

# 108學年度新北市國小五年級數學能力檢測

## 選擇題試題分析

109 年 9 月

# 目 次

第 1 題 5-n-06.....	1
第 2 題 5-n-15.....	8
第 3 題 5-n-15.....	13
第 4 題 5-n-12.....	19
第 5 題 5-n-14.....	25
第 6 題 5-a-03.....	32
第 7 題 5-n-17.....	39
第 8 題 5-n-05.....	47
第 9 題 5-n-19.....	54
第 10 題 5-n-20 .....	59
第 11 題 5-s-05.....	65
第 12 題 5-n-11 .....	71
第 13 題 5-a-02.....	78
第 14 題 5-n-10 .....	85
第 15 題 5-n-09 .....	92
第 16 題 5-s-04.....	99
第 17 題 5-n-03 .....	103
第 18 題 5-n-07 .....	109
第 19 題 5-n-01 .....	118
第 20 題 5-n-21 .....	124
第 21 題 5-s-05.....	130
第 22 題 5-n-16 .....	135
第 23 題 5-n-02 .....	142
第 24 題 5-a-04.....	149
第 25 題 5-a-01.....	154
第 26 題 5-n-08 .....	161
第 27 題 5-n-13 .....	169
第 28 題 5-n-04 .....	176

第 1 題 5-n-06

知識向度	數與計算	認知向度	概念理解				
對應分年細目	5-n-06 能以約分、擴分的方式找到等值分數。						
題目	$\left[ \frac{6}{10} = \frac{9}{(\quad)} \right]$ ，括號中的答案是下列哪個選項？ ①5 ②13 ③15 ④30						
答題表現 選項分析	選 項	1	2	3	4	其他	答案：3
	選項率	0.04	0.16	0.64*	0.16	0.00	鑑別度：0.67
	高分組	0.00 <sup>+</sup>	0.03	0.94	0.03	0.00	難易度：0.60
	低分組	0.12	0.32	0.27	0.30	0.00	
							<sup>+</sup> 代表數值不等於 0

一、試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.67，通過率為 0.64，難易度 0.6。

(二) 評量目標說明

本題旨在評量學童是否能以約分、擴分的方式找到非整數倍的等值分數。

(三) 選項表現說明

- 有 64% 的學生選擇選項③，此一部分的學生能先進行約分知道  $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ ，再進行擴分知道  $\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$ ，最後求得括號內的正確答案應為 15。
- 有 16% 的學生選擇選項②，這些學生發現兩個分數的分子都差 3，所以誤以為將分子分母同加一數為等值分數，即  $\frac{6}{10} = \frac{6+3}{10+3} = \frac{9}{13}$ ，最後求得括號內的答案為 13。
- 有 16% 的學生選擇選項④，這些學生發現兩個分數的分子都差 3，在計算時，誤把分子 6「+3」=9 想成「×3」，所以分母 10「×3」=30，即  $\frac{6}{10} = \frac{6+3}{10 \times 3} = \frac{9}{30}$ ，最後求得括號內的答案為 30。
- 有 4% 的學生選擇選項①，這些學生能進行約分知道  $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ ，但進行擴分時僅處理分子 ×3，分母未一起擴分，即  $\frac{6}{10} = \frac{3}{5} = \frac{3 \times 3}{5} = \frac{9}{5}$  最後求得括號內的答案為 5。

(四) 學生表現說明

- 學生在面對等值分數的試題時，若遇到非整數倍的問題，常會出現錯誤情況，有時用加法、或是乘法與加法混用，因此本命題設計希望了解學生以約分、擴分的方式找到等值分數的概念是否完備。

2.本題通過率為 64%。將近約六成四的學生能以約分、擴分的方式找到等值分數，但仍有近三成六的學生無法正確以約分、擴分的方式找到等值分數。從高分組與低分組學生的表現來看，94%的高分組學生能正確回答問題，表示高分組學生已能熟練以約分、擴分的方式找到等值分數，而低分組學生僅有 27%回答正確，其中選項②、④兩選項都超過 30%，顯示低分組學生對於以約分、擴分的方式找到等值分數，大多未能充分了解，而誤用數字求得答案。

## 二、教材地位分析

### 97 課綱（分年細目）

#### （一）評量重點

5-n-06 能用約分、擴分處理等值分數的換算。

#### （二）先備的知識

4-n-09 能認識等值分數，進行簡單分母分數的比較，並用來做簡單分數與小數的互換。

#### （三）延伸的知識

5-n-07 能用通分做簡單異分母分數的比較與加減。

5-n-08 能理解分數乘法的意義，並熟練其計算，解決生活中的問題。

### 十二年國教課綱（學習內容）

#### （一）評量重點

N-5-4 異分母分數：用約分、擴分處理等值分數並做比較。用通分做異分母分數的加減。養成利用約分化簡分數計算的習慣。

#### （二）先備的知識

N-4-6 等值分數：由操作活動中理解等值分數的意義。簡單異分母分數的比較、加、減的意義。簡單分數與小數的互換。

#### （三）延伸的知識

N-5-5 分數的乘法：整數乘以分數、分數乘以分數的意義。知道用約分簡化乘法計算。處理乘積一定比被乘數大的錯誤類型。透過分數計算的公式，知道乘法交換律在分數也成立。

## 三、教學建議

#### （一）評量核心概念

能以約分、擴分的方式找到非整數倍的等值分數。

#### （二）學生常見的錯誤類型／迷思概念

1.給定分數的分子和指定分數的分子的數值不成整數倍關係：例如： $\frac{6}{10} = \frac{9}{( )}$ ，學生可能先將 $\frac{6}{10}$ 化為最簡分數 $\frac{3}{5}$ 後，再進行擴分的換算。但擴分時容易因為概念不清楚而產生計算錯誤，如：學生發現兩數的分子差 3，因此認為分子分母同加 3 就能求得答案；也可能是學生發現兩數的分子差 3，因此僅乘上兩個分數分子間所找出的倍數關係而求得答案；

也可能是未能觀察兩分數間的關係以約、擴分來處理，因此將分子分母分開進行不同的運算而求得答案。

**2. 不理解擴(約)分的換算方法：**分子和分母並非同乘(除)一個整數，而任意列其因倍數

當作等值分數。：例如： $\frac{8}{12} = \frac{16}{36}$ ， $\frac{8}{12} = \frac{2}{4}$ 。

**3. 混淆擴分與約分：**不理解擴分的意義，而誤用約分的方法進行擴分的換算。例如： $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ 。

**4. 擴(約)分與分數乘(除)法混淆：**學了分數乘(除)法後，將擴(約)分和分數乘(除)

法的算法混淆，例如：將 $\frac{8}{12}$ 擴分為 $\frac{32}{48}$ (即 $\frac{8}{12} = \frac{8 \times 4}{12 \times 4}$ )時，誤以分數乘法計算為 $\frac{8}{12} \times 4 = \frac{32}{12}$ ；將 $\frac{8}{12}$ 約分為 $\frac{2}{3}$ (即 $\frac{8}{12} = \frac{8 \div 4}{12 \div 4}$ )時，誤以分數除法計算為 $\frac{8}{12} \div 4 = \frac{2}{12}$ 。

**5. 不理解擴分和約分的意義：**在處理帶分數的等值分數時，學生有可能將擴分連結成擴大的含義，因此整數部分也同時乘以整數，而約分連結成縮小的含義，所以整數部分也同時除

以整數。例如：將 $2\frac{4}{5}$ 擴分為 $2\frac{12}{15}$ (即 $2\frac{4}{5} = 2\frac{4 \times 3}{5 \times 3}$ )時，連同整數部分也同乘以整數計算為 $2 \times 3 \frac{4 \times 3}{5 \times 3} = 6\frac{12}{15}$ ；將 $15\frac{5}{10}$ 約分為 $15\frac{1}{2}$ (即 $15\frac{5}{10} = 15\frac{5 \div 5}{10 \div 5}$ )時，連同整數部分也同除乘以整數為 $15 \div 5 \frac{5 \div 5}{10 \div 5} = 3\frac{1}{2}$ 。

### (三) 核心概念的教學重點

學生學習擴分與約分的方法找出等值分數時，先要有完整的理解等值分數的概念，才能學習使用擴分與約分的方法快速地找出分數的等值分數，否則會有上述的錯誤類型和迷思概念產生。

