

新北市國小數學輔導團

新北市雙溪區柑林國小教學演示 (2019/04/12)



高年級 數量關係 高年級 怎樣解題 (解決問題的方法)

張英傑

dr.ijchang@gmail.com

退休教授

National Taipei University of Education
Department of Mathematics and Information Education



國立台北教育大學數學暨資訊教育學系

National Taipei University of Education

NTUE dr.ijchang@gmail.com

NTUE dr.ijchang@gmail.com



我們都是共同學習者(*co-learners*)!

「自發」、「互動」、「共好」

- 學生的數學力 (*Mathematical Power*)
- 教師的教學力 (*Pedagoical Power*)
- 師培者的教育力 (*Educational Power*)



緣 -- Affinity – Yan

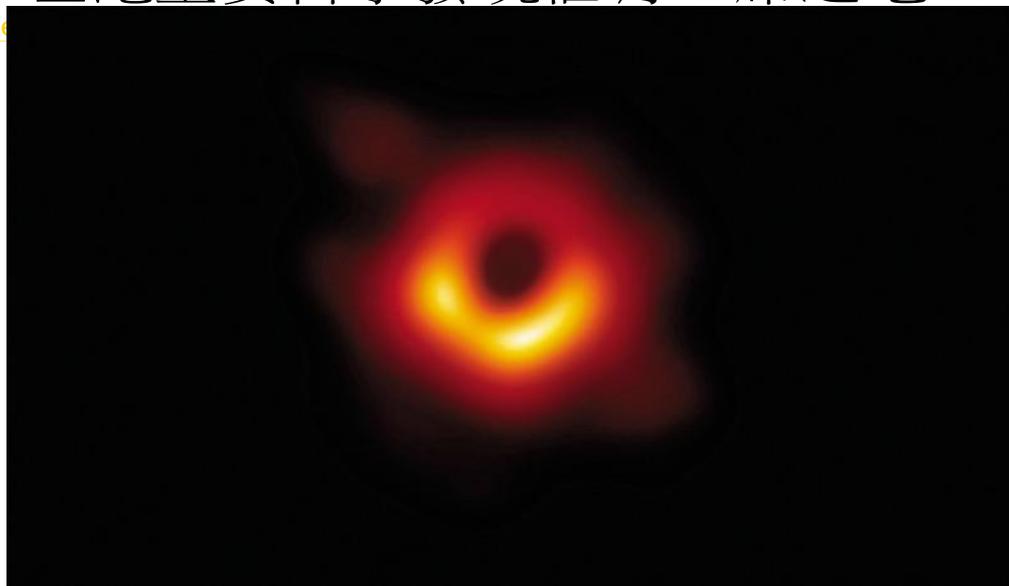
- 珍惜因緣、
- 把握因緣、
- 創造因緣

全球6地昨同步公布史上第一次成功拍攝到的 黑洞影像。（中研院提供）2019-04-11

- 台、美、日等20國共同參與的跨國「**事件視界望遠鏡（EHT）Event Horizon Telescope**」計畫，昨晚在全球6地同步公布人類史上第一次成功拍攝到的黑洞影像，影像顯示了一個位於**M87**星系中心的超大質量黑洞，距離地球**5500**萬光年，質量高達太陽的**65**億倍，直徑約**180**億公里；這也是本世紀天文跟物理學界最重大的發現之一，為人類對宇宙認知的重大突破，亦顯示台灣在本世紀重要科學發現佔有一席之地。

<https://news.ltn.com.tw/news/focus/paper>

- 全球第一張
黑洞長這樣



2019-3-14 (3月14日) “國際數學節” 也是圓周率 (π) 日

- 美國的麻省理工學院首先倡議將 3 月 14 日定為國家圓周率日 (National Pi Day)，2009 年美國眾議院正式通過決議，將每年的 3 月 14 號設定為「圓周率日」(Pi Day)。全球尤其是美國大學的數學系都在當天下午 1 時 59 分慶祝這一節日，還有用 24 小時計時的人在凌晨 1 時 59 分或下午 3 時 9 分 (15 時 9 分) 進行慶祝。
- 有人說物理的極致是宗教，數學的極致是哲學，是有一定道理的。



2019-3-14 (3月14日) 圓周率日

李安導演的《少年PI的奇幻漂流》(Life of Pi)

■ π 的小數點後**31.4兆位**！Google員工Emma Haruka Iwao以雲端運算破世界紀錄

■ 耗時121天、使用約170TB的容量，算出了 π 的小數點後**31兆4159億2653萬5897位數**，打破2016年另1名男子創下的小數點後**22.4兆位數**紀錄。她從小就夢想可以算出更多位數的 π 、打破世界紀錄，她在12歲就第1次利用軟體在電腦上進行運算，她沒有滿足於目前的成果，希望未來可以繼續算出更多位數的 π 。

■ 艾瑪這次利用雲端運算突破的紀錄，對Google而言除了順勢宣傳其雲端服務之外，也象徵了雲端運算技術的發展神速。

■ <https://news.ltn.com.tw/news/world/breakingnews/2727279>

■ 有甚麼用？

怎樣解題?



- 假設有一條繩子 c (km)，可以剛好緊繞地球赤道一周；現在將此繩子再加長 a (km) 時，也可以剛好緊繞地球離赤道上空 200 (cm) 的高度一周。求 a 的長度?
- 了解題意?
- 解題策略?
- 思考方法?
- 檢驗答案? $\langle \pi \div ? \rangle$
- 如何改寫檢測國小學生?



有沒有用?!

- 很多數學研究都是出於好奇，許多研究成果都是在許多年以後才發現其應用。
- Emma Haruka Iwao 利用Google的雲端運算服務，耗時121天、使用約170TB的容量，算出了 π 的小數點後31兆4159億2653萬5897位數，打破金氏世界紀錄。主要顯示如今電腦的運算能力，而不是其結果的可利用性。用 **brain storming**，會激發在其他領域的運用。
- IBM的深藍 (**Deep Blue**) 打敗人類的西洋棋冠軍，沒有乘勝追擊繼續在圍棋上的研發，而是更進一步的發展出 **Watson**，能瞭解自然語言 (**natural language understanding**)。在美國的益智比賽 (**Jeopardy**) 中完勝兩位該比賽的多次衛冕者。如今Watson 與 Mayo Clinic 合作應用在醫療診斷上，與H&R Block稅務公司合作應用在報稅系統上。

感謝大家的參與!

柑林國小 劉明相 校長 行政團隊協助
柑林國小 劉明相 校長 教學演示 (高年級)
輔導團員 黃光逸 老師 教學演示 (高年級)

- 共同備課
- 公開說課/觀課
- 集體議課
- 記錄教學檔案
(省思成長)



觀摩教學演示之啟示：樂教→樂學→樂教→ ...

自學與共學

- 當我在講台上, 面對自己的學生, 要教這個單元/這節課時...應該怎麼教?
- 這一課：**教什麼? 怎樣教? 為甚麼?**
- 教材內容(教學活動)編排?
- 教學手法展示?
- 學生學習表現?
- 其他?
- 學生學習真的發生!
- What→Why→How?

解讀課程綱要與剖析教科用書

▣ 課程綱要能力指標 (97課綱)

階段能力指標

N-3-18 能由生活中常用的數量關係，運用於理解問題並解決問題。(A-3-02)

A-3-03 能認識等量公理。

分年細目能力指標

6-n-13 能利用常用的數量關係，列出恰當的算式，進行解題，並檢驗解的合理性。(同6-a-04)

▣ **6-a-01** 能理解等量公理。

6-n-13

能利用常用的數量關係，列出恰當的算式，進行解題，並檢驗解的合理性。(同6-a-04)

- 本細目在六年級課程應佔相當份量，作為國小課程之總結。本細目之重點在解題，希望能整合國小階段所學到之數、量、運算、數量關係，解未知數等式之經驗，進行應用問題之解題，包含說明題意，列式表述問題，發展策略解題。
傳統之應用問題：雞兔問題、年齡問題、龜兔賽跑等，皆屬於本細目。
- 希望學童能分析問題，列出多步驟之算式來解題(不一定用算式填充題)。
- 常用的數量關係包括：和不變、差不變、積不變、比例關係、基準量問題等。
- 例：**(年齡問題)**「小麗今年12歲，爸爸與小麗的年齡相差24歲，再過幾年爸爸的年齡是小麗的兩倍？」
- 例：**(平均問題)**「小明的國語、社會、自然三科平均為90分，問小明的數學要考多少分才會讓四科平均達到88分？」
- 例：**(追趕問題)**「小英跑步的速度是每秒5公尺，小麗跑步的速度是每秒4公尺，兩人賽跑，如果小麗在小英前方40公尺，請問小英何時可以趕上小麗？」
- 例：**(雞兔問題)**「倉庫中有一種輪胎100個，可以裝在六輪小貨車上，也可以裝在四輪汽車上，今天裝配了22輛車子，剛好將輪胎都用光，請問這些車子中，有幾輛是六輪小貨車，有幾輛是四輪汽車？」

學習表現

n-III-10 嘗試將較複雜的情境或模式中的數量關係以算式正確表述，並據以推理或解題。

r-III-3 觀察情境或模式中的數量關係，並用文字或符號正確表述，協助推理與解題

《數學領域
課程手冊》

學習內容

- **N-6-9 解題**：由問題中的數量關係，列出恰當的算式解題（同 R-6-4）。可包含（1）較複雜的模式（如座位排列 模式）；（2）較複雜的計數：乘法原理、加法原理或其混合；（3）較複雜之情境：如年齡問題、流水問題、和差問題、雞兔問題。連結 R-6-2、R-6-3。
- **R-6-2 數量關係**：代數與函數的前置經驗。從具體情境或數量模式之活動出發，做觀察、推理、說明
- **R-6-3 數量關係的表示**：代數與函數的前置經驗。將具體情境或模式中的數量關係，學習以文字或符號列出數量 關係的關係式。

解讀課程綱要與教科用書

比較分析三版本教科用書之設計

教學實踐

- 忠實觀
(完全採用)
- 批判觀
(部份採用修改)
- 創新觀
(完全自編)

- Why?
- What?
- How!

