原來一樣，甲多了二條邊，周長就變長了。
			因為甲剪掉了一個正方形，邊長多了二個；乙也剪了一個正方形，但邊長沒有變多
	2B	正確回答圖形甲的周長較長，自行假設合理的邊長，並計算出甲、乙兩圖形的周長。	以符號假設剪下正方形的邊長為 X 公分，甲和乙原周長為 Y 公分，圖形甲剪下的正方形是剪在中間，其周長為 $2X+Y$ ，圖形乙剪下的正方形在角落，其周長為 Y ， $2X+Y > Y$ 。
			假設原長方形長為 20，寬為 10，正方形邊長為 5，則圖形甲周長為 70，圖形乙周長為 60。
	2C	正確回答圖形甲的周長較長，並實際測量出甲和乙兩圖形的周長進行比較。	甲的周長約 14.6 公分，乙的周長約 11.7 公分， $14.6 > 11.7$ 。
	2X	其他正確類型，但不屬於上述類型	

	1A	正確回答圖形甲的周長較長，畫線將原來長方形剪下正方形後所缺少的邊補上，認為需補上的邊數較少者，周長較長。	 <p>因為甲只有少一個邊長，乙少二個邊長，所以甲的周長較長。</p>
	1B	正確回答圖形甲的周長較長，直接以甲和乙兩圖形進行比較，甲圖有三個邊凹下去，乙圖有二個邊凹下去，甲比乙多了一個邊。	<p>因為甲圖的長方形有三個邊凹下去，乙圖是二個邊凹下去。</p> <p>因為甲圖是從中間靠左剪下的，所以會留三個邊，而乙圖是從上方靠左邊角落的地方剪下，只會留下二個邊，所以甲圖會多一個邊。</p>
	1C	正確回答圖形甲的周長較長，忽略圖形各邊的邊長，以計數圖形的邊數進行比較。	<p>如下圖。</p>  <p>因為甲有 8 個邊，乙有 6 個邊，所以甲的周長較長。</p>
	1D	正確回答圖形甲的周長較長，但說明不完整、錯誤或未說明。	學生未敘寫理由，或看不懂其理由
	0A	回答圖形甲和乙的周長一樣長，認為面積一樣大，周長也會一樣長。	甲圖和乙圖本來一樣大，而且都剪下一樣大的正方形，所以周長一樣長。
	0B	回答乙的周長較長。	認為乙的周長較長
	0X	其他錯誤類型，但不屬於上述類型	
	99	空白	

二、評閱結果：

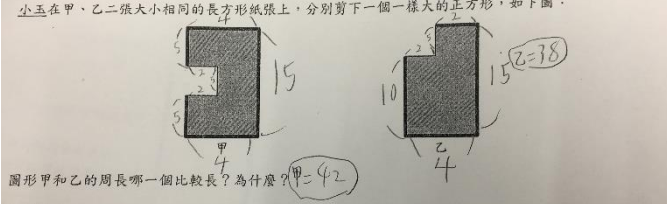
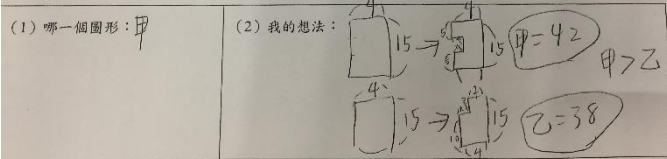
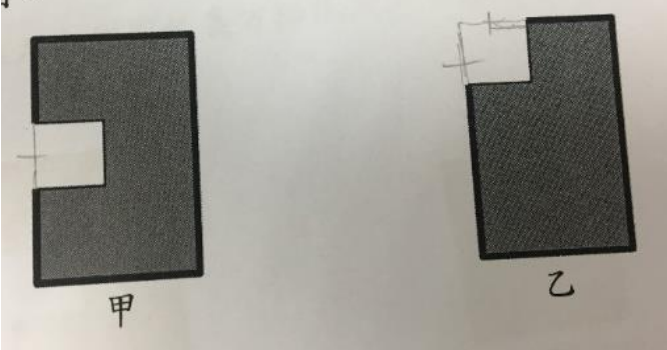
(一)本題學生作答情形