**1. 穩固等值分數的概念：**複習簡單等值分數的概念，例如： $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$ ，並透過具體物

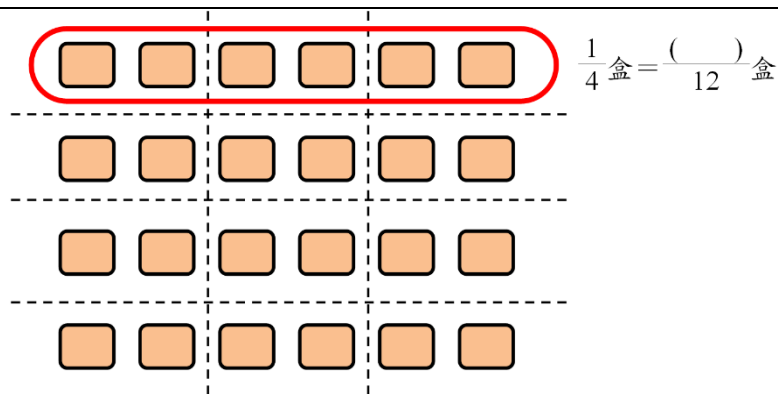
或圖形表徵(必須是精準的比例，可善用電腦繪製或教具圓形分數板或長條分數板輔助教學)解說等值分數的概念，並請學生實際操作疊合看看是否一樣大。讓學生透過具體物或圖像表徵觀察發現：互為等值分數的分數有不同的「等分割」及可再「合成」其數份的數量，但其值或量是一樣大的，藉此穩固等值分數的概念。

**2. 經驗擴分的意義：**以真實情境引導學生經驗並理解擴分所代表的意義。

(1) 將單位分數轉換為指定分母的等值分數：以「24顆巧克力裝成一盒， $\frac{1}{4}$ 盒和 $\frac{(\quad)}{12}$ 盒一樣多？」為例，學生可能的解題策略：

**A. 以內容物的觀點進行解題活動：**學生先決定 $\frac{1}{4}$ 盒是6顆巧克力，再決定 $\frac{(\quad)}{12}$ 盒有6顆巧克力。因题目的指定分母是12，表示一盒巧克力要做12等分割，而一小份為2顆，因此6顆巧克力就是 $\frac{3}{12}$ 盒。

**B. 由等分割份數的觀點進行解題活動：**如【圖 1-1】，12恰好是4的整數倍，因此可以將 $\frac{1}{4}$ 所表示的整體橫切的4等份，每一份再縱切平分分成3小份，也就是 $4 \times 3 = 12$ 小份，而原本4等份的每一份也變成 $1 \times 3 = 3$ 小份，也就得到 $\frac{3}{12}$ 的解答。



【圖 1-1】

由 $\frac{1}{4}$ 的分子、分母同乘以 3 得到等值分數 $\frac{3}{12}$ ，就是擴分。教師可以多布類似情境題，讓學生多累積擴分的經驗。而分數的分母從是整數倍到不是整數倍的練習。引導學生對找等值分數的歷程，看見離散量情境擴分或約分計算的法則。

- (2) **連續量情境，將分數轉換為指定分母的等值分數**：因為分母是整數倍的例題如上所介紹大同小異，此部分舉例不成整數倍的問題。

以「 $\frac{2}{8}$ 個披薩和 12 分之多少個披薩一樣大？和 4 分之多少個披薩一樣大？」為例，由等分割份數的觀點進行解題活動：學生從操作圓形分數片中經驗 $\frac{2}{8}$ 的圓和分成 12 等分的圓疊在一起，發現 $\frac{2}{8}$ 和 $\frac{3}{12}$ 一樣大，記作 $\frac{2}{8} = \frac{3}{12}$ ； $\frac{2}{8}$ 個圓和 $\frac{1}{4}$ 個圓一樣大，記作 $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ 。由 $\frac{2}{8}$ 的分子、分母同除以 2 得到等值分數 $\frac{1}{4}$ ，再分子、分母同乘以 3 得到等值分數 $\frac{3}{12}$ ，就是分母不為整數倍的擴分。

- (3) **離散量情境，帶分數轉換成指定分母的等值分數**：以「12 顆乒乓球裝成一盒， $1\frac{1}{3}$ 盒和 6 分之多少盒一樣多？」為例，學生可能的解題策略：

A. 將帶分數看成整數與分數兩部分的合成結果，先處理分數部分，把單位分數或真分數表示成指定分母的等值分數後，再加上原先的整數部分，以獲得新的等值帶分數，而本題的做法是把 $1\frac{1}{3}$ 看成是 1 和 $\frac{1}{3}$ 的合成結果，再決定 $\frac{1}{3}$ 轉換成等值分數 $\frac{2}{6}$ ，新的等值分數就是 $1\frac{2}{6}$ 。

B. 學生也可能將帶分數先化為假分數，再比照將真分數轉換為指定分母等值分數的方式，進行解題活動。如本題把 $1\frac{1}{3}$ 轉換成 $\frac{4}{3}$ ，將 $\frac{4}{3}$ 轉換成等值分數 $\frac{8}{6}$ ， $\frac{8}{6}$ 再轉換為帶分數 $1\frac{2}{6}$ 。由 $\frac{1}{3}$ 的分子、分母同乘以 2 得到等值分數 $\frac{2}{6}$ ，再加上原先的整數部分就是帶分數的擴分。

### 3. 介紹擴分與約分的名詞

- (1) 擴分是指把分數的分母和分子同乘一個大於 1 的整數，而得到一個分割份數變多的等值分數的方法。
- (2) 約分是指把分數的分母和分子同除以大於 1 的公因數，而得到一個分割份數變少的等值

分數的方法。

(3) 從概念理解進入程序性知識，學生多練習以熟練用擴(約)分找等值分數的方法。

#### (四) 本題教學的加強重點

本題的重點在評量學生是否能以擴分或約分的方式找出其等值分數。等值分數的意義在表示雖然實物樣式不同，但其值一樣大，不論是擴分或約分並不會影響分數數值的大小。本題的解題可提醒學生要先將 $\frac{6}{10}$ 約分化為最簡分數 $\frac{3}{5}$ 後，再依據題目給的條件擴分後「分子為9」進行擴分的換算，即 $\frac{6}{10} = \frac{6 \div 2}{10 \div 2} = \frac{3}{5}$ ， $\frac{3}{5} = \frac{3 \times 3}{5 \times 3} = \frac{9}{15}$ 。

綜合以上，學生需要多一些擴分和約分的活動經驗，建議教師在教學上能透過圓形分數板或長條分數板加強擴分和約分的具體操作以鞏固等值分數概念，也需要熟練擴分和約分的程序性知識，自然就能隨時掌握分子和分母同乘(除)以一整數不改變其值的概念。

#### 四、命題建議

本題評量的核心在測驗學生能用擴分與約分的方法找出等值分數，教師在命題時建議考慮以下幾點：

(一) 分數的類型:包含真(假)分數及帶分數等類型，例如： $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ ； $\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$ ； $1\frac{2}{3} = 1\frac{4}{6}$ 。

(二) 運算的類型:包含擴分型和約分型，例如： $1\frac{2}{3} = 1\frac{4}{6}$ ； $2\frac{6}{15} = 2\frac{2}{5}$ 。

(三) 分母間的倍數:從整數倍到非整數倍，例如： $\frac{3}{8} = \frac{6}{16}$ ； $\frac{6}{10} = \frac{9}{15}$ 。

(四) 題型的種類：可用圖形表徵(圓形分數板或長方形分數板)、裸題或生活情境題等類型來命題。

## 五、歷年檢測題目參考

### (一) 104 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

下列哪一個選項的數值，是由「 $1\frac{2}{3}$ 」擴分而成？

①  $\frac{5}{3}$   
 ②  $2\frac{2}{3}$   
 ③  $1\frac{4}{6}$   
 ④  $2\frac{4}{6}$

選 項	1	2	3	4	其他	答 案：3
選項率	0.25	0.04	0.52*	0.19	0.01	鑑別度：0.59 難易度：0.52
高分組	0.06	0.00	0.82	0.11	0.00	
低分組	0.47	0.10	0.23	0.20	0.01	

### (二) 105 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

一杯奶茶由紅茶和牛奶調配而成，紅茶占全部的 $\frac{9}{15}$ ，牛奶占全部的 $\frac{6}{15}$ ，這杯奶茶與下列哪一個選項的調配方式相同？

① 300 毫公升的奶茶裡含有 180 毫公升的紅茶  
 ② 250 毫公升的奶茶裡含有 100 毫公升的紅茶  
 ③ 150 毫公升的奶茶裡含有 30 毫公升的牛奶  
 ④ 90 毫公升的奶茶裡含有 60 毫公升的牛奶

選 項	1	2	3	4	其他	答 案：1
選項率	0.43*	0.14	0.17	0.25	0.00	鑑別度：0.48 難易度：0.47
高分組	0.71	0.07	0.06	0.16	0.00	
低分組	0.23	0.21	0.25	0.30	0.00	

(三) 106 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

下列選項何者是  $\frac{15}{39}$  的等值分數？

①  $\frac{51}{93}$   
 ②  $\frac{35}{91}$   
 ③  $\frac{41}{65}$   
 ④  $\frac{2}{26}$

選 項	1	2	3	4	其他	答案：2
選項率	0.16	0.53*	0.13	0.14	0.00	鑑別度：0.53 難易度：0.56
高分組	0.08	0.83	0.05	0.05	0.00	
低分組	0.22	0.30	0.23	0.25	0.00	

(四) 107 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

下列哪個分數是  $10\frac{15}{20}$  的等值分數？

①  $2\frac{3}{4}$     ②  $10\frac{7}{16}$     ③  $10\frac{21}{28}$     ④  $20\frac{30}{40}$