- When?
- Where?

- Whom?
- Who!

解讀課程綱要與剖析教科用書

課程教材設計與教學活動之實施

- **Why?**
 - **What?**
 - **How?**
 - **Where?**
 - **When?**
 - **Whom?**
 - **WHO?**
- 「怎樣解題」能教嗎?
 - 「用甚麼架構/結構/情境/脈絡合適?
 - 有何教學資源去思考教學策略?
 - 教學活動之安排次序！
 - 數量關係之算式/公式的認識、理解與熟練
 - 先備知能的檢驗以及未來發展的啟示
 - 形成性評量與總結性評量之形式及其內涵

忠實觀

批判觀

創作觀



十二年國民基本教育課程綱要
國民中小學暨普通型高級中等學校

數學領域
課程手冊

中華民國一〇七年十二月

N-6-9 解題：由問題中的數量關係，列出恰當的算式解題（同R-6-4）。可包含（1）較複雜的模式（如座位排列模式）；（2）較複雜的計數：乘法原理、加法原理或其混合；（3）較複雜之情境：如年齡問題、流水問題、和差問題、雞兔問題。連結R-6-2、R-6-3。

備註：

- 乘法原理如**3** 件上衣與**5** 件裙子的搭配方式；
- 加法原理如允許重複，**1、2、3** 可排出幾種二位奇數；乘法原理與加法原理混合如**1、2、3** 可排出幾種三位奇數。
- 乘法原理和加法原理旨在初步學習計數的觀點，而非複雜的計數問題。
- 本條目不要求併式。

- 先備：N-5-2。
- 連結：R-6-2、R-6-3、R-6-4（同）。
- 後續：A-7-2、A-7-4。
- 基本說明
- 條目範圍
- 釋例
- **（錯誤類型）**
- 評量

N-6-9 解題：由問題中的數量關係，列出恰當的算式解題（同R-6-4）。可包含（1）較複雜的模式（如座位排列模式）；（2）較複雜的計數：乘法原理、加法原理或其混合；（3）較複雜之情境：如年齡問題、流水問題、和差問題、雞兔問題。連結R-6-2、R-6-3。

□ 基本說明

1. 這是一個總結性的條目，應該連同R-6-2 與R-6-3 一起閱讀與進行教學。
2. 這是小學數學解題的總結性條目。針對生活中數與量的應用問題是和小學數學的學習一起進行的，從四則運算的問題、兩步驟問題、三步驟問題一直到各種「解題」條目、幾何問題。
 - 解決問題的步驟不外乎先察覺問題中的數量關係（R-6-2），將該關係表示成數學算式或公式（R-6-3），再運用所學進行計算並解決問題。
 - 比較基本的解題通常針對單一問題，例如「小明有23 張遊戲卡，哥哥的遊戲卡比他多12 張，小明的哥哥有幾張遊戲卡？」
 - 學生將問題嘗試轉化成數學算式 $23+12$ ，然後再計算得35 張。
 - 但是高一級的解題活動，則是針對問題中的數量模式，將其中牽涉的數量關係轉化成關係式（公式，R-6-3），並運用來解題。
 - 例如計算三角形的面積，運用面積公式，可以解決諸多相關的問題。
 - 又晝長和夜長的總和是固定的24 時，因此可得公式「晝長+ 夜長=24」，這時不管是問夏至、冬至、春分、秋分或其他時間，都能進行多元的教學。

N-6-9 解題：由問題中的數量關係，列出恰當的算式解題（同R-6-4）。可包含（1）較複雜的模式（如座位排列模式）；（2）較複雜的計數：乘法原理、加法原理或其混合；（3）較複雜之情境：如年齡問題、流水問題、和差問題、雞兔問題。連結R-6-2、R-6-3。

- 3.** 一般來說，學生通常能處理已經清楚表示為算式或公式的問題。因此本條目更強調將問題轉化為算式或公式的部分。
 - 這部分的解題活動分成兩種，一種是基礎的，一種是進階的，兩者的教學目的不同。基礎的部分如R-6-2 基本說明3. 所建議的基本數量關係，學生應能察覺並建立自己的解題方式，這應作為本條目解題活動的基礎重點。
- 4.** 本年度也應思考過程較複雜但學生仍能理解的進階解題活動（如和差問題、雞兔問題等），擴大學生運用數學解決問題的範圍。
 - 這部分解題強調的是思考問題中較複雜的數量關係，因此教學重點在學生能理解其中的分析策略，而非計算難度，不要求學生進行併式，也不要求學生建立快速解題的公式。
- 5.** 解題教學應包含常用的計數原理（這些原理就是問題的分析策略）：乘法原理、加法原理以及其混合型問題。

N-6-9 解題：由問題中的數量關係，列出恰當的算式解題（同R-6-4）。可包含（1）較複雜的模式（如座位排列模式）；（2）較複雜的計數：乘法原理、加法原理或其混合；（3）較複雜之情境：如年齡問題、流水問題、和差問題、雞兔問題。連結R-6-2、R-6-3。

條目範圍

- 1. 基本說明4.** 中談及的進階性問題，在國中之後利用代數解題可能都很簡單，因此教師不應該要求學生在小學死背解題公式，應將重點擺在如何運用小學的知識分析問題，這是代數工具解題無法呈現的部分。
- 2.** 計數原理的教學重點是學會分析的方法，而不是解繁雜的問題，建議教師教學需將問題最後呈現之算式限制在三步驟內（亦即三連加、三連乘、或乘加混合三步驟）。

N-6-9 解題：由問題中的數量關係，列出恰當的算式解題（同R-6-4）。可包含（1）較複雜的模式（如座位排列模式）；（2）較複雜的計數：乘法原理、加法原理或其混合；（3）較複雜之情境：如年齡問題、流水問題、和差問題、雞兔問題。連結R-6-2、R-6-3。

釋例

1. 以「差不變」的年齡問題為例（結合N-6-9, R-6-2, R-6-3）。
 - 下面例1 和例2 屬於基本數量關係，適合學生學習紀錄數量關係並做簡單應用。
 - 例3.和例4.屬於較困難的解題，著重問題的分析策略，老師不應再發展公式的教學。

N-6-9 解題：由問題中的數量關係，列出恰當的算式解題（同R-6-4）。可包含（1）較複雜的模式（如座位排列模式）；（2）較複雜的計數：乘法原理、加法原理或其混合；（3）較複雜之情境：如年齡問題、流水問題、和差問題、雞兔問題。連結R-6-2、R-6-3。

(1) 例1：「小明6歲時，爸爸34歲，當小明10歲時，爸爸幾歲？小明20歲時呢？35歲時呢？」

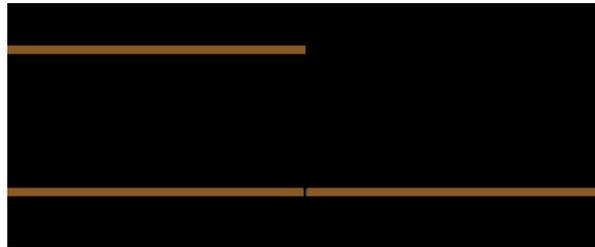
- 如果只問第一個問題，學生把這個問題當作單純的加減混合問題：
- $10+(34-6)=10+28=38$ ，
- 但是如果老師追問更多，學生就可能察覺其中隱含的數量關係。引導學生（譬如列表）
- 發現小明年齡和爸爸年齡固定差28歲的關係，請學生記錄這個關係？講講為什麼？
- 學生可能有很多記法，如「爸爸年齡-小明年齡=28」、「小明+28=爸爸」等

(2) 例2：（反過來）「爸爸75歲時，小明幾歲？」

- 這個問題很簡單，由於學生已經抓到重點：爸爸和小明年齡固定差28歲，很多學生會直接正確的回答
- $75-28=47$ ，
- 鼓勵學生後，請學生在公式如「爸爸年齡-小明年齡=28」，把爸爸75歲寫入公式中，得到「 $75-小明年齡=28$ 」，從加減互逆，也看出小明年齡等於 $75-28=47$ 。

N-6-9 解題：由問題中的數量關係，列出恰當的算式解題（同R-6-4）。可包含（1）較複雜的模式（如座位排列模式）；（2）較複雜的計數：乘法原理、加法原理或其混合；（3）較複雜之情境：如年齡問題、流水問題、和差問題、雞兔問題。連結R-6-2、R-6-3。