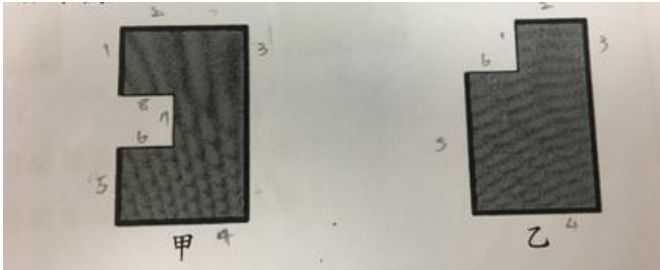

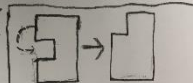
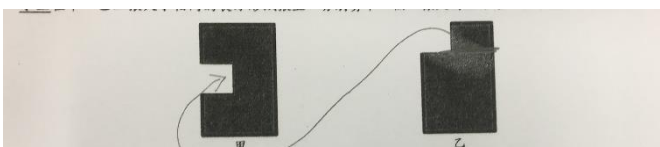
類型	2				1				0				合計
	2A	2B	2C	2X	1A	1B	1C	1D	0A	0B	0X	99	2914 人
人數	209	42	16	12	68	443	143	686	745	240	229	81	
百分比(%)	7.3	1.4	0.5	0.4	2.3	15.2	4.9	23.6	25.6	8.1	7.9	2.8	
人數	279				1340				1295				
百分比(%)	9.6%				46%				44.4%				

依上表可看出近五成的學生得分為 1 分，約四成的學生得 0 分，只有不到一成的學生得 2 分。得分 2 分的學生佔 9.6%，其中大部分的學生利用後來的圖形與原來長方形相比所增加正方形邊長的數量來說明；另有少部分的學生則自行假設圖形的周長來說明；而有極少部分學生實際測量甲、乙二個圖形的周長進行比較，以上三者都能掌握周長的概念，正確回答問題。得 1 分的學生佔 46%，大部分的學生雖能正確回答圖形甲的周長較長，但說明不完整或理由錯誤，或甚至未說明；有部分學生以剪下正方形後，甲乙兩圖形凹進去的邊數進行比較；而有少部分學生忽略圖形各邊的邊長，直接比較甲乙兩圖形的邊數；另有極少部分學生畫線補上缺少的邊，計數所補上的邊數。至於得 0 分的學生佔 44.4%，其中大部分的學生認為甲乙的面積一樣大，所以周長也一樣長；而有少部分學生甚至回答圖形乙的周長較長。

(二) 學生答題類型分析

得分	類型	解題範例(學生作答照片)	解題類型分析
2	2A	<p>圖形甲和乙的周長哪一個比較長?為什麼? 作答欄:</p> <p>(1) 哪一個圖形: 甲圖</p> <p>(2) 我的想法: 先將甲圖缺口的直線(有標記在圖片中)往左移這樣就跟原本的圖形一樣了,但是多了兩條橫線,將乙圖缺口的直線往左移(一樣有標記),再將橫線往上移(有標記)這樣就跟原本的圖形一樣了,但是乙圖卻沒有多出任何一條線,而甲圖多出兩條線,所以2>0=甲>乙.甲的周長比乙的周長長。</p>	利用平移的方式與原圖形進行比對,發現圖形乙的周長和原來一樣,圖形甲則比原圖形多二條邊。