選 項	1	2	3	4	其他	答案：3
選項率	0.24	0.09	0.34	0.33	0.00	鑑別度：0.6 難易度：0.42
高分組	0.08	0.03	0.72	0.17	0.00	
低分組	0.35	0.15	0.12	0.38	0.00	

第 2 題 5-n-15

知識向度	量與實測	認知向度	程序執行																												
對應分年細目	5-n-15 能解決時間的乘除計算問題																														
題目	小明一星期練習籃球 4 天，每天練習 2 時 10 分，7 個星期共練習多久時間？ ① 1 日 0 時 40 分 ② 2 日 12 時 40 分 ③ 1 日 46 時 10 分 ④ 4 日 6 時 10 分																														
答題表現 選項分析	<table border="1"> <thead> <tr> <th>選 項</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> <th>其他</th> <th>答案：2</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>選項率</td> <td>0.17</td> <td>0.64*</td> <td>0.06</td> <td>0.13</td> <td>0.00</td> <td>鑑別度：0.48 難易度：0.62</td> </tr> <tr> <td>高分組</td> <td>0.11</td> <td>0.86</td> <td>0.01</td> <td>0.02</td> <td>0.00</td> <td></td> </tr> <tr> <td>低分組</td> <td>0.17</td> <td>0.38</td> <td>0.18</td> <td>0.28</td> <td>0.00</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：2	選項率	0.17	0.64*	0.06	0.13	0.00	鑑別度：0.48 難易度：0.62	高分組	0.11	0.86	0.01	0.02	0.00		低分組	0.17	0.38	0.18	0.28	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：2																									
選項率	0.17	0.64*	0.06	0.13	0.00	鑑別度：0.48 難易度：0.62																									
高分組	0.11	0.86	0.01	0.02	0.00																										
低分組	0.17	0.38	0.18	0.28	0.00																										

一、試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.48，通過率為 0.64，難易度 0.62。

(二) 評量目標說明

本題是時間的乘法搭配時間的化聚組合的題目。

(三) 選項表現說明

1. 有 64% 的學生選擇正確選項②，顯示有 64% 的學生已經掌握解決時間二階單位乘法問題的能力。並利用題目中的一星期練習 4 天，7 星期共練習 28 天，做乘法直式計算、答案是 2 日 12 時 40 分。選擇選項②
2. 有 17% 的學生選擇選項①，這些學生可能理解題目中的一星期練習 4 天，7 星期共練習 28 天後，但是誤認為 1 日=60 時，而答案是 1 日 0 時 40 分，而選擇選項①。
3. 有 13% 的學生選擇選項④，這些學生可能只看到七星期的練習而忽略一星期有 4 天、直接用每天練習時間乘 49，答案是 4 日 6 時 10 分，而選擇選項④。
4. 有 6% 的學生選擇選項③，這些學生可能只看到七星期的練習而忽略一星期有 4 天、直接用每天練習時間乘 49，且誤認為 1 日有 60 時，答案是 1 日 46 時 10 分而選擇選項③。

$  \begin{array}{r}  \textcircled{2} \quad \text{日} \quad \text{時} \quad \text{分} \\  \quad \quad \quad 2 \quad 10 \\  \times \quad \quad \quad 28 \\  \hline  \quad \quad 56 \quad \cancel{280} \\  + \quad 4 \\  \hline  \quad \cancel{60} \quad 40 \\  2 \quad 12  \end{array}  $	$  \begin{array}{r}  \textcircled{1} \quad \text{日} \quad \text{時} \quad \text{分} \\  \quad \quad \quad 2 \quad 10 \\  \times \quad \quad \quad 28 \\  \hline  \quad \quad 56 \quad \cancel{280} \\  + \quad 4 \\  \hline  1 \quad \cancel{60} \quad 40 \\  1 \text{ 日 } 40 \text{ 分 (誤以為 } 60 \text{ 時} = 1 \text{ 日)}  \end{array}  $
$  \begin{array}{r}  \textcircled{4} \quad \text{日} \quad \text{時} \quad \text{分} \\  \quad \quad \quad 2 \quad 10 \\  \times \quad \quad \quad 49 \\  \hline  \quad \quad 98 \quad \cancel{490} \\  + \quad 8 \\  \hline  \quad \cancel{106} \quad 10 \\  4 \quad 10 \\  \text{(沒看到每星期練習 4 天} \\  \text{而用 7 天)}  \end{array}  $	$  \begin{array}{r}  \textcircled{3} \quad \text{日} \quad \text{時} \quad \text{分} \\  \quad \quad \quad 2 \quad 10 \\  \times \quad \quad \quad 49 \\  \hline  \quad \quad 98 \quad \cancel{490} \\  + \quad 8 \\  \hline  \quad \cancel{106} \quad 10 \\  1 \quad 46 \\  \text{(誤以為 } 60 \text{ 時} = 1 \text{ 日)} \\  \text{沒看到每星期練習 4 天} \\  \text{而用 7 天}  \end{array}  $

#### (四) 學生表現說明

1. 本題的命題設計為主要希望了解學生對於「一星期練習籃球 4 天，...，7 個星期共練習多久時間？」以及「二階直式乘法計算」以及「時間單位的換算」，這些概念是否完全清楚。
2. 本題難易度為 0.62。雖然通過率 64%，顯示有六成的學生能以時間乘法算出時間總量，並進行單位間的化聚等。但仍有近 4 成的學生無法解題。從高分組與低分組學生的表現來看，86% 的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生只有 38% 回答正確。選擇錯誤選項的學生一部分可能雖能進行時間乘法的計算，但不具備 1 日 = 24 時換算的概念，無法進行日、時的時間單位換算，或是沒看到一星期練習 4 次的語句。
3. 選項③中，有「6%」出現。在小學三年級就已經學過時間單位的換算，但高分組還有 1% 選擇，而在低分組更有 18% 選擇。

## 二、教材地位分析

### 97 課綱 (分年細目)

#### (一) 評量重點

5-n-15 能解決時間的乘除計算問題。

#### (二) 先備的知識

3-n-13 能認識時間單位「日」、「時」、「分」、「秒」及其間的關係，並做同單位時間量及時、分複名數的加減計算（不進、退位）。

4-n-13 能解決複名數的時間量的計算問題。

#### (三) 延伸的知識

6-n-12 能認識速度的意義及其常用單位。

### 十二年國教課綱 (學習內容)

#### (一) 評量重點

N-5-16 **解題：時間的乘除問題**。在分數和小數學習的範圍內，解決與時間相關的乘除問

題。

## (二) 先備的知識

N-3-17 時間：「日」、「時」、「分」、「秒」。實測、量感、估測與計算。時間單位的換算。認識時間加減問題的類型。

N-4-13 解題：日常生活的時間加減問題。跨時、跨午、跨日、24 小時制。含時間單位換算。

## (三) 延伸的知識

N-6-7 解題：速度。比和比值的應用。速度的意義。能做單位換算（大單位到小單位）。含不同時間區段的平均速度。含「距離＝速度×時間」公式。用比例思考協助解題。

# 三、教學建議

## (一) 評量核心概念

進行日、時、分、秒相鄰二階單位的複名數時間量乘法計算。

## (二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. 時刻和時間（量）混淆：有關於某一時刻經過多少時間（量）會到哪一個時刻，或兩個時刻間經過多少時間（量）的計算問題，是學童學習困難的教材。學生對「上午 8 時 20 分到下午 1 時 30 分，共經過多少時間？」缺乏概念，容易把這 2 個時刻相加，8 時 20 分 + 1 時 30 分，表示學生對於時間與時刻的觀念不清，所以才會將「共經過多少時間」想成 2 個時刻的相加，也就是「幾時幾分」+「幾時幾分」的計算。

### 2. 時間的乘法問題

(1) 誤把時間單位換算當成是十進位。

$$\begin{array}{r} \text{時} \quad \text{分} \\ 1 \quad 33 \\ \times \quad 4 \\ \hline 4 \quad 132 \\ + \quad 13 \quad 2 \\ \hline 17 \quad 2 \\ \text{下午} \quad 5 \quad 2 \end{array} \quad \rightarrow \text{把 132 分當成 1 小時 32 分}$$

(2) 誤把時間單位換算當成是百進位。

$$\begin{array}{r} \text{時} \quad \text{分} \\ 1 \quad 33 \\ \times \quad 4 \\ \hline 4 \quad 132 \\ + \quad 1 \\ \hline 5 \quad 32 \end{array} \quad \rightarrow \text{把 132 分當成 1 小時 32 分}$$

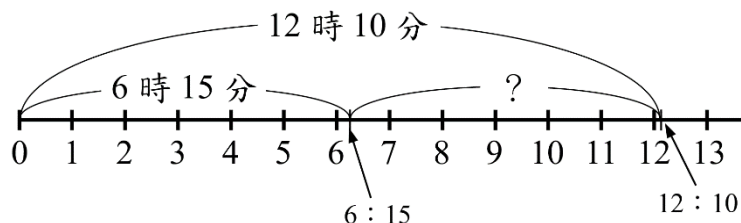
(3) 誤時間單位換日與時部分當成 60 進位。

$$\begin{array}{r} \text{日} \quad \text{時} \quad \text{分} \\ \quad 2 \quad 10 \\ \times \quad \quad 49 \\ \hline \quad 98 \quad 490 \\ + \quad 8 \\ \hline 1 \quad 106 \quad 10 \\ \rightarrow \text{把 106 時當成 1 日 46 時} \end{array}$$