(3) 例3：（為年齡問題準備）「小明幾歲時，爸爸年齡是小明的2倍」讓學生討論。重點是如何將「爸爸和小明年齡差28歲」的事實和年齡的倍數連結。可以用基準量和比較量的想法或直接用線段圖來檢視：



結合兩圖如下，可發現當爸爸年齡是小明2倍時，爸爸和小明年齡差正好等於小明的年齡，因此小明當時是28歲，爸爸是56歲。



● 類題：「小明幾歲時，爸爸年齡是小明的3倍？」

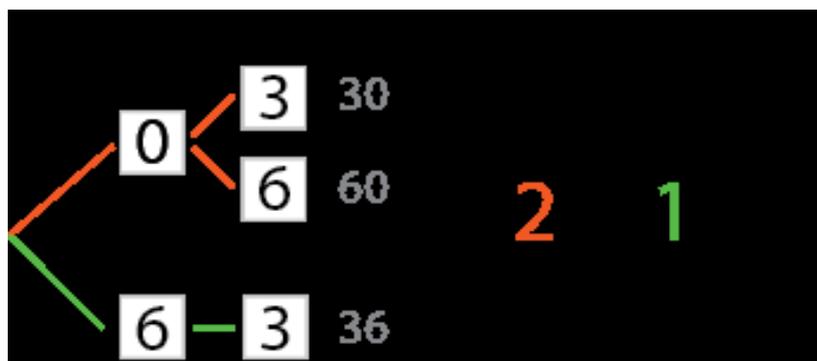
(4) 例4：（年齡問題）「小芳5歲時，媽媽25歲，當媽媽年齡是小芳的2倍時，小芳幾歲？媽媽幾歲？」

□ 有了前面的鋪陳，學生先計算媽媽和小芳的年齡差是 $25 - 5 = 20$ 歲，當媽媽年齡是小芳的2倍時，如上討論，小方的年齡是25歲，媽媽年齡50歲。

N-6-9 解題：由問題中的數量關係，列出恰當的算式解題（同R-6-4）。可包含（1）較複雜的模式（如座位排列模式）；（2）較複雜的計數：乘法原理、加法原理或其混合；（3）較複雜之情境：如年齡問題、流水問題、和差問題、雞兔問題。連結R-6-2、R-6-3。

2. 底下說明小學教師比較不熟悉的加法原理和乘法原理的例子。

- **(1)** 加法原理：可以把問題分成互不相干的部分再利用加法計數。
- 例：「如果不允許重複，0、3、6 可排出幾種二位偶數」。
- 在這個問題的條件下，偶數的個位數一定是0 或6 兩種，因此把問題分成「個位數為0」時的2 種（30、60）與「個位數為6」時的1 種（36），總共有 $2+1=3$ 種排法。
- 「加法原理」的「加法」指的是將問題分成無關的兩類：如本題的「個位數為0」和「個位數為6」，結果則是這兩類數目的和。
- 可以用「樹狀圖」作分析工具表示如下：



N-6-9 解題：由問題中的數量關係，列出恰當的算式解題（同R-6-4）。可包含（1）較複雜的模式（如座位排列模式）；（2）較複雜的計數：乘法原理、加法原理或其混合；（3）較複雜之情境：如年齡問題、流水問題、和差問題、雞兔問題。連結R-6-2、R-6-3。

(2) 乘法原理。例：「3 件上衣與2 件裙子的搭配有幾種方式？」

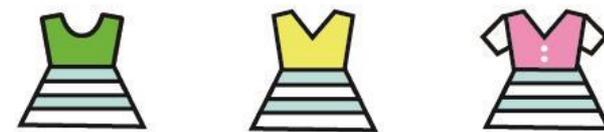
□ 上衣：

裙子：

□ 這是乘法排列模型的重要應用，可以排成下圖。



□ 所以是 $3 \times 2 = 6$ 或 $2 \times 3 = 6$ ，有6 種搭配方式。



□ 就像乘法是加法同數連加的特殊情況，乘法原理其實也是加法原理的重要特例，因此也可用樹狀圖來分析：先分成2 件裙子的兩種情況，每件裙子可搭配3 件上衣，所以是 $3 + 3 = 6$ ，或 $3 \times 2 = 6$ 。

● 類似的例子：

□ 「3 種漢堡和4種飲料的搭配方式有幾種

□ 「3 件上衣、2 件裙子、2 頂帽子的搭配方式有幾種？」



N-6-9 解題：由問題中的數量關係，列出恰當的算式解題（同R-6-4）。可包含（1）較複雜的模式（如座位排列模式）；（2）較複雜的計數：乘法原理、加法原理或其混合；（3）較複雜之情境：如年齡問題、流水問題、和差問題、雞兔問題。連結R-6-2、R-6-3。

(3) 混合型。例：「如果數字可以重複，1、2、3 可排出幾種三位奇數？」

- 同上先分成「個位數為1」和「個位數為3」兩類。
- 「個位數為1」時，十位和百位的「搭配」沒有任何限制，可用乘法原理計算得9種，即：111, 121, 131, 211, 221, 231, 311, 321, 331。
- 「個位數為3」也一樣。即113, 123, 133, 213, 223, 233, 313, 323, 333。
- 因此總數是 $3 \times 3 + 3 \times 3 = 18$ 種。
- * 這個問題其實也可以想成乘法原理的三步驟連乘，但只宜作為探索之用。

N-6-9 解題：由問題中的數量關係，列出恰當的算式解題（同R-6-4）。可包含（1）較複雜的模式（如座位排列模式）；（2）較複雜的計數：乘法原理、加法原理或其混合；（3）較複雜之情境：如年齡問題、流水問題、和差問題、雞兔問題。連結R-6-2、R-6-3。

評量

- 評量重點：
- **1.** 能解決一維模式之推理問題。
- **2.** 能解決和不變、差不變（如年齡問題）、積不變、商不變的應用問題。
- **3.** 能解決小學程度的加法原理與乘法原理應用問題。
- **4.** 能解決小學程度的較難解題如雞兔問題、和差問題、流水問題等。

N-6-9 解題：由問題中的數量關係，列出恰當的算式解題（同R-6-4）。可包含（1）較複雜的模式（如座位排列模式）；（2）較複雜的計數：乘法原理、加法原理或其混合；（3）較複雜之情境：如年齡問題、流水問題、和差問題、雞兔問題。連結R-6-2、R-6-3。

備註：乘法原理如3件上衣與5件裙子的搭配方式；加法原理如允許重複，1、2、3可排出幾種二位奇數；乘法原理與加法原理混合如1、2、3可排出幾種三位奇數。乘法原理和加法原理旨在初步學習計數的觀點，而非複雜的計數問題。本條目不要求併式。

R-6-2 數量關係：代數與函數的前置經驗。從具體情境或數量模式之活動出發，做觀察、推理、說明

備註：可以運用表格或統計圖協助發現規律。可以簡單公式說明其中的數量關係。

R-6-3 數量關係的表示：代數與函數的前置經驗。將具體情境或模式中的數量關係，學習以文字或符號列出數量關係的關係式。

□ **備註**：數量關係的表示例如：晝長夜長的關係可列成晝長+夜長=24。連結R-6-2。含部分運用符號的教學，連結國中「符號代表數」或「未知數」教學，其教學重點在「關係的表示」，而非抽象的「代數符號演算」。

解讀課程綱要與教科用書

比較分析三版本教科用書之設計

- 課本
- 習作及其附件
- 教師手冊/教學指導
- 備課用書
- 教具
- 教學資源
- ...

剖析教科用書

1. 教材脈絡比較及分析

- 教材內容編排順序比較
- 布題情境脈絡比較
- 數字設計脈絡比較

2. 情境表徵比較及分析

- 定義、命名、或公式的引入及呈現方式
- 圖示表徵的比較
- 說明對話框內容的比較
- 解法表徵或引導的比較

3. 文本比較及分析

- 布題表徵比較
- 語意結構



- Why?
- What?
- How?

- Where?
- When?

- Whom?
- WHO?