1		<div data-bbox="316 98 995 237"> <div> <p>(1) 哪一個圖形：甲</p> </div> <div> <p>(2) 我的想法：甲少了一條邊，多了三條邊。 乙少了兩條邊，多了兩條邊。 甲：3-1=2 乙：2-2=0</p> </div> </div> <div data-bbox="316 264 995 412"> <div> <p>(1) 哪一個圖形：甲圖形</p> </div> <div> <p>(2) 我的想法：因為甲少了一段，但又加了三段各同樣長度的邊；但乙少二段，卻只增加了一段同樣長度的邊，所以-1+3=2，-2+2=0，2>0</p> </div> </div>	檢視所剪下正方形區域之邊數的增減。
		<div data-bbox="316 474 995 622"> <div> <p>(1) 哪一個圖形：甲圖形</p> </div> <div> <p>(2) 我的想法：假設剪下正方形邊長為1公分，甲和乙的長為4公分。圖形甲剪下的正方形是在中間的，所以圖形甲的周長為2x4+2x1+1x2=10公分。圖形乙剪下的正方形是在角落，所以圖形乙的周長為4x2=8公分。2x1+2>2</p> </div> </div>	以代數分別假設所剪下正方形的邊長及原長方形的周長，用代數列出算式解題。
	2B	<div data-bbox="316 685 995 1079"> <p>小玉在甲、乙二張大小相同的長方形紙張上，分別剪下一個一樣大的正方形，如下圖：</p>  <p>圖形甲和乙的周長哪個比較長？為什麼？甲=42</p> <p>作答欄：</p> <div> <p>(1) 哪一個圖形：甲</p> </div> <div> <p>(2) 我的想法：</p>  </div> </div>	自行假設合理的邊長，並計算出甲、乙兩圖形的周長。
	2C	<div data-bbox="316 1106 995 1200"> <p>甲的周長約14.6cm 乙的周長約11.7cm</p> <p>14.6>11.7</p> </div>	實際測量出甲和乙兩圖形的周長進行比較。
	1A	<div data-bbox="316 1214 995 1680">  <p>因為甲只有少一個邊長，乙少兩個邊長</p> </div>	畫線將原來長方形剪下正方形後所缺少的邊補上，認為需補上的邊數較少者，周長較長。
	1B	<div data-bbox="316 1693 995 1870"> <p>因為小長方形有三個邊凹下去，乙圖是兩邊凹下去。</p> <p>為什麼？因為甲圖是從中間靠左剪下的，所以會留三個邊，而乙圖則是從上方靠右的剪下，只會留下兩個邊。3-2=1，甲會多一個邊。</p> </div>	甲圖有三個邊凹下去、乙圖有二個邊凹下去，甲比乙多了一個邊。

	1C		忽略圖形各邊的邊長，以計數圖形的邊數進行比較。						
	1D	<table><tr><td>(1) 哪一個圖形： 甲</td><td>(2) 我的想法： 它轉角的地方比較多</td></tr><tr><td>(1) 哪一個圖形： 甲</td><td>(2) 我的想法：因為我覺得甲的兩部分有兩個直角而乙只有一個所以我覺得甲的周長長。</td></tr><tr><td>(1) 哪一個圖形： 甲</td><td>(2) 我的想法： 因為甲的角比較多。</td></tr></table>	(1) 哪一個圖形： 甲	(2) 我的想法： 它轉角的地方比較多	(1) 哪一個圖形： 甲	(2) 我的想法：因為我覺得甲的兩部分有兩個直角而乙只有一個所以我覺得甲的周長長。	(1) 哪一個圖形： 甲	(2) 我的想法： 因為甲的角比較多。	正確回答圖形甲的周長較長，但說明不完整、錯誤或未說明。
(1) 哪一個圖形： 甲	(2) 我的想法： 它轉角的地方比較多								
(1) 哪一個圖形： 甲	(2) 我的想法：因為我覺得甲的兩部分有兩個直角而乙只有一個所以我覺得甲的周長長。								
(1) 哪一個圖形： 甲	(2) 我的想法： 因為甲的角比較多。								
0	0A	<table><tr><td>(1) 哪一個圖形： 一樣</td><td>(2) 我的想法： 假設長 20cm 寬 10cm 面積 $20 \times 10 = 200(\text{cm}^2)$ 剪掉部分為 $4\text{cm} \cdot 4 \times 4 = 16\text{cm}^2$，$200 - 16 = 184\text{cm}^2$</td></tr></table>  <p>圖形甲和乙的周長哪一個比較長？為什麼？ 作答欄：</p> <table><tr><td>(1) 哪一個圖形： 一樣長</td><td>(2) 我的想法： 把甲上面凸出來的拿一塊放下來就一樣了</td></tr></table> 	(1) 哪一個圖形： 一樣	(2) 我的想法： 假設長 20cm 寬 10cm 面積 $20 \times 10 = 200(\text{cm}^2)$ 剪掉部分為 $4\text{cm} \cdot 4 \times 4 = 16\text{cm}^2$ ， $200 - 16 = 184\text{cm}^2$	(1) 哪一個圖形： 一樣長	(2) 我的想法： 把甲上面凸出來的拿一塊放下來就一樣了	認為面積一樣大，周長也會一樣長。		
(1) 哪一個圖形： 一樣	(2) 我的想法： 假設長 20cm 寬 10cm 面積 $20 \times 10 = 200(\text{cm}^2)$ 剪掉部分為 $4\text{cm} \cdot 4 \times 4 = 16\text{cm}^2$ ， $200 - 16 = 184\text{cm}^2$								
(1) 哪一個圖形： 一樣長	(2) 我的想法： 把甲上面凸出來的拿一塊放下來就一樣了								
	0B	 <p>圖形甲和乙的周長哪一個比較長？為什麼？ 作答欄：</p> <table><tr><td>(1) 哪一個圖形：乙</td><td>(2) 我的想法：乙的上面有多出一條長方形型所以高度都不一樣(甲的是中間少了一片)</td></tr></table>	(1) 哪一個圖形：乙	(2) 我的想法：乙的上面有多出一條長方形型所以高度都不一樣(甲的是中間少了一片)	認為乙的周長較長。				
(1) 哪一個圖形：乙	(2) 我的想法：乙的上面有多出一條長方形型所以高度都不一樣(甲的是中間少了一片)								