### (三) 核心概念的教學重點

#### 1.時刻和時間(量)的計算問題(配合時間線段圖進行解題)

學童可以在時間直線上標示某時刻，並能瞭解該時刻和表示從9時開始到某時刻所經過的時間量的不同，可將問題利用算式填充題呈現，再配合時間數線說明。例如：6時15分到12時10分經過多少時間？學生在以1小時為單位的時間數線上將問題標示出來，如【圖2-1】：



【圖2-1】

再記成算式填充題：

A型：12時10分－6時15分＝( )時( )分。

B型：6時15分＋( )時( )分＝12時10分。

C型：12時10分－( )時( )分＝6時15分。

學童就時間數線的說明，可能有兩類：一類是「位置經過位移到新位置」的時間觀點，即某時刻加(減)時間量是某某時刻(對應B、C型，也可配合點算)，或二時刻相差一個時間量(對應A型)的說法。一類是「時間量加減」的計算觀點，即將時刻換成從0時間量，對兩個時間量作加法運算(對應B型)或減法運算(對應A、C型)的說法。

#### 2.時間的乘法計算

題目：1時15分×6＝( )時( )分。

解題：1時×6＝6時，15分×6＝90分＝1時30分，6時＋1時30分＝7時30分。

### 四、本題教學的加強重點

- (一) 加強讀題的能力：約有二成的學生沒有看到一星期練習4天而直接用 $7 \times 7 = 49$ 去乘，這對學生成績會有很大的影響。
- (二) 加強基本數學知識：在選項③中有...46時...，在小學三年級的時間單位換算中已經學過了一日＝24時，尤其在低分組還有18%選擇，可見在時與分的化聚仍待加強。
- (三) 熟悉時間的化聚：利用二階直式乘法輔助計算後，加強小單位聚成大單位的換算。

## 五、歷屆試題

### (一) 106 度新北市學生能力檢測五年級數學試題

新北烘焙坊製作一個巧克力蛋糕需要 30 分鐘，在 2 小時 40 分鐘內，最多可以做出多少個？

- ① 8 個
- ② 6 個
- ③ 5 個
- ④ 3 個

選 項	1	2	3	4	其他	答案：3
選項率	0.07	0.09	0.77*	0.06	0.00	鑑別度：0.41 難易度：0.73
高分組	0.01	0.03	0.93	0.02	0.00	
低分組	0.17	0.17	0.53	0.13	0.00	

### (二) 106 度新北市學生能力檢測五年級數學試題

妹妹做一條串珠平均要花 40 分 40 秒，連續做完 3 條串珠已經是下午 1 時 20 分。她從什麼時候開始製作串珠？

- ① 上午 11 時 18 分
- ② 上午 11 時 58 分
- ③ 下午 2 時 42 分
- ④ 下午 3 時 22 分

選 項	1	2	3	4	其他	答案：1
選項率	60.26*	27.12	5.67	4.99	0.00	鑑別度：0.51 難易度：0.59
高分組	84.95	13.37	0.43	1.25	0.00	
低分組	33.76	37.77	16.17	12.29	0.00	

第 3 題 5-n-15

知識向度	量與實測	認知向度	程序執行																												
對應分年細目	5-n-15 能解決時間的乘除計算問題																														
題目	工廠一小時可以製作 60000 根螺絲。工廠收到訂購 3900000 根螺絲的訂單，最少需要多時間才能做完？ ① 1 日 5 時 ② 2 日 17 時 ③ 6 日 5 時 ④ 65 日																														
答題表現 選項分析	<table border="1"> <thead> <tr> <th>選 項</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> <th>其他</th> <th>答案：2</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>選項率</td> <td>0.13</td> <td>0.54*</td> <td>0.19</td> <td>0.14</td> <td>0.00</td> <td>鑑別度：0.61 難易度：0.54</td> </tr> <tr> <td>高分組</td> <td>0.06</td> <td>0.85</td> <td>0.04</td> <td>0.05</td> <td>0.00</td> <td></td> </tr> <tr> <td>低分組</td> <td>0.19</td> <td>0.24</td> <td>0.35</td> <td>0.22</td> <td>0.00</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：2	選項率	0.13	0.54*	0.19	0.14	0.00	鑑別度：0.61 難易度：0.54	高分組	0.06	0.85	0.04	0.05	0.00		低分組	0.19	0.24	0.35	0.22	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：2																									
選項率	0.13	0.54*	0.19	0.14	0.00	鑑別度：0.61 難易度：0.54																									
高分組	0.06	0.85	0.04	0.05	0.00																										
低分組	0.19	0.24	0.35	0.22	0.00																										

一、試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.61，通過率為 0.54，難易度 0.54。

(二) 評量目標說明

本題是時間除法問題，並將商換成日與時的化聚問題。

(三) 選項表現說明

- 有 54% 的學生選擇正確選項②，顯示近五成四的學生已經掌握  $3900000 \div 60000 = 65(\text{時})$ 。65 時=2 日 17 時，而選擇選項②。
- 有 19% 的學生選擇選項③，這些學生可能認為時與日的換算是十進位，而 65 時=6 日 5 時，而選擇選項③。
- 有 14% 的學生選擇選項④，這些學生可能將每小時生產 60000 根螺絲誤以為是每日生產，將商 65 錯認為是 65 日，而選擇選項④。
- 有 6% 的學生選擇選項①，這些學生可能認為時與日的換算是 60 進位，而 65 時=1 日 5 時，而選擇選項①。

(四) 學生表現說明

- 本題的命題設計主要希望了解學生「日與時」的二階單位化聚問題，在小學三年級就已學習過，此題可算是複習。
- 本題難易度為 0.54。雖然通過率 54%，顯示有近一半的學生對於日與時兩階段的化聚能力有待加強。高分組有八成五通過，低分組僅不到 1/4 通過。可見低分組在這觀念上有再澄清與努力的空間。

## 二、教材地位分析

### 97 課綱 (分年細目)

#### (一) 評量重點

5-n-15 能解決時間的乘除計算問題。

#### (二) 先備的知識

3-n-13 能認識時間單位「日」、「時」、「分」、「秒」及其間的關係，並做同單位時間量及時、分複名數的加減計算（不進、退位）。

4-n-13 能解決複名數的時間量的計算問題。

#### (三) 延伸的知識

6-n-12 能認識速度的意義及其常用單位。

### 十二年國教課綱 (學習內容)

#### (一) 評量重點

N-5-16 **解題：時間的乘除問題。**在分數和小數學習的範圍內，解決與時間相關的乘除問題。

#### (二) 先備的知識

N-3-17 **時間：「日」、「時」、「分」、「秒」。**實測、量感、估測與計算。時間單位的換算。認識時間加減問題的類型。

N-4-13 **解題：日常生活的時間加減問題。**跨時、跨午、跨日、24 小時制。含時間單位換算。

#### (三) 延伸的知識

N-6-7 **解題：速度。**比和比值的應用。速度的意義。能做單位換算（大單位到小單位）。含不同時間區段的平均速度。含「距離＝速度×時間」公式。用比例思考協助解題。

## 三、教學建議

#### (一) 評量核心概念

進行日、時、分、秒相鄰二階單位的複名數時間量除法計算。

#### (二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. **將時刻和時間（量）的混淆：**有關於某一時刻經過多少時間（量）會到哪一個時刻，或兩個時刻間經過多少時間（量）的計算問題，是學生學習困難的教材。學生對「上午 8 時 20 分到下午 1 時 30 分，共經過多少時間？」缺乏概念，容易把這 2 個時刻相加，8 時 20 分 + 1 時 30 分，表示學生對於時間與時刻的觀念不清，所以才會將「共經過多少時間」想成 2 個時刻的相加，而進行「幾時幾分」+「幾時幾分」的計算。

2. **時間除法問題的錯誤類型：**時間的除法問題有兩種，第一種是等分除情境的時間除法問題，例如「8 小時 50 分鐘 ÷ 3 = ( ) 小時 ( ) 分鐘... ( ) 分鐘」，第二種是包含除情境的時間除法問題，例如：「14 日 19 時 ÷ 3 日 8 時 = ( ) ... ( ) 日 ( ) 小時」。

##### (1) 等分除情境的時間除法問題

A. **把時間單位換算當成是百進位：**連續二階複名數等分除。

$$\begin{array}{r}
 \text{時} \quad \text{分} \\
 2 \quad 30 \\
 4 \overline{) 9 \quad 20} \\
 \underline{8 \quad \phantom{0}} \\
 1 \quad 20 \quad \rightarrow \text{把 1 時 20 分當成 120 分} \\
 1 \quad 20 \quad \text{所以認為 } 120 \text{ 分} \div 4 = 30 \text{ 分} \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