一、單元的期望的學習結果

- (一) 單元學習目標
- (二) 課程綱要學習重點(學習表現與學習內容)

二、學生與教材分析

- (一) 學生先備知識與可能的學習困難
- (二) 教材研究分析

三、各節次學習活動設計

(6節課，本節課為第1節:解決問題的方法)

四、本節課(第1節)的學習活動

- (一) 學習的主要概念與對應的活動
- (二) 素養導向的課程與教學
- (三) 學習活動的設計
 - 活動名稱/
 - 教學流程與主要布題/
 - 學生可能的反應/教學策略介入與評量
 - 時間/
 - 對應素養導向教學設計要點(轉T、做D、得G)

五、參考資料(各版本本單元分析/文獻)

一、單元的期望學習結果

(一) 單元學習目標 (二) 課程綱要學習重點

利用各種策略
解決問題。

瞭解能利用列表記錄，進而解決問題。

在解決問題的過程中培養學生的邏輯推理能力。

對應的學習表現

- n-III-10 嘗試將較複雜的情境或模式中的數量關係以算式正確表述，並據以推理或解題。
- r-III-3 觀察情境或模式中的數量關係，並用文字或符號正確表述，協助推理與解題

對應的學習內容

- N-6-9 解題：由問題中的數量關係，列出恰當的算式解題（同 R-6-4）。可包含（1）較複雜的模式（如座位排列 模式）；（2）較複雜的計數：乘法原理、加法原理或其混合；（3）較複雜之情境：如年齡問題、流水問題、和差問題、雞兔問題。連結 R-6-2、R-6-3。
- R-6-2 數量關係：代數與函數的前置經驗。從具體情境或數量模式之活動出發，做觀察、推理、說明
- R-6-3 數量關係的表示：代數與函數的前置經驗。將具體情境或模式中的數量關係，學習以文字或符號列出數量

關係的關係式 dr.ijchang@gmail.com

NTUE dr.ijchang@gmail.com

二、學生與教材分析

(一)學生先備知識與學習困難

先備知識

- 設未知數解決問題。
- 基礎運算概念。
- (1)**找出圖形的規律
- (2)**能依題意列式與解題
- (3)**能做整數的四則運算
- (4)**能報讀與製作二為表格

學習困難

- **1.** 遇到兩量皆未知的問題時，學生不知如何進行解題的思考。
- **2.** 在利用嘗試錯誤法進行解題時，無法掌控下一步要猜測的方向。
- **3.** 學生習於利用算式直接運算，不知如何利用表格做解題歷程記錄。

(二)教材研究分析

1.能力指標詮釋(97課綱)

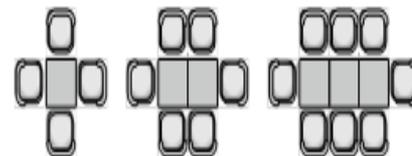
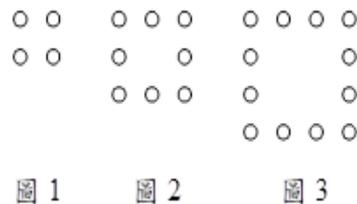
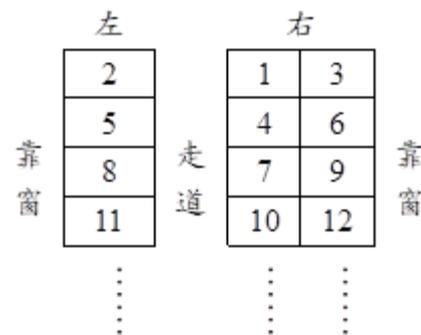
- 本細目在六年級課程應佔相當份量，作為國小課程前三階段學習課程之總結。本細目之重點在解題，希望能整合國小階段所學到之數、量、運算、數量關係，解未知數等式之經驗，進行應用問題之解題，包含說明題意，列式表述問題，發展策略解題。傳統之應用問題：雞兔問題、年齡問題、龜兔賽跑等，皆屬於本細目。
- 其主要可以分成兩大類

(二)教材研究分析

(1)較複雜的模式

- 座位排列模式
- 空心方陣
- 桌椅問題

(2) 常用的數量關係包括：和不變、差不變、積不變、比例關係、基準量問題等。其詮釋如下：
 和不變代表題目為雞兔同籠、差不變為年齡問題、積不變有面積相同時長與寬、總數不變時的單價與個數關係等等、比例不變有成正比或速率關係等、基準量、比較量與比值等等；傳統的追趕問題、流水問題等



(二)教材研究分析

2.解題思考歷程

- 根據波利亞數學「問題解決」教學的模式的四步解
 - (1) 怎樣理解問題 (Understanding the problem)、
 - (2) 怎樣擬定計劃 (Devising a plan)、
 - (3) 怎樣實現計劃 (Carrying out the plan)、
 - (4) 回顧 (Looking back) ,
- 從而激發學生經歷解難的過程並應用到新的情景中，從而幫助學生培養數學的興趣及獨立思考的能力。

(二)教材研究分析

3.雞兔同籠的數學史

- **雞兔同籠**是屬於和不變類型。而雞兔同籠在日本稱為”**龜鶴算**”或”**龜鶴問題**”或”**龜鶴同籠**”、中國相關書籍首見於《孫子算經》的下卷中的一道算題：
- 今有雉、兔同籠，上有三十五頭，下九十四足。問雉、兔各幾何？
- 解法：上置三十五頭，下置九十四足。半其足，得四十七。以少減多。
- 「現在籠子裡有雞（雉）和兔子在一起。從上面數一共有三十五個頭，從下面數一共有九十四隻腳，問一共有多少只雞、多少只兔子？」
- 將腳的總數九十四除以二得到四十七，然後減去頭數三十五就得到兔子的數目，然後自然可以得到雞的數目。

(二)教材研究分析

4.各版本分析

- 三個版本都以列表來找規律(翰林在例題二用圖示來表徵量的變化)。
 - (1)南一版第一題以1元和5元來組合；第二題是雞兔同籠。以生活情境的硬幣為出發，且控制(低數)為1是比較讓人易學習；但是在列表上，第一題是假設全部都是5元(高數)、第二題假設全部都是雞的數量(低數)，或許可以讓學生體驗不同的做法但也可讓學生產生混淆。
 - (2)康軒版以雞羊問題來代替雞兔問題，本質都相同：列表是全部假設為兔子(高數)，式子的引導卻是從全部假設為雞(低數)，兩者方向不同，對學習者來說是很大的挑戰。
 - (3)翰林版的例題一透過表格導入算式：例題二透過圖示來導入算式，可以調成先圖再表格，這樣符合「先具體、半具體」。至於例題三到例題五早堂練習是兩者差數不同，是同構分佈練習；老師教學時數不足可以當分布練習題。

(二)教材研究分析

5.題目屬性分析

□ 雞兔同籠的題目，主要有2個特徵：

特徵1：題目中必須包含兩個不同的主體，或者一個主體的兩種不同屬性。

特徵2：兩個主體或屬性之間，必須有兩種和差關係。

□ 解決方法有：

解法1：舉腳法(如孫子算經)

解法2：方程式法(國中的一元一次方程式或是二元一次方程式、

解法3：列表法(讓學生從列表中去發現答案)、

解法4：假設法(假設全部為雞或是兔子)。

□ 國小主要透過列表的規律配合假設法的思考模式引入。

(二)教材研究分析

6.教學的挑戰—五六年混齡

- 此單元並無分數(除數為分數)除法和小數(除數為小數)除法、整數小數分數四則計算等，在具體情境操作下並從做中體察表格變化、教具操作(古氏積木，錢幣代幣等)中找到數量之間變化的關係，本單元對於高齡仍是屬於困難範圍，是否可以用列式解題則對低齡是一挑戰。

說課 新北市數學輔導團 黃光逸 老師 (高年級:怎樣解題)

三、各節次學習活動設計

第一節(本節演示)

1. 利用各種策略解決問題。
 - 1-1. 根據情境將解題的想法記錄在表格上並嘗試解決問題。(可能從大數往下排、由小數往上排、從中間等思考)
2. 瞭解能利用列表記錄，進而解決問題。
 - 2-1. 從操作中了解兩量變化變化所代表的意義。
 - 2-2. 從列表找出規律，並理解彼此間關係。
3. 在解決問題的過程中培養學生的邏輯推理能力。
 - 3-1. 在解決問題的過程中培養學生的邏輯推理能力。

第二、三節

1. 認識年齡問題，利用畫線段圖找出關係進而解題。
 - 1-1. 了解年齡問題之「差不變」的關係。
 - 1-2. 畫出線段圖找出數量關係，並解決問題。
 - 1-3. 利用線段圖之數量關係，列式解決問題。

第四節

1. 認識平均問題，了解平均的意義並進而解題。
 - 1-1. 透過操作了解平均的意義。
 - 1-2. 利用平均的概念解決問題。

第五、六節

1. 認識間隔問題，利用簡化問題的方式找到規律，並進而解題。
 - 1-1. 透過簡化問題，了解間隔與間隔數之間的關係。
 - 1-2. 利用間隔與間隔數之間的關係解決問題。

四、第一節課的學習活動

(一)學習的主要概念與活動

活動目標的主要概念

1-1. 根據情境將解題的想法記錄在表格上並嘗試解決問題。

2-1. 從操作中了解兩量變化變化所代表的意義。

2-2. 從列表找出規律，並理解彼此間關係。

3-1 在解決問題的過程中培養學生的邏輯推理能力。

對應的學習活動

1-1-1. 根據情境將解題的想法記錄在表格上。

1-1-2. 根據情境將文字轉化列成表格，並解決問題。

2-1-1. 從操作中了解車輛數與輪胎變化所代表的意義。

2-1-2 從表格紀錄中，觀察「每換一次」所代表的意義

2-2-1. 從列表找出規律，並了解形成該規律的原因。

3-1-1. 利用算式解決「2輪摩托車和4輪汽車輪胎與車輛數數量關係」的問題，並了解算式與表列數字之關係。

3-1-2 利用算式解決停車場摩托車和汽車輪胎與數量問題，並了解算式與表列數字之關係。

□ 3-1-3 利用算式解決雞兔同籠的同構問題，並了解算式與表列數字之關係。

說課 新北市數學輔導團 黃光逸 老師 (高年級:怎樣解題)四、 第一節課的學習活動(二)素養導向的課程與教學

素養導向教學設計要點	與本節課活動內容的關聯說明
<p>轉</p> <ul style="list-style-type: none"> <input checked="" type="checkbox"/> T1情境問題轉化 <input checked="" type="checkbox"/> T2新舊經驗銜接 <input type="checkbox"/> T3數學概念聯結 	<p>T1將生活情境連結到數學問題，如錢幣總金額和數量問題、停車場車子數量和輪子個數問題</p> <p>T2能運用古氏積木或錢幣代幣或表格來解決相關雞兔同籠問題。</p>
<p>做</p> <ul style="list-style-type: none"> <input type="checkbox"/> D1概念操作理解 <input type="checkbox"/> D2解題策略探究 <input checked="" type="checkbox"/> D3數學語言溝通 	<p>D3從機車和汽車輪子間類別與總數變化，找出相關的關係</p>
<p>得</p> <ul style="list-style-type: none"> <input checked="" type="checkbox"/> G1思考能力提升 <input type="checkbox"/> G2解題態度培養 <input checked="" type="checkbox"/> G3共同學習增能 	<p>G1從表格中數字的變化轉化成式子</p> <p>G3能欣賞他人的解題歷程與學習</p>