1. 學生多元解題類型：

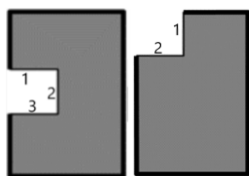
從學生獲得 2 分的作答類型中，發現這些學生都能理解周長的概念，其中有的學生不需透過計算，而能利用平移的方式比對，找出與原圖形之周長變化關係；而有的學生以明確計算出周長來解題，其解題方式分為二類，其一為自行假設合理的邊長，有的學生利用自己設定之數字算出周長，而更有學生能利用代數假設正方形邊長為 x 、原長方形周長為 y ，則圖形甲的周長為 $2x+y$ ，圖形乙的周長為 y ，因為 $2x+y > y$ ，

所以圖形甲周長較長；另一類學生找出圖形周長的方式仍停留在實際測量階段，利用尺測量出各邊的長度再進行加總。

2. 學生常見錯誤類型：

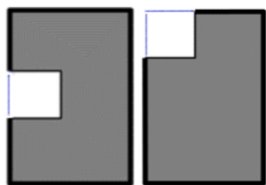
在學生獲得 1 分的作答類型中，可以看到大部分學生能判斷甲圖形的周長較長，但敘寫理由不完整或理由錯誤，錯誤的類型大致分為下列三種：

- (1) 僅以剪下正方形後，甲乙兩圖形凹進去的正方形邊數進行比較：



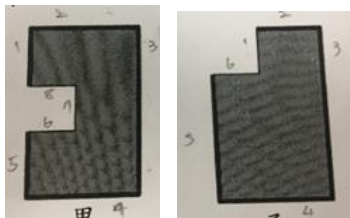
忽略兩圖形剪下正方形的不同位置，一個是剪在圖形的一邊，下刀處僅損失一個正方形的邊數；另一個是剪在圖形的角落，而損失了二個正方形的邊數。

- (2) 僅以剪下正方形後，所減少正方形邊數進行比較：



忽略剪下正方形後，可能會使原圖形的周長增加。

- (3) 僅點數剪下正方形後圖形的邊數進行比較：



忽略各邊邊長不盡相同之事實。

至於獲得 0 分的作答類型中，比例最高的錯誤作答為面積一樣大(直觀或切割重組)，則周長也會一樣長；亦有學生認為乙圖形的上方凸出一塊，面積較大因此周長較長。這些學生的周長概念明顯受到面積概念的影響，未考慮到圖形經過裁剪後的周長有可能與原圖形不一樣長。