B.把時間單位換算當成是十進位：連續二階複名數等分除。

$$\begin{array}{r}
 \text{時} \quad \text{分} \\
 1 \quad 3 \\
 8 \overline{) 10 \quad 8} \\
 \underline{8 \quad \phantom{0}} \\
 2 \quad 8 \quad \rightarrow \text{把 2 時 8 分當成 28 分} \\
 2 \quad 4 \quad \text{所以認為 } 28 \text{ 分} \div 8 = 3 \cdots 4 \\
 \hline
 4
 \end{array}$$

C.把時間單位換算當成是百進位：連續二階複名數包含除。

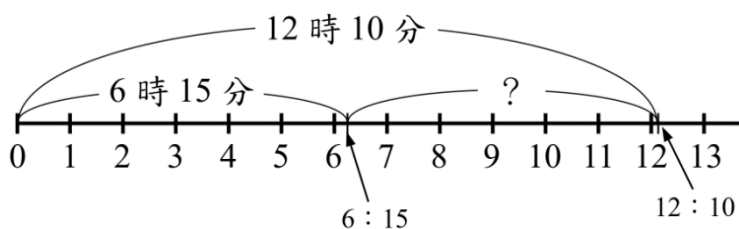
9 時 4 分  $\div$  2 時 26 分 = (      )，學生把 2 時 26 分當成 226 分，把以為 9 時 4 分當成 904 分，誤計算成  $904 \div 226 = 4$ 。

(2) 包含除情境的時間除法問題：此情境的時間除法問題有兩種解題的方法，第一種是將複名數都換成單名數後，利用整數除法直式算則來解題，第二種是利用先乘後減的方法來解題。大部分的學生會使用第一種方法，通常複名數都換成單名數後數字都會變大，而容易在運算整數除法時計算錯誤。另一種錯誤類型則是學生無法理解計算後商的單位。

### (三) 核心概念的教學重點

#### 1.時刻和時間(量)的計算問題(配合時間線段圖進行解題)

學生可以在時間直線上標示某時刻，並能瞭解該時刻和表示從 9 時開始到某時刻所經過的時間量的不同，可讓學生將問題利用算式填充題呈現，再配合時間數線說明。例如：6 時 15 分到 12 時 10 分經過多少時間？學生在以 1 小時為單位的時間數線上將問題標示出來，如【圖 3-1】：



【圖 3-1】

再記成算式填充題：

A 型：12 時 10 分  $-$  6 時 15 分 = (      ) 時 (      ) 分。

B 型：6 時 15 分 + (      ) 時 (      ) 分 = 12 時 10 分。

C 型：12 時 10 分  $-$  (      ) 時 (      ) 分 = 6 時 15 分。

學生就時間數線的說明，可能有兩類：一類是「位置經過位移到新位置」的時間觀點，即某時刻加(減)時間量是某某時刻(對應 B、C 型，也可配合點算)，或二時刻相差一個時間量(對應 A 型)的說法。一類是「時間量加減」的計算觀點，即將時刻換成從 0 時間量，對兩個時間量作加法運算(對應 B 型)或減法運算(對應 A、C 型)的說法。

## 2.時間的除法計算

### (1) 等分除情境的時間除法問題

連續二階複名數等分除問題，可先化為低階單位再計算。例如： $9\text{時}20\text{分}\div 4 = ?$ 應是  $60\text{分}\times 9 + 20\text{分} = 560\text{分}$ ， $560\text{分}\div 4 = 140\text{分}$ ， $140\text{分} = 2\text{時}20\text{分}$ ；或直接用二階單位進行運算，只要掌握二階單位的關係進行化聚，即可用直式除法的舊經驗進行時間的直式除法計算， $9\text{時}\div 4 = 2\text{時}\dots 1\text{時}$ ， $1\text{時}20\text{分}\div 4 = 80\text{分}\div 4 = 20\text{分}$ ， $2\text{時} + 20\text{分} = 2\text{時}20\text{分}$ 。

### (2) 包含除情境的時間除法問題

此情境的時間除法問題有兩種解題的方法，第一種是將複名數都換成單名數後，利用整數除法直式算則來解題，第二種是利用先乘後減的方法來解題。下面以三階單位情境為例，並說明如何幫助學生解題：「機器完成一件成品要3日8時50分，14日19時15分最多可完成幾件成品，剩下多少時間？」

A.將複名數都換成單名數後，利用整數除法直式算則來解題：建議教師依下列步驟幫助學生解題：

步驟一：將複名數3日8時50分及14日19時15分都化為單名數：

$$24\times 3 = 72, 72 + 8 = 80 (\text{時}),$$

$$60\times 80 = 4800, 4800 + 50 = 4850 (\text{分}),$$

$$3\text{日}8\text{時}50\text{分} = 4850 (\text{分}),$$

$$24\times 14 = 336, 336 + 19 = 355 (\text{時}),$$

$$60\times 355 = 21300, 21300 + 15 = 21315 (\text{分}),$$

$$14\text{日}19\text{時}15\text{分} = 21315 (\text{分}).$$

步驟二：算出可完成幾件成品，剩下多少時間：

$$21315\div 4850 = 4 (\text{件}) \dots 1915 (\text{分}),$$

得到可完成4件成品，剩下1915分。

步驟三：將剩下時間單名數分聚成複名數日、時及分：

$$1915\div 60 = 31 (\text{時}) \dots 55 (\text{分}),$$

$$31\div 24 = 1 (\text{日}) \dots 7 (\text{時}),$$

得到1915分 = 1日7時55分。

步驟四：得到最多可以完成4件成品，剩下1日7時55分的答案。

B.利用先乘後減的方法來解題：建議教師依下列步驟幫助學生解題：

步驟一：先估算1件工程要3日8時50分，14日19時15分大約可以完成4件工程。

步驟二：算出完成4件工程要多少間：

$$3\text{日}8\text{時}50\text{分}\times 4 = 13\text{日}11\text{時}20\text{分}。$$

	日	時	分
	3	8	50
×			4
<hr/>			
	12	32	200
	13	11	20

步驟三：算出完成4件工程後還剩下多少時間，

$$14\text{日}19\text{時}15\text{分} - 13\text{日}11\text{時}20\text{分} = 1\text{日}7\text{時}55\text{分}。$$

$$\begin{array}{r}
 \text{日} \quad \text{時} \quad \text{分} \\
 14 \quad 19 \quad 15 \\
 - \quad 13 \quad 11 \quad 20 \\
 \hline
 1 \quad 7 \quad 55
 \end{array}$$

步驟四：得到最多可以完成 4 件成品，剩下 1 日 7 時 55 分的答案。

#### (四) 本題教學的加強重點

##### 1. 強調大數的除法

題目中有「 $3900000 \div 60000$ 」，是以「1」為單位，若能配合以「萬」為單位，可以思考為「390 萬  $\div$  6 萬」而記錄成「 $390 \div 6$ 」。

當大數的除法末尾有“0”的部分可以把一起省略，以題目「 $3900000 \div 60000$ 」，被除數有 5 個“0”而除數有 4 個“0”，若一起刪除 4 個“0”會變成如右圖

$$\begin{array}{r}
 60000 \overline{) 3900000} \qquad \qquad \qquad 60 \overline{) 390}
 \end{array}$$

右邊的直式除法算是比左邊的簡單多了，且計算快又不容易出錯；若能熟練此方式，在注意到「單位量」的轉換後，對於計算速度和正確率可以幫學生增加自信心。

##### 2. 時和日的化聚及記錄

- (1) 解決時間單位由「時」化成「日」的問題：先以時間為某（24 的整數倍）時是幾日的問題，將以分鐘為單位的時間聚成以小時為單位的時間。例如 24 時是 1 日，48 時是 2 日，72 時是 3 日。
- (2) 解決時間單位由「時」化成「日」與「時」的問題：已經知道 30 時是 1 日 6 時，36 時是 1 日 12 時，60 時是 2 日 12 時。65 時是 2 個 24 時和 17 時，所以是 2 日 17 時。 $65 \div 24 = 2 \dots 17 = 2$  日 17 時。
- (3) 解決時間單位由「日」與「時」聚成「時」的問題：已經知道 1 日 6 時是 30 時，1 日 12 時是 36 時，2 日 17 時是 2 個 24 時和 17 時是 65 時， $24 \times 2 + 17 = 65$ 。

#### 四、命題建議

(一) 從「大數的除法」角度來命題。

(二) 時間換算不僅只有「時化成日與時」，可以增加「分化成時與分」、「秒化成分與秒」等變化，甚至可以跨三階的命題。

「如工廠可以製作單位 xxx0000 根螺絲。工廠收到訂購 yyy00000 根螺絲的訂單，最少需要多長時間才能做完？」

## 五、歷屆試題

### (一) 106 度新北市學生能力檢測五年級數學試題

新北烘焙坊製作一個巧克力蛋糕需要 30 分鐘，在 2 小時 40 分鐘內，最多可以做出多少個？

- ① 8 個
- ② 6 個
- ③ 5 個
- ④ 3 個

選 項	1	2	3	4	其他	答案：3
選項率	0.07	0.09	0.77*	0.06	0.00	鑑別度：0.41 難易度：0.73
高分組	0.01	0.03	0.93	0.02	0.00	
低分組	0.17	0.17	0.53	0.13	0.00	