(三)學習活動的設計 <第一節：解決問題的方法>

<教學流程與主要布題學生可能反應教學策略介入與評量時間對應素養導向教學設計要點(轉T做D得G)>

□ 引起動機(3') - 心電感應(猜猜我有多少錢)

1. 每位學生前面有2個5元硬幣和2個10元硬幣。
2. 每個人拿2個硬幣(5元或是10元的硬幣均可)。
3. 老師這堆硬幣說出的5元有幾個？10元有幾個？”

□ 教師提問：

◎有沒有很厲害？想不想學？那就讓老師來教妳們。

(三)學習活動的設計 <第一節：解決問題的方法>

<教學流程與主要布題學生可能反應教學策略介入與評量時間對應素養導向教學設計要點(轉T做D得G)>

◎布題(20')：

「停車場內有兩輪摩托車和四輪汽車，共有**9**輛，總共有**30**個輪子。兩輪摩托車和四輪汽車有幾輛？」

- 師：請先閱讀題意，找出關鍵的訊息，題目問什麼？
- 師：透過古氏積木棒，以**2**來代表摩托車，**4**代表汽車。和旁邊討論並完成下面表格(如右的表格，但數字為空白)

車輛數	9	9	9	...
摩托車	9	8	7	...
汽車	0	1	2	...
摩托車輪子	18	16	14	
汽車輪子	0	4	8	
輪子總數	18	20	22	...

停車場內有兩輪摩托車和四輪汽車，共有9輛，總共有30個輪子。兩輪摩托車和四輪汽車有幾輛？

車輛數	9	9	9	9	9	9	9
摩托車							
汽車							
摩托車輪子							
汽車輪子							
輪子總數							

(三)學習活動的設計 <第一節：解決問題的方法>

<教學流程與主要布題學生可能反應教學策略介入與評量時間對應素養導向教學設計要點(轉T做D得G)>

心電感應(猜猜我有多少錢)(7')

- 若老師手中有**10**個硬幣(引起動機的**5**元和**10**元硬幣)，總共有**65**元。老師的手中有幾個**5**元硬幣？幾個**10**元硬幣？
- 請與小組內同學討論後寫在白板上。並上台分享

若老師手中有10個硬幣(引起動機的5元和10元硬幣)，總共有65元。老師的手中有幾個5元硬幣？幾個10元硬幣？

硬幣	10	10	10	10	10	10	10
總金額							

(三)學習活動的設計 <第一節：解決問題的方法>

<教學流程與主要布題學生可能反應教學策略介入與評量時間對應素養導向教學設計要點(轉T做D得G)>

(挑戰題)(8')

- 1. 全班有29人，想買珍珠奶茶和冬瓜檸檬：已知珍珠奶茶1杯40元，冬瓜檸檬一杯30元，總共花了1000元，各買幾杯珍珠奶茶和冬瓜檸檬？
(13,16)
- 2. 全班有29人，想買珍珠奶茶和冬瓜檸檬：已知珍珠奶茶買20杯，冬瓜檸檬買9杯，總共花了1000元，幾杯珍珠奶茶和冬瓜檸檬每杯各多少元？
(41,20)(32,40)(23,60)(14,80)(5,100)

1.全班有29人，想買珍珠奶茶和冬瓜檸檬：已知珍珠奶茶1杯40元，冬瓜檸檬一杯30元，總共花了1000元，各買幾杯珍珠奶茶和冬瓜檸檬？

人數	29	29	29	29	29	29	29
總金額	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000

2.全班有29人，想買珍珠奶茶和冬瓜檸檬：已知珍珠奶茶買20杯，冬瓜檸檬買9杯，總共花了1000元，幾杯珍珠奶茶和冬瓜檸檬每杯各多少元？

硬幣	29	29	29	29	29	29	29
總金額	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000

(三)學習活動的設計 <第一節：解決問題的方法>

<教學流程與主要布題學生可能反應教學策略介入與評量時間對應素養導向教學設計要點(轉T做D得G)>

□ 教師總結(2')：

- 1.當遇到一個新的問題，我們可以用各種方式找出答案，其中一種方式就是實際操作。
- 2.用表格把數字記錄下來，有助於觀察規則。
- 3.從表格中的變化，利用學具—古氏積木或代幣找出數量變化並以式子呈現。

參考文獻

- 1.康軒文教（2016）。國小數學教科書第十二冊。
新北市：康軒文教。
- 2.南一書局（2016）。國小數學教科書第十二冊。
臺南市：南一書局。
- 3.翰林文教（2016）。國小數學教科書第十二冊。
臺南市：翰林文教。
- 4.許大偉(2015)。雞兔同籠教案。發表於新北市
- 5.馬恬舒(2017)。雞兔同籠教案。發表於新北市
- 6.波利亞著、閻育蘇譯（1994）。《怎樣解題》。
臺北：九章出版社

為何選”雞兔同籠”問題?

《孫子算經》下卷

(中國南北朝時期)

今有雞兔同籠，上有三十五頭，
下有九十四足，問雞兔各幾何？

- 同一本書中記載了解法：
- 上置三十五頭，下置九十四足。半其足，得四十七。以少減多。
- 也就是說，將腳的總數九十四除以二得到四十七，然後減去頭數三十五就得到兔子的數目，然後自然可以得到雞的數目

Q:雞羊的個數?

Q:雞與羊共有幾隻腳?



雞兔同籠

- 雞兔同籠共**12**頭 **32** 條腿，
雞兔各幾頭？
(請用**2** 種以上方法解題)

$2 + 2 = 16$
 $-12 = 9$ (是)
 $-4 = 8$ (是)

未知量(數)

EX 8: A 3
B 5
A, B 5

$x + x = 2x$

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ 2x + 4y = 32 \end{cases} \times 2 \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 24 \\ 2x + 4y = 32 \end{cases} \Rightarrow y = 8$$

$$12 - 4 = 8 \Rightarrow y = 4$$

$$x = 8$$

設點有 x 隻, 則必有 $(12 - x)$ 隻

列方程式 $2x + 4(12 - x) = 32$

$x = 1x$ (5)

12 頭 (張)

32 隻脚 (只)

設全部都是雞

① $(32 - 12 \times 2) \div (4 - 2) = 4$ 兔

$12 - 4 = 8 \dots$ 雞

② $2x + 4(12 - x) = 32$

$$\rightarrow \underline{(32 - 12 \times 2)} \div \underline{(4 - 2)} = 4 \text{ 兔}$$