三、評量內涵及本題的教學建議：

本題評量重點為透過掌握正方形四邊等長的性質，進行等積異形圖形的周長探討。學生在題目未提供圖形邊長長度的情境下，能否運用已知之周長概念，判斷圖形周長之變化情形是本題的評量重點。本題之教學建議如下：



1. 透過動態表徵強化周長的心象：

周長是「周界的長度」，教學時需清楚指出封閉圖形的周界在哪裡，因周界恰為區分圖形之內部及外部的界線，紙本上靜態展示的視覺效果，容易讓學生誤以為周界包含了圖形的內部區域，在教學時，除了需用手順著圖形的周界繞一圈比畫之外，還需利用繩子或扣條等教具，將周界描出後拉直，使周界變成一條直線，強化周長的心象。



所以，老師在介紹圖形的面積時，其配合的手勢應與周長所指的部分不同，要用手掌像擦桌子一樣的方式「擦滿」全部的內部區域，而不是只沿周界繞一圈比畫。以  此圖形為例，如果老師過於強調長方形周長公式，學生心中沒有周長心象時，就會將  拼成長邊為 3 公分、寬邊為 2 公分的長方形 ，運用公式計算 $(3+2) \times 2 = 10$ (公分)，而忽略用點數即可得到周長是 14 公分；甚至也有學生會誤用口訣「周長就是圖形的所有邊長」，以為這個圖形的周長就是 6 個正方形邊長的總和，用 $4 \times 6 = 24$ (公分) 計算或點數所有線段 (19 公分) 得到錯誤答案。

2. 提昇「不需實際數據而能判斷周長比較」的思考能力：

學生理解周長概念之後，教師可進一步利用如本題的「等積異形」題目，讓周長的求得方式不僅只停留於實際測量結果的比較階段，而應進一步培養學生抽象思考的能力。如本題，「在長方形上剪下一個正方形，有哪些不同的剪法，這些圖形的周長都會一樣嗎？」初步引導時可以提供長方形及正方形的邊長長度，讓學生經由實際操作驗證想法，並將所得結果歸納分析，理解本題只有二類剪法，一為剪在邊上、一為剪在角落上(國小階段不討論圖形有空心部分的周界 )。而若要提昇學生的思考能力，教學不能只停留在有數據的階段，應該重新以無數據的情境布題(例如比原圖形扁長的長方形 )，讓學生深入思考，在沒有提供邊長等相關數據的情況下，結果仍然會一樣嗎？帶領學生運用將線段平移的方式(如得分 2A 之學生的作答類型)進行討論，當學生對此概念產生困難時，教師仍應適時提供繩子或吸管等教具。

3. 透過操作探討面積與周長變化關係：


當學生學習了周長及面積概念後，除了理解該圖形的周長及面積之外，還需透過許多不同的例子深入探究二者的關係。

(1) 圖形「面積相等」的情況：

學生在方格紙上畫出等積異形的圖形，例如 12 平方公分的長方形(可畫出長寬為 1×12 、 2×6 、 3×4 三種)，描出其周界並數算周長，了解圖形面積

相等時，周長不一定相等之概念。教師再進一步提供更多不同的例子，如 16 平方公分、20 平方公分、24 平方公分等長方形…，讓學生透過操作後，思考等積異形圖形與周長的關係，並進行歸納以理解面積相等的長方形中(或正方形)，何時周長最大、何時周長最小，並探究其原因。

(2) 圖形「周長相等」的情況：

在平方公分板上要求學生畫出教師所指定周長的長方形或正方形，如周長為 12 公分(可畫出長寬為 1×5 、 2×4 、 3×3 三種)，若學生不太容易成功畫出，教師可提供繩子做為輔助工具，引導學生回想並思考周長與長方形的長、寬及正方形邊長之關係(周長 $=$ (長 $+$ 寬) $\times 2$)，鼓勵學生先在腦海中思考建立心象 ，長方形周長為 12 公分，也就是二個長和二個寬合起來是 12 公分，因此一個長加一個寬會是 6 公分，再思考和為 6 的整數組合，學生再透過操作驗證自己的想法。教師進一步提供更多不同的例子，讓學生進一步歸納分析，周長相等的長方形中(或正方形)，何時面積最大、何時面積最小，並探究其原因。