### (二) 106 度新北市學生能力檢測五年級數學試題

妹妹做一條串珠平均要花 40 分 40 秒，連續做完 3 條串珠已經是下午 1 時 20 分。她從什麼時候開始製作串珠？

- ① 上午 11 時 18 分
- ② 上午 11 時 58 分
- ③ 下午 2 時 42 分
- ④ 下午 3 時 22 分

選 項	1	2	3	4	其他	答案：1
選項率	60.26*	27.12	5.67	4.99	0.00	鑑別度：0.51 難易度：0.59
高分組	84.95	13.37	0.43	1.25	0.00	
低分組	33.76	37.77	16.17	12.29	0.00	



$$\begin{array}{r}
 80 \overline{) 726} \\
 \underline{720} \phantom{0} \\
 600 \\
 \underline{560} \\
 400 \\
 \underline{400} \\
 0
 \end{array}$$

3.有 7%的學生選擇選項③，這些學生可能在進行整數除以整數，對小數沒有估算的數感，對於商的小數點位置沒有概念，以致於出現小數除法直式計算中商的小數位置錯誤。

$$\begin{array}{r}
 80 \overline{) 726} \\
 \underline{720} \phantom{0} \\
 600 \\
 \underline{560} \\
 400 \\
 \underline{400} \\
 0
 \end{array}$$

4.有 4%的學生選擇選項④，這些學生可能對小數沒有估算的數感，對於商的位值也無法判斷，且對於小數點位置沒有概念，以致於出現小數除法直式計算中商的小數位置錯誤。

$$\begin{array}{r}
 80 \overline{) 726} \\
 \underline{720} \phantom{0} \\
 600 \\
 \underline{560} \\
 400 \\
 \underline{400} \\
 0
 \end{array}$$

#### (四) 學生表現說明

- 1.本題主要希望了解學生理解題意後，能列出整數除以整數的算式，並經由直式計算正確算出商為三位小數且餘數為零的情形，同時檢視學生能否運用除法(商為三位小數)的計算能力應用於解決日常生活問題。
- 2.本題通過率為 0.72，有七成的學生對於整數除以整數，商為三位小數的計算已能掌握，但仍有三成的學生無法解題。從高分組與低分組學生的表現來看，89%的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生也有 44%回答正確，但仍有 56%的低分組學生及 11%高分組學生對於整數除以整數，商為三位小數的計算技巧未能充分掌握，有待澄清。

## 二、教材地位分析

### 97 課綱 (分年細目)

#### (一) 評量重點

5-n-12 能用直式處理整數除以整數，商為三位小數的計算。

#### (二) 先備的知識

5-n-01 能熟練整數乘、除的直式計算。

### (三) 延伸的知識

6-n-06 能用直式處理小數除法的計算，並解決生活中的問題。

## 十二年國教課綱（學習內容）

### (一) 評量重點

N-5-9 整數、小數除以整數（商為小數）：整數除以整數（商為小數）、小數除以整數的意義。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。能用概數協助處理除不盡的情況。熟悉分母為 2、4、5、8 之真分數所對應的小數。

### (二) 先備的知識

N-4-6 等值分數：由操作活動中理解等值分數的意義。簡單異分母分數的比較、加、減的意義。簡單分數與小數的互換。

### (三) 連結的知識

N-5-6 整數相除之分數表示：從分裝（測量）和平分的觀點，分別說明整數相除為分數之意義與合理性。

N-5-7 分數除以整數：分數除以整數的意義。最後將問題轉化為乘以單位分數。

### (四) 延伸的知識

N-6-4 小數的除法：整數除以小數、小數除以小數的意義。直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。處理商一定比被除數小的錯誤類型。

## 三、教學建議

### (一) 評量核心概念

以直式處理整數除以整數，商為三位小數的計算（整除）。

### (二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. 對分數為「整數相除」的意涵不了解：因此學生對算式中被除數小於除數會感到懷疑與不確定，如： $495 \div 792$  可能會在列式時寫成  $792 \div 495$ 。
2. 對小數沒有估算的數感：因此對於商的小數點位置沒有概念，以致於出現小數除法直式計算中商的小數位置錯誤（如下列直式）：

$$\begin{array}{r} 0.125 \\ 8 \overline{) 1.0} \\ \underline{8} \phantom{0} \\ 20 \\ \underline{16} \\ 40 \\ \underline{40} \\ 0 \end{array}$$

小數點位置正確

$$\begin{array}{r} 1.25 \\ 8 \overline{) 1.0} \\ \underline{8} \phantom{0} \\ 20 \\ \underline{16} \\ 40 \\ \underline{40} \\ 0 \end{array}$$

小數點位置錯誤

$$\begin{array}{r} 12.5 \\ 8 \overline{) 1.0} \\ \underline{8} \phantom{0} \\ 20 \\ \underline{16} \\ 40 \\ \underline{40} \\ 0 \end{array}$$

小數點位置錯誤

3. 對於被除數位值有 0 的意義不了解：所以當除法直式的餘數小於除數時，就以為不能再分了，不知補 0 的意義是換成更小的位值後可以繼續分。
4. 忘記商要補 0，或 0 補錯位置：由於位值概念的不熟悉，加上直式算則是精簡後的表徵，因此容易補 0 錯誤，例如本題  $726 \div 80$ ，學生不知直式記錄的第二層中，原  $726 - 720 = 6$ ，6 是指 6 個 1，不夠分給 80，所以需在 6 後面補 0，變成 60，且忽略 60 是指 60 個 0.1，不夠分給 80，因此，要在商的十分位補 0，才繼續在 60 的後面補上 0，變成 600，指的是 600 個 0.01。在教學上，建議說「沒有分到 0.1」，所以記成「0 個 0.1」。

		9.	0	7	5
8	0	)	7	2	6
			7	2	0
					0
					0
					0
					0
					0
					0

20個0.1不夠分，  
商的十分位記0

### (三) 核心概念的教學重點

1. 分數有「整數相除」意涵：整數除以整數可以表示為分數，所以分數有「整數相除」的意涵。在教學上應讓學生透過實物進行等分除或包含除的具體操作，再連結到整數相除的數學算式，最後連結到整數相除的分數表達形式，例如：4個蛋糕平分給2個人，列式為 $4 \div 2$ ，故1個蛋糕平分給4個人，列式為 $1 \div 4$ ，所以每人可以分到 $\frac{1}{4}$ 個蛋糕。若學生對於分數有「整數相除」的意涵了解，當被除數小於除數時，學生才不易產生混淆。
2. 培養小數除法估算的數感：練習整數相除的運算時，培養學生的數感可以幫助學生估算商的值，例如：1個蛋糕分給4個人， $1 \div 4 = ( \quad )$ ，每個人分到的蛋糕應該不到一半，所以應該小於 $\frac{1}{2}$ ，也就是小於0.5。有了數感，學生在標示商的小數點位置時才不容易錯誤。

### (四) 本題教學的加強重點

1. 了解除法直式補0的意義：教師可應用位值的概念說明如何以直式來進行整數除以整數的計算。在整數除以整數，商為小數的直式計算中，餘數小於除數時，需將餘數的下一個位值補0，表示換成更小的位值才能繼續再分。學生若對餘數補0的意義不了解，容易造成計算時的位值錯誤，因此教師需澄清並讓學生了解餘數補0的意義，同時也注意商變成小數，因此要加上小數點。
2. 小數除法的數感：老師可以先讓學生估算495除以792的答案大約多少，讓學生判斷答案小於1。
3. 對於問題的題意釐清：在解題時，有時學生會誤解題意，將被除數和除數兩者混淆。因此，先要求學童先朗讀題目，並與同學討論已知條件及解題目標，再透過師生的問答來釐清題意，了解解題的關鍵並擬定解題計畫。相關做法建議如下：
  - (1) 簡化問題：在教師完成佈題後，當學生朗讀完題目，教師要問學生：
    - 說什麼：請學生用自己的話，把題目簡要的說一次。
    - 為什麼：為什麼題目的解法要那樣做？
  - (2) 增加圖像表徵：在教學中，可藉由圖式，增加學生對題意的理解。
  - (3) 換別人說：請學生舉出與題目類似的情境、例題，讓同儕互相檢視例子是否合理。藉由不斷的澄清、反駁、同意的過程，增加學生對題意的掌握。

## 四、命題建議

- (一) 5-n-12 基本學習內容為「用直式處理整數除以整數，商為三位小數的計算」布題上應注意情境的合理性，讓學生能理解不求餘數，而繼續往下計算的理由。未來108課綱則增加小數除以整數，商為小數的範圍。

(二) 參照 104-107 學年度的命題發現，本條目學生的迷思及錯誤類型，分別有對分數為「整數相除」的意涵不了解、對小數沒有估算的數感、對於被除數位值有 0 的意義不了解，以及忘記商要補 0，或 0 補錯位置。教師在進行命題時，可針對這些迷思來命題，以診斷學生在此學習表現上的迷思處。