$$12 - 4 = 8 \dots \frac{8}{2}$$

②

$$2x + 4(12 - x) = 32 + 2x$$

$$\begin{array}{r} 48 - 4x \\ + 2x \\ \hline \end{array}$$

$$x = 8$$

⑤

$$32 \div 2 = 16$$

$$16 - 12 = 4 \text{ (雞)}$$

$$12 - 4 = 8 \text{ (兔)}$$

③

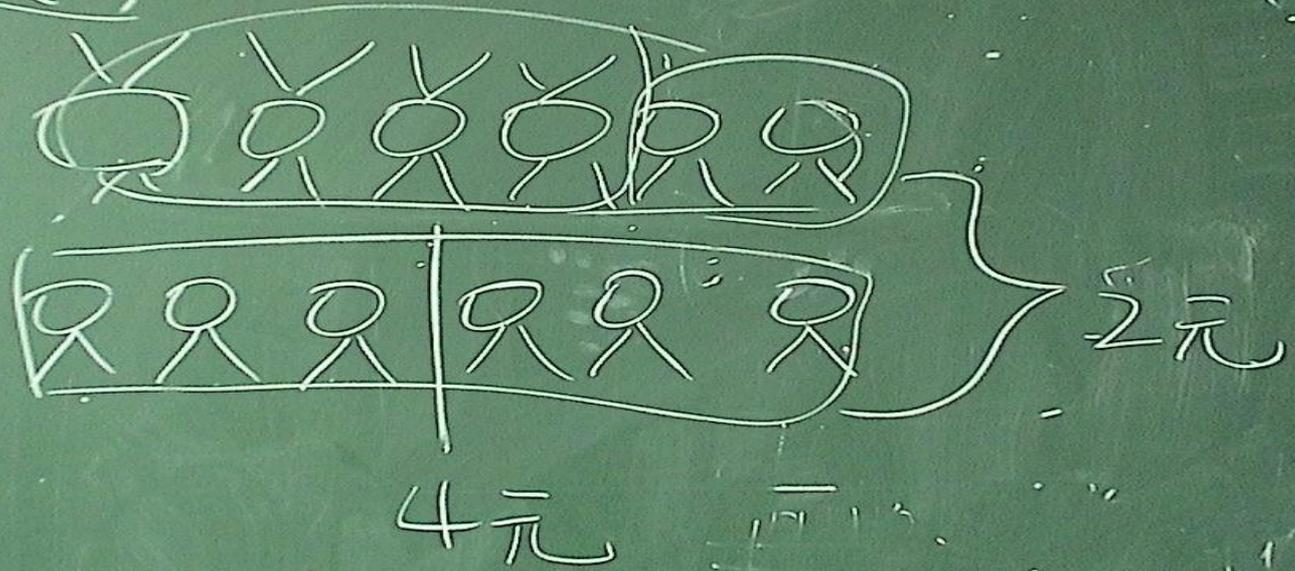
$$x + y = 12$$

雞

兔

3頭4脚 }
 5頭7脚 }
 B各幾隻?
 37頭 51脚

④



32

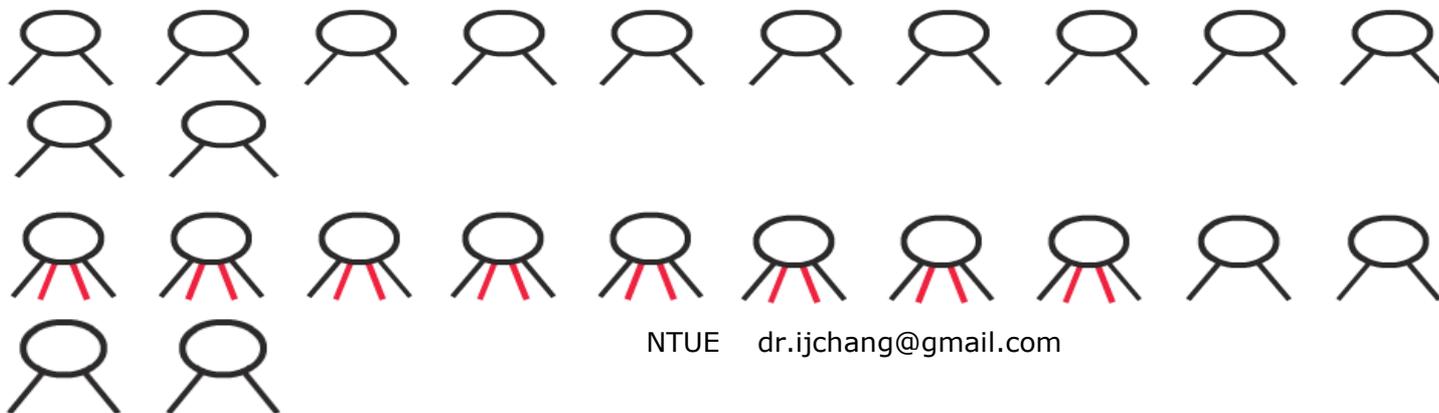
2x
 32
 8

農場裡的雞和羊總共有12隻，牠們一共有40隻腳，想想看，雞和羊各有多少隻呢？

表格

雞的數量(隻)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
羊的數量(隻)	12	11	10	9	8	7	6	5	4
雞腳+羊腳(隻)	48	46	44	42	40	38	36	34	32

圖示



12隻雞
24隻腳
40-
24=16
少16隻
腳

從算術 (Airthmetic) 走向代數 (Algebra) ?!

Step1: 設羊有 y 隻

則雞有 $(12-y)$ 隻

Step2: 依題意

$$2 \times (12-y) + 4 \times y = 40$$

Step3: 解一元一次方程式

$$2 \times 12 - 2 \times y + 4 \times y = 40$$

$$24 + 4 \times y - 2 \times y = 40$$

$$4 \times y - 2 \times y = 40 - 24$$

$$(4 - 2) \times y = 16$$

$$2 \times y = 16 \quad \therefore y = 8$$

答: 8隻羊, 4隻雞

列算式

都先當雞

$$12 \times 2 = 24$$

$$40 - 24 = 16$$

$$16 \div (4 - 2) = 8$$

$$12 - 8 = 4$$

答:

8隻羊,

4隻雞



Jump? 跳躍伸展題!

- 100位和尚吃100個饅頭。
- 大和尚一人吃3個，
- 小和尚3人吃一個。
- 求大、小和尚各多少位？

ANS:

大和尚有25位，
小和尚有75位

怪物同籠

- 怪物**A**（**2頭4腿**）和怪物**B**（**3頭6腿**）
- 同籠共**28頭 56 條腿**，
- 怪物**A**和怪物**B**各有幾隻？

Cramer's Rule

For the equations:

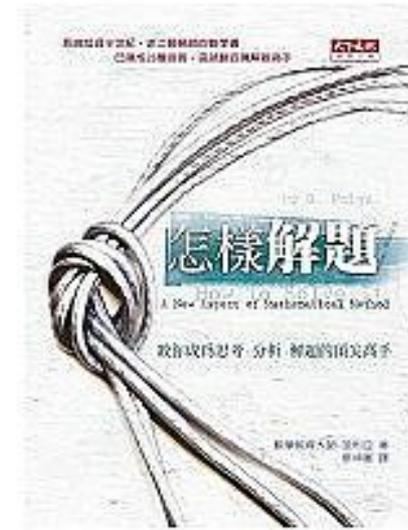
$$ax + by = e$$

$$cx + dy = f$$

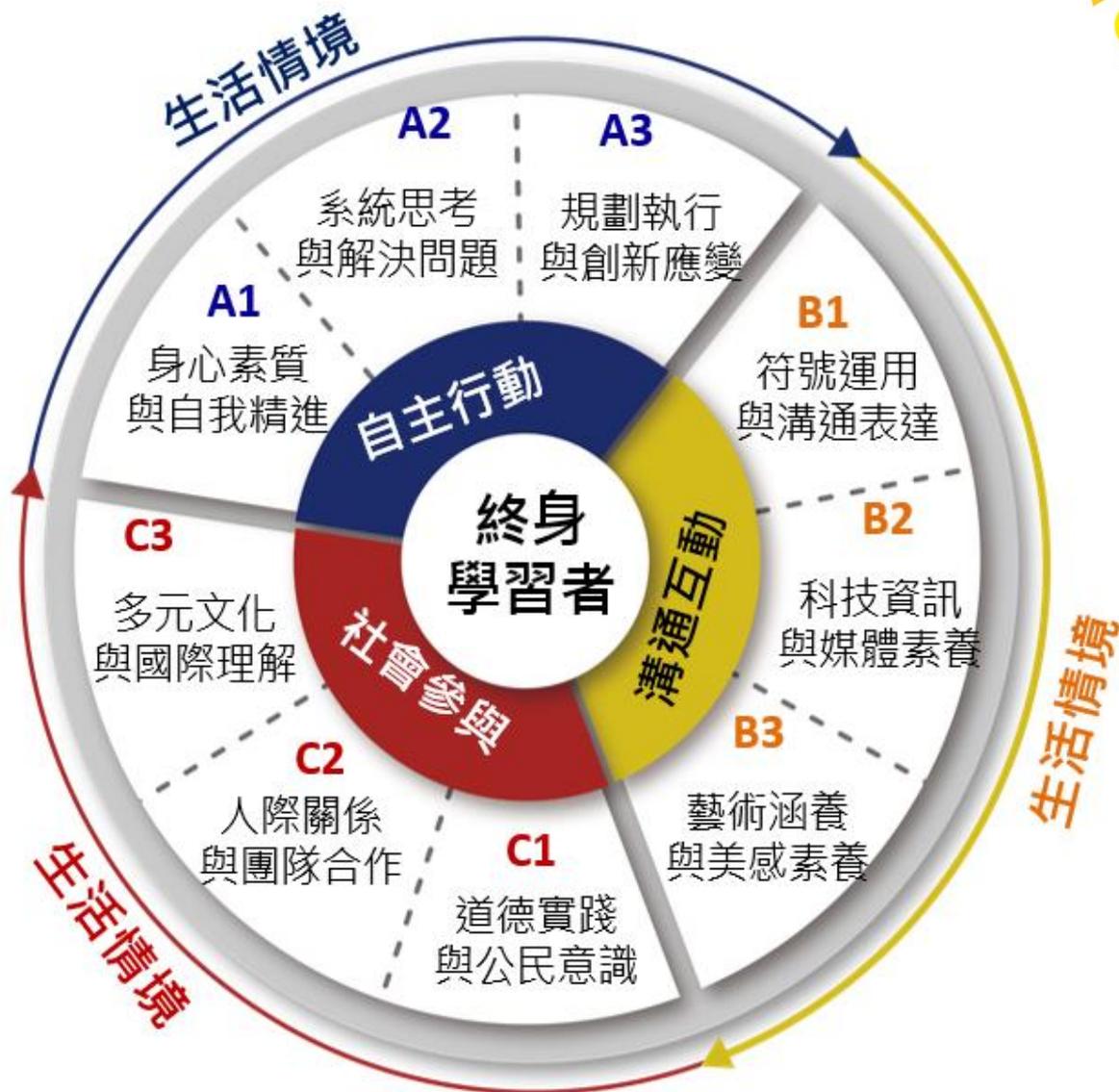
$$x = \frac{\begin{bmatrix} e & b \\ f & d \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} \quad y = \frac{\begin{bmatrix} a & e \\ c & f \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}, \text{ where } \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \neq 0$$

Polya, G. (1945). How to solve it : A new aspect of mathematical method. NJ: Princeton University Press. (中譯本:蔡坤憲譯2006 怎樣解題, 台北市:天下遠見)

- 了解問題、
- 擬定計畫、
- 執行計畫、
- 回顧過程
(驗算、檢討)
後設認知
<元認知> {認知的認知}
Metacognition



十二年國教--核心素養



ASK!!!