## 五、歷屆檢測題參考

### (一) 104 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

爸爸買了 1 瓶容量 1 公升的可樂，要平分給 8 位小朋友，每位小朋友可以喝到多少公升的可樂？

- ① 0.125 公升
- ② 1.25 公升
- ③ 12.5 公升
- ④ 125 公升

選 項	1	2	3	4	其他	答案：1
選項率	0.78*	0.07	0.04	0.11	0.00	鑑別度：0.5 難易度：0.72
高分組	0.97	0.01	0.00	0.02	0.00	
低分組	0.47	0.19	0.11	0.22	0.01	

### (二) 105 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

雜貨店將 12 公斤的麵粉平均分裝成 125 包，每包麵粉重多少公斤？

- ① 0.0096 公斤
- ② 0.096 公斤
- ③ 0.96 公斤
- ④ 9.6 公斤

選 項	1	2	3	4	其他	答案：2
選項率	0.08	0.77*	0.10	0.05	0.00	鑑別度：0.36 難易度：0.76
高分組	0.03	0.94	0.03	0.01	0.00	
低分組	0.13	0.58	0.20	0.09	0.00	

(三) 106 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

雜貨店將 132 公斤的米分裝成 125 包，每包米重多少公斤？

- ① 10.56 公斤
- ② 1.56 公斤
- ③ 1.056 公斤
- ④ 1.0056 公斤

選 項	1	2	3	4	其他	答案：3
選項率	0.06	0.14	0.70*	0.10	0.00	鑑別度：0.47 難易度：0.65
高分組	0.01	0.05	0.89	0.05	0.00	
低分組	0.15	0.28	0.42	0.15	0.00	

(四) 107 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

汽水工廠將 127 公升的汽水分裝成 125 瓶，每瓶汽水是多少公升？

- ① 1.0016 公升
- ② 1.016 公升
- ③ 1.16 公升
- ④ 10.16 公升

選 項	1	2	3	4	其他	答案：2
選項率	0.13	0.67*	0.15	0.05		鑑別度：0.47 難易度：0.63
高分組	0.07	0.87	0.06	0.004		
低分組	0.20	0.40	0.27	0.13		

餐廳推出套餐，A 餐價錢 792 元，B 餐價錢 495 元。B 餐價錢是 A 餐價錢的幾倍？

- ① 0.16 倍
- ② 0.625 倍
- ③ 1.6 倍
- ④ 6.25 倍

選 項	1	2	3	4	其他	答案：2
選項率	0.08	0.51*	0.36	0.04		鑑別度：0.54 難易度：0.52
高分組	0.02	0.79	0.19	0.006		
低分組	0.17	0.25	0.46	0.11		

第 5 題 5-n-14

知識向度	數與計算	認知向度	概念理解																												
對應	5-n-14 能認識比率及其在生活中的應用。																														
題目	<p>三人練習投籃，<u>小明</u>投 8 球命中 4 球，<u>小傑</u>投 5 球命中 3 球，<u>小美</u>投 20 球命中 9 球。下列敘述哪個正確？</p> <p>①<u>小明的</u>命中率是 40%。            ②<u>小傑的</u>命中率最低。            ③<u>小美的</u>命中率比<u>小美</u>高。            ④<u>小美的</u>命中率比<u>小傑</u>高。</p>																														
答題表現 選項分析	<table border="1"> <thead> <tr> <th>選 項</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> <th>其他</th> <th>答案：3</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>選項率</td> <td>0.05</td> <td>0.06</td> <td>0.81*</td> <td>0.08</td> <td>0.00</td> <td>鑑別度：0.52 難易度：0.72</td> </tr> <tr> <td>高分組</td> <td>0.00<sup>+</sup></td> <td>0.00<sup>+</sup></td> <td>0.98</td> <td>0.01</td> <td>0.00</td> <td></td> </tr> <tr> <td>低分組</td> <td>0.17</td> <td>0.17</td> <td>0.46</td> <td>0.20</td> <td>0.00</td> <td></td> </tr> </tbody> </table> <p style="text-align: right;">*代表數值不等於 0</p>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：3	選項率	0.05	0.06	0.81*	0.08	0.00	鑑別度：0.52 難易度：0.72	高分組	0.00 <sup>+</sup>	0.00 <sup>+</sup>	0.98	0.01	0.00		低分組	0.17	0.17	0.46	0.20	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：3																									
選項率	0.05	0.06	0.81*	0.08	0.00	鑑別度：0.52 難易度：0.72																									
高分組	0.00 <sup>+</sup>	0.00 <sup>+</sup>	0.98	0.01	0.00																										
低分組	0.17	0.17	0.46	0.20	0.00																										

一、試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.52，通過率為 0.81，難易度 0.72。

(二) 評量目標說明

本題是比率與百分率的換算問題，評量學生是否能理解比率、百分率的意義，並能處理應用問題。

(三) 選項表現說明

1. 有 81% 的學生選擇③顯示這些學生能理解比率概念並能解決生活問題，因此能正確計算及判斷本題和比率相關的描述。
2. 有 8% 的學生選擇選項④，顯示這些學生直接以命中的球數做比較，認為進球數較多的則命中率較高。
3. 有 6% 的學生選擇選項②，顯示這些學生直接以命中的球數作為判斷依據，認為進球數最少的，即命中率最低。
4. 有 5% 的學生選擇選項①，顯示些學生將直接將命中球數視為進球的百分率，認為命中 4 球，百分率即為 40%。

(四) 學生表現說明

1. 本題的命題設計，主要希望了解學生對於比率為部份量佔全體量的關係，以及生活中經常遇到的兩個或更多人進行比率高低比較的情境問題。
2. 本題通過率為 81%。只有約 2 成的學生尚不熟練比率與百分率的互換及其應用，但從高分組與低分組學生的表現來看，高達 98% 的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生卻只

有 46% 能回答正確問題，其他錯誤選項有 54% 的低分組學生選擇。顯示低分組學生中有超過一半以上的學生對於比率的概念不夠明確，仍存在著「以進球數的多少來判定比率」，以及「直接將進球數視為百分率」的迷思。

## 二、教材地位分析

### 97 課綱 (分年細目)

#### (一) 評量重點

5-n-14 能認識比率及其在生活中的應用 (含「百分率」、「折」)。

#### (二) 先備的知識

4-n-08 能理解等值分數，進行簡單異分母分數的比較，並用來做簡單分數與小數的互換。

#### (三) 延伸的知識

6-n-09 能認識比和比值，並解決生活中的問題。

### 十二年國教課綱 (學習內容)

#### (一) 評量重點

N-5-10 解題：比率與應用。整數相除的應用。含「百分率」、「折」、「成」。

#### (二) 先備的知識

N-4-6 等值分數：由操作活動中理解等值分數的意義。簡單異分母分數的比較、加、減的意義。簡單分數與小數的互換。

#### (三) 延伸的知識

N-6-6 比與比值：異類量的比與同類量的比之比值的意義。理解相等的比中牽涉到的兩種倍數關係 (比例思考的基礎)。解決比的應用問題。

N-6-8 解題：基準量與比較量。比和比值的應用。含交換基準時之關係。

## 三、教學建議

#### (一) 評量核心概念

學生能理解百分率的意義，並處理應用問題。

#### (二) 學生常見的錯誤類型 / 迷思概念

1. 對於比率的概念不了解：比率表示的是部份佔全體的多少的關係，因此比率的值常小於 1 或等於 1，且 1 即代表全部。學生對於比率的概念不了解，因此不了解比率所代表的意義。
2. 對於比率的值的不同表示方式無法互相換算：比率可以用分數、小數及百分率的方式來表示，學生因為對比率的概念不了解，或對分數、小數之間的換算不熟悉，因此無法進行比率的不同表示方式之間的換算。
3. 不了解全體中不同部份量的比率總和為 1：若某班男生人數比率為 55%，女生人數比率則為  $1 - 55\% = 45\%$ ，反之男女生人數之比率相加其和必為 1 (100%)。
4. 當全體量不同時，容易混淆部份量所佔的比率：比率表示的是部份佔全體的多少的關係，因此當全體量不同時，部份量所佔的比率也會不同，如某班男生人數為 15 人，佔全班的比率、佔全五年級男生的比率及佔五年級總人數的比率都會不同。

5.不了解打折的意義：學生不了解打七五折的意義是付給定價 75% 的價錢，不能讀作「七折五折」。

6.不了解加成的意義：學生對於加成是指在全體量之外，加上一定比率的價錢的意思並不了解。

### (三) 核心概念的教學重點

1.從生活情境中了解比率的意義：比率代表的是「部份量佔全體量」的關係。可從生活中常見的比率情境及用語連結到比率概念的學習，如：近視不良率（近視人數佔總人數的比率）、打擊率（安打數佔總打數的比率）、投籃命中率（進籃球數佔總投球數的比率）、得票率（得票數佔總投票數的比率）...等生活情境來讓學生學習及理解比率的意義。