課程發展以**核心素養**做為主軸，它是指一個人為適應現在生活及面對未來挑戰，所應具備的

- 知識 (**K**nowledge)、
- 能力 (**S**kill) 與
- 態度 (**A**ttitude)

總綱 核心素養 項目	總綱核心素養 項目說明 ◆ 面向 A：自主行動	數學領域核心素養具體內涵 國民小學教育 (E)
A1 身心素質與自我精進	具備身心健全發展的素質，擁有合宜的人性觀與自我觀，同時透過選擇、分析與運用新知，有效規劃生涯發展，探尋生命意義，並不斷自我精進，追求至善。	數-E-A1 具備 喜歡數學 、對數學世界好奇、有積極 主動的學習 態度，並能將 數學語言 運用於日常生活中。
A2 系統思考與解決問題	具備問題理解、思辨分析、推理批判的系統思考與後設思考素養，並能行動與反思，以有效處理及解決生活、生命問題。	數-E-A2 具備 基本 的算術操作 能力 ，並能指認基本的形體與相對關係，在日常生活情境中，用 數學表述與解決問題 。
A3 規劃執行與創新應變	具備規劃及執行計畫的能力，並試探與發展多元專業知能、充實生活經驗，發揮創新精神，以因應社會變遷、增進個人的彈性適應力。	數-E-A3 能觀察出日常生活問題和數學的關聯，並能嘗試與 擬訂解決問題的計畫 。在解決問題之後，能轉化數學解答於日常生活的 應用 。

◆面向 B：溝通互動

國民小學教育(E)

B1
符號運用與溝通
表達

具備理解及使用語言、文字、數理、肢體及藝術等各種符號進行表達、溝通及互動，並能了解與同理他人，應用在日常生活及工作上。

數-E-B1

具備日常語言與數字及算術符號之間的轉換能力，並能熟練操作日常使用之度量衡及時間，認識日常經驗中的幾何形體，並能以符號表示公式。

B2
科技資訊與媒體
素養

具備善用科技、資訊與各類媒體之能力，培養相關倫理及媒體識讀的素養，俾能分析、思辨、批判人與科技、資訊及媒體之關係。

數-E-B2

具備報讀、製作基本統計圖表之能力。

B3
藝術涵養與美感
素養

具備藝術感知、創作與鑑賞能力，體會藝術文化之美，透過生活美學的省思，豐富美感體驗，培養對美善的人事物，進行賞析、建構與分享的態度與能力。

數-E-B3

具備感受藝術作品中的數學形體或式樣的素養。

總綱核心素養項目	總綱核心素養項目說明 ◆面向C：社會參與	數學領域核心素養具體內涵
C1 道德實踐與公民意識	具備道德實踐的素養，從個人小我到社會公民，循序漸進，養成社會責任感及公民意識，主動關注公共議題並積極參與社會活動，關懷自然生態與人類永續發展，而展現知善、樂善與行善的品德。	國民小學教育 (E) 數-E-C1 具備從 證據 討論事情，以及和他人有條理 溝通 的態度。
C2 人際關係與團隊合作	具備友善的人際情懷及與他人建立良好的互動關係，並發展與人溝通協調、包容異己、社會參與及服務等團隊合作的素養。	數-E-C2 樂於與他人 合作 解決問題並 尊重 不同的問題解決想法。
C3 多元文化與國際理解	具備自我文化認同的信念，並尊重與欣賞多元文化，積極關心全球議題及國際情勢，且能順應時代脈動與社會需要，發展國際理解、多元文化價值觀與世界和平的胸懷。	數-E-C3 具備 理解與關心多元 文化或語言的數學表徵的素養，並與自己的語言文化 比較 。

國教院提出—素養導向教學四大原則

參照各領域/科目之核心素養、學習重點



整合知識、
技能
與態度

情境脈絡
化的學習

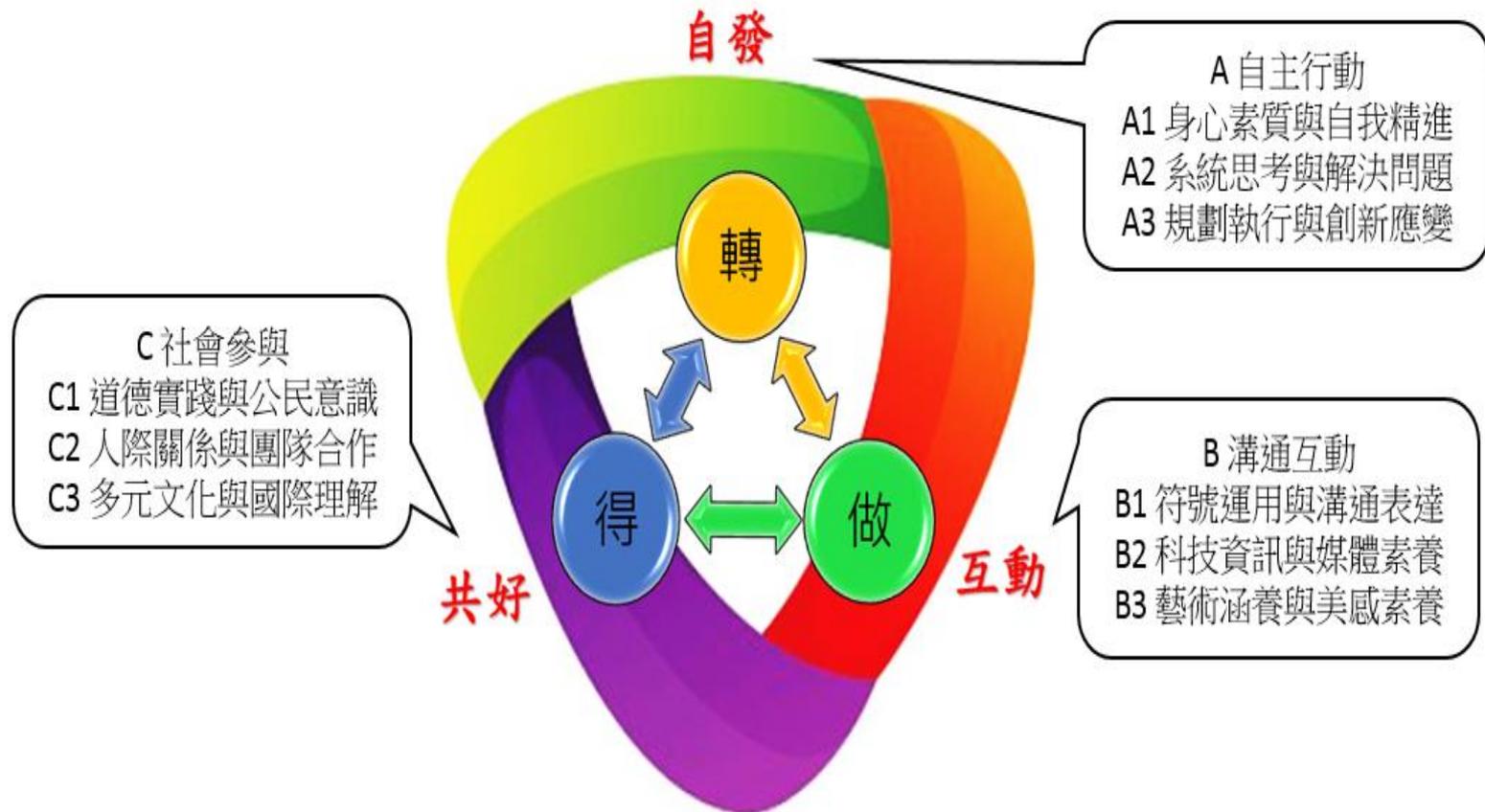
學習方法
及策略

活用實踐
的表現



新北市國教輔導團國小數學領域 素養導向課程與教學設計要點

依據國教院提出素養導向教學的四大原則，綜合數學領綱核心素養，以達成「自發」、「互動」及「共好」之課程理念，進而提出國小數學領域素養導向課程設計要點示意圖如下：





數學領域素養導向課程與教學設計

一上西主

數學素養導向課程設計要點

自發

1. 情境問題轉化
2. 新舊經驗銜接
3. 數學概念聯結

轉

1. 思考能力提升
2. 解題態度培養
3. 共同學習增能

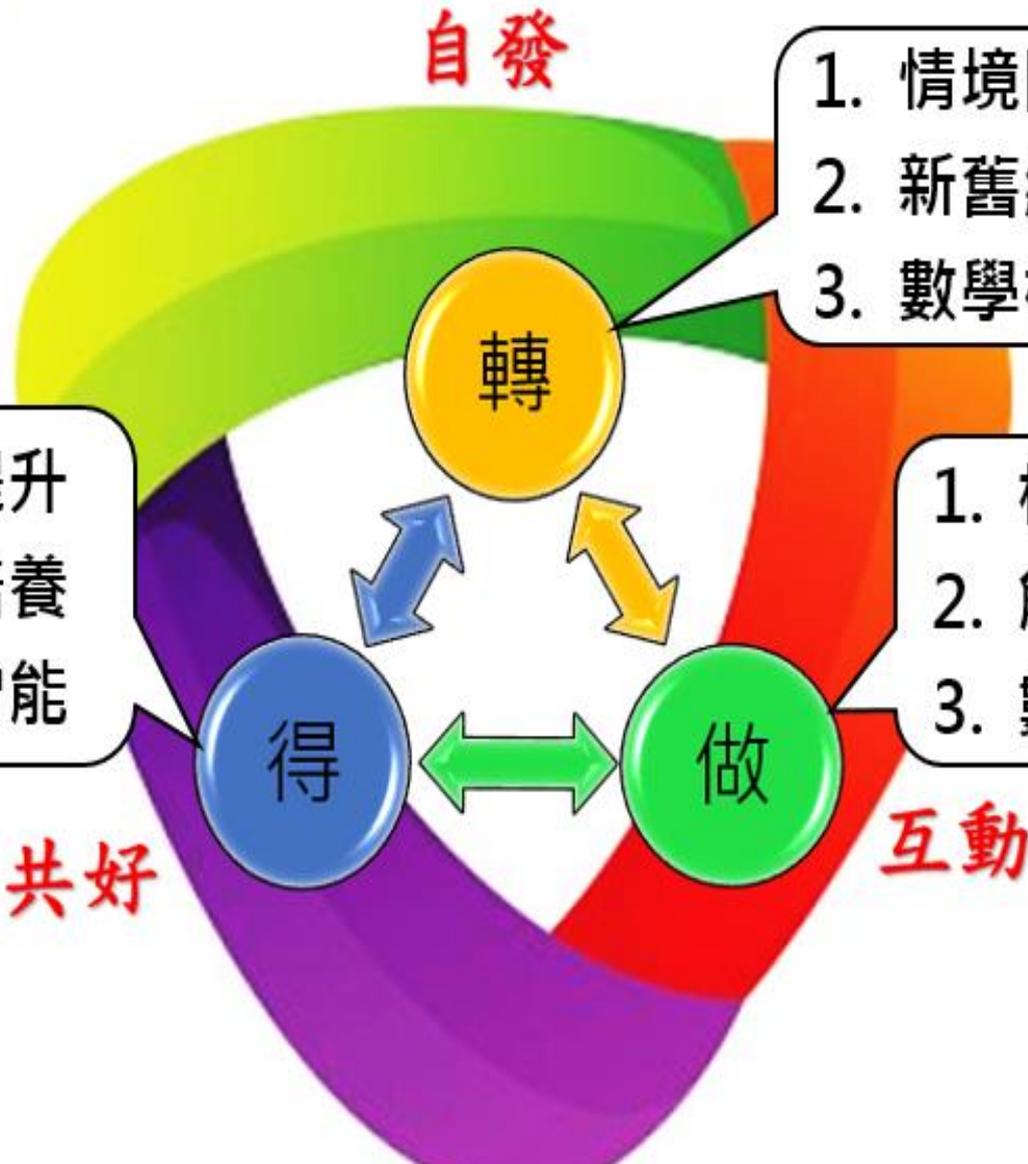
得

做

1. 概念操作理解
2. 解題策略探究
3. 數學語言溝通

共好

互動





數學領域素養導向課程與教學設計

三大要素

數學素養導向課程設計要點

轉 (Transfer)

轉化

1. 情境問題轉化-察覺生活情境脈絡中的待解問題，把情境中與數學相關的資料資訊化，轉化成數學的問題，並以數學語言表達之。
2. 新舊經驗銜接-連結舊經驗轉化為新的概念或知識，用以解決新的問題。
3. 數學概念聯結-將數學不同的表現類別(數與量、空間與形狀、關係、資料與不確定性)間有效進行內部之間的轉化連結。

奠基

連結

做

(Do)

操作

1. 概念操作理解-透過可使用的資源或工具，以及合適的數學表徵，進行操作活動，去理解數學概念，並熟練程序，用以解決待解之問題。
2. 解題策略探究-熟悉解題的各種歷程和運用解題的各種方法，進行探究並解決問題。
3. 數學語言溝通-解題過程中與他人互動合作討論，說明解題的過程，並精確使用理性溝通所必需的數學語言(含符號、用語、圖表、非形式化演繹等)。

探究、操作

得

(Gain)

獲得

1. 思考能力提升-由解題的結果重新審視原情境，說明或反駁解答的合理性，並評析解法的優缺點、提升數學思考的能力。
2. 解題態度培養-培養堅持不懈地探索以及解題成功的成就感，提升學習數學的興趣。
3. 共同學習增能-尊重、欣賞並分享多元、彈性與創新的角度解決數學問題的想法，進而感受數學之美。

合作、互動、發表、溝通



目 錄

編者的話	1
推薦序/鍾靜教授	3
國小數學領域素養導向課程與教學設計書系/新北市國小數學師學會	5
做「轉」、實「做」、共「得」: 與國小數學老師的相好互學/張麗雲教授	8
數學素養導向教學活動設計系列	
【低年級】	
一年級-數與量-認識加法算式/孫心怡	17
一年級-資料與不確定性-分類與整理、畫記/廖淑華	23
二年級-數與量-二位數加法/蔡維安、江麗瑋	31
二年級-數與量-乘法與分數/鄭惠娟	38
二年級-數與量-公式的實測與估測/馬怡宏	47
二年級-空間與形體-圓形的認識/張智宏	58
【中年級】	
四年級-資料與不確定性-數據在發展/馬怡宏	67
【高年級】	
五年級-數與量-測量情境中分數為整數相除結果的意義/孫心怡	79
五年級-數與量-通分與分數的意義/溫世英	87
六年級-空間與形體-認識圓錐形/孫心怡	87

數學過程(NCTM,2000)/連結指標(教育部，2003)

數學化之歷程 (*mathematicalizing*)

- 解題
- 推理與證明
- 溝通
- 聯結
- 表徵

- 覺察 R
- 轉化 T
- 解題 S
- 溝通 C
- 評估 E

美國NRC定義 數學素養 / 五股能力

(Kilpatrick et al. ,NRC, 2001)

- 概念的瞭解 (Conceptual understanding)
- 程序的流暢 (Procedural fluency)
- 策略的運用 (Strategic competence)
- 適性的推理 (Adaptive reasoning)
- 建設性的意向 (Productive disposition)

學校數學課程目標：

(Goals & Objectives)

為什麼學校有數學課程？

- 數學素養 (**Mathematical Literacy**)
(Numeracy)
- 數學功力 (**Mathematical Power**)
- 數學能力/數學力 (**Mathematical Competence**)
- 數學精熟 (**Proficiency in Mathematics**)

《幫孩子找到自信的 成長型數學思維：

學好數學不必靠天賦，史丹佛大學實證研究、讓孩子潛力大爆發的關鍵方法》

MATHEMATICAL MINDSETS: Unleashing Students' Potential through Creative Math, Inspiring Messages and

Innovative Teaching (Jo Boaler

- 原文作者：[Jo Boaler](#)
- 譯者：[畢馨云](#)
- 出版社：[臉譜](#)
- 出版日期：2019/01/05



理念（理想與信念）

數學是有用的! 數學無所不在!

~~動『手』、用『腦』、『玩』數學!~~

人本數學...

『台灣數學』 M.I.T.

(Mathematics In Taiwan)

- 教得有感覺
- 學得有意義

To Learn Math from the Kids!

如何向孩子學習數學?



Mathematics is the science of patterns and order.

數學是一門樣式和秩序的科學



最美夕陽 之一。

關山夕照美冠全球！



歡迎加入

數學領域專業學習社群

(Math-PLC) (Professional Learning Community)

共同學習 \leftrightarrow 樂於教學

Learning Together, Enjoying Teaching

- 數學知識
- 教學知識
- 學生知識
- 數學教學知識
- 數學教學

專業論辯能力

- 太魯閣砂卡噹步道，榮膺全球十大必遊景點

[http://forestlife.info/Onair/096.h](http://forestlife.info/Onair/096.htm)

t

NTUE d

NTUE c



《跨年級教學實務手冊》(2018-04) 洪儷瑜等 作；梁雲霞，陳淑麗主編。臺北市：師大。

- Multigrade class
- Multi-level instruction
- Composite instruction
- Vertical group
- Family class
- ...
- Mix-age class
- Multi-age class
- Composite class
- ...
- 同一個課室？
- 不同年齡？
- 不同年級？
- 不同課程目標？
- 不同教學主題？
- . . .
- 課程設計與教學實務
- 教育目標與學科本質
- 理論與實務

做就對了！ Just do it ！



省思行動: 信賴+合作=協力

□ 共識

□ 共事

□ 共力

□ 學校寧靜

□ 自然對話

□ 相互學習

□ 相互傾聽

□ 相互回響

慈悲喜捨 / 平安喜樂



做就對了！

Just do it !

有
心
+

用 心

+

耐 心

>>>

信 心



NTUE dr.ijchang@gmail.com
NTUE dr.ijchang@gmail.com