#### 2.比率不同的表示方式

(1) 以分數表示：比率是部份量佔全體量的關係，因此可以連結分數概念以分數表示。如：「小明投籃投了 20 球，進了 12 球，小明投中的比率（命中率）是多少？」小明投中的比率： $\frac{12(\text{投中球數})}{20(\text{總投球數})} = \frac{3}{5}$ 。

(2) 以小數表示：比率是部份量佔全體量的關係，也可以用包含除的關係來列式。如：小明投籃投了 20 球，進了 12 球，小明投中的比率（命中率）是多少？小明投中球數，是總投球數的幾倍： $12 \div 20 = 0.6$ 。

(3) 以百分率表示：比率以分數或小數的方式計算出來之後，再轉化百分率的表示方式。如：小明投籃投了 20 球，進了 12 球，小明投中的比率（命中率）是多少？

方法一： $\frac{12(\text{投中球數})}{20(\text{總投球數})} = \frac{3}{5} = \frac{60}{100} = 60\%$ ，

方法二： $12 \div 20 = 0.6$ ， $0.6 \times 100\% = 60\%$ 。（ $100\% = \frac{100}{100}$ ）

另外教師還可以引導學生觀察發現：比率用百分率的方式表示時，分母皆為 100，最容易比較及計算不同的比率。

3.不同類量的比率總合為 1：連結生活情境讓學生理解不同類量的比率總合為 1 的概念。如：小明投籃投了 20 球，進了 12 球，小明的投球命中率是  $12 \div 20 \times 100\% = 60\%$ ；小明的沒投進的球為 8 球，小明的不中球率為  $8 \div 20 \times 100\% = 40\%$ 。進球率和不進球率的總和為 1（ $\frac{100}{100}$ ）。

4.當全體量不同時，部份量所佔的比率亦不同：連結生活情境讓學生理解當全體量不同時，部份量所佔的比率亦不同。如：五年一班男生人數 12 人，佔全班人數、全五年級男生人數及全五年級總數的比率因為全體量不同，所以所佔比率也隨著改變(如下表)。讓學生理解比率的意義和確認全體量是多少的重要性。

	全班人數	全五年級男生人數	全五年級總人數
	25	65	120
五年一班男生所佔比率	$12 \div 25 = 0.48 = 48\%$	$12 \div 65 = 0.1846 = 18.46\%$	$12 \div 120 = 0.1 = 10\%$

#### 5.打折的意義

(1) 透過生活情境讓學生了解打折、折扣的意義、計算方式和生活應用。如：「書店全面七折」

的意思是售價以定價的十分之七計價，若 200 元的書，則需付  $200 \times \frac{7}{10} = 140$  (元)。由分數的概念切入學生較容易了解打折的意思，再帶入「七五折」即乘以  $\frac{750}{100}$ 、75%。打七五折的書只要付  $200 \times 75\% = 150$  (元)；反之，打七五折即節省了  $1 - 75\% = 25\%$ ， $200 \times 25\% = 50$  (元)。

(2) 國外折扣的表示方式：打七五折在國外的表示方式為「25% off」，因為生活中（如百貨公司的標示）也很常見，教師可作為教學目標但不宜列入評量。

6. 加成的意義：教師可結合日常生活中的加成經驗讓學生理解加成的意義，如：「到餐廳點了 600 元的餐點，用餐完結帳時，要付給餐廳餐點費及加一成的服務費，共要付多少錢？」

$$600 \times (1 + 10\%) = 600 + 60 = 660 \text{ (元)}。$$

7. 連結一維、二維表格佈題：可以讓學生更容易理解部份量和全體量的關係，也可以連結比率(分數、小數)和百分率的換算，如：

	男生	女生	合計
人數	14	11	25
比率(小數)	0.56	0.44	1
比率(分數)	$\frac{14}{25}$	$\frac{11}{25}$	1
百分率	56%	44%	100%

#### (四) 本題教學的加強重點

使用二維表格的解題策略：可以讓學生更清楚看出部份量和全體量的關係，也更容易理解整場投籃命中率的算法，避免產生迷思，以本題為例，可以將題目中三個人的進球次數和投籃次數進行列表，並依此算出每個人的投籃命中率，整理如下表：

	進球次數	投籃次數	投籃命中率
小明	4	8	50%
小傑	3	5	60%
小美	9	20	45%

如此即可清楚的知道三個人的進球情形，以及彼此間相互比較的關係。

#### 四、命題建議

- (一) 評量時需檢測學生對於比率的意義是否真正了解，因此在選項的設計上，如果學生對於描述性的語句較不容易判別時，可以考慮以表格的方式進行命題。
- (二) 另外，102-103 學年度的打折問題答對率只有 3-4 成，學生對於將原價及折扣價轉換為比率的算法及折的語言並不熟悉，故題目可再簡化，因為五年級剛開始學習比率概念，較有變化的題目可以放在六年級。

## 五、歷屆檢測試題參考

### (一) 102 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

31. (4)便利商店定價 10 元的關東煮買 4 送 1，小讚買了 4 個關東煮送 1 個，相當於總價打幾折？ ①2 折②2.5 折③5 折④8 折							
區 域	答對率	難易度	鑑別度	答①%	答②%	答③%	答④%
全市	0.4	0.46	0.56	20.18	18.88	18.48	40.21*
高分組				9.9	9.9	6.3	73.9
低分組				28.8	25.58	27.53	18.09

### (二) 103 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

26. (2)四位小朋友比賽投籃，甲投 5 次命中 1 球，乙投 10 次命中 3 球， 丙投 20 次命中 5 球，丁投 25 次命中 6 球，誰的命中率最高？ ① 甲 ② 乙 ③ 丙 ④ 丁							
區 域	答對率	難易度	鑑別度	答①%	答②%	答③%	答④%
全市	0.62	0.58	0.63	8.75	61.91*	14.34	13.48
高分組				1.36	89.77	6.78	2.09
低分組				19.9	26.46	21.5	33.13

29. (4)蠟筆一盒 30 元，老師只需要買 20 盒蠟筆當獎品。下圖是某文具店的最新 促銷活動，這家店的蠟筆促銷折扣是多少？ ① 打二折 ② 打二五折 ③ 打七五折 ④ 打八折							
區 域	答對率	難易度	鑑別度	答①%	答②%	答③%	答④%
全市	0.33	0.38	0.32	13.66	28.99	22.48	32.78*
高分組				9.46	21.41	15.49	53.64
低分組				18.93	31.76	27.7	21.61

(三) 國家教育研究院 104 年協助縣市辦理學生學習能力檢測--五年級數學試題

下列算式何者不正確？

①  $\frac{4}{10} = 40\%$

②  $27.5\% = 0.275$

③  $\frac{1}{4} = 25\%$

④  $0.01 = 10\%$

選 項	1	2	3	4*	
選項率	0.1	0.08	0.12	0.67	通過率：0.67
高分組	0.02	0.02	0.01	0.95	鑑別度：0.64
低分組	0.16	0.15	0.28	0.31	

(四) 106 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

昆蟲國小今年飼養蝴蝶 300 隻，其中 60% 是樺斑蝶，其餘是無尾鳳蝶。下列敘述何者錯誤？

① 無尾鳳蝶的數量比樺斑蝶少

② 無尾鳳蝶數量占蝴蝶飼養總量的  $\frac{2}{5}$

③ 平均每 100 隻蝴蝶中有 60 隻是樺斑蝶

④ 無尾鳳蝶與樺斑蝶的數量相差 20 隻

選 項	1	2	3	4	其他	答案：4
選項率	0.09	0.13	0.20	0.58*	0.00	鑑別度：0.56
						難易度：0.57
高分組	0.01	0.05	0.09	0.85	0.00	
低分組	0.20	0.30	0.21	0.29	0.00	

(五) 107 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

在一場籃球比賽當中，投籃的數據如下：

	投籃次數	投籃命中率
上半場	20 次	60%
下半場	15 次	40%

下列敘述哪個錯誤？

- ① 上半場投進 12 球
- ② 下半場投不進的百分率為 60%
- ③ 整場投進球數 > 整場投不進的球數
- ④ 整場投籃命中率為 100%

選 項	1	2	3	4	其他	答案：4
選項率	0.18	0.15	0.35	0.32*	0.00	鑑別度：0.42 難易度：0.38
高分組	0.05	0.04	0.32	0.59	0.00	
低分組	0.28	0.25	0.30	0.17	0.00	

第 6 題 5-a-03

知識向度	代數	認知向度	概念理解																														
對應分年細目	5-a-03 能熟練運用四則運算的性質，做整數四則混合運算																																
題目	計算題「 $48+24\div 3\times 4$ 」，下列學生的算法哪個正確？ ① <u>小泉</u> $48+24\div 3\times 4$ ② <u>小珍</u> $48+24\div 3\times 4$ $=48+24\div 12$ $=(48+24)\div (3\times 4)$ $=48+2$ $=72\div 12$ $=50$ $=6$ ③ <u>小君</u> $48+24\div 3\times 4$ ④ <u>小冠</u> $48+24\div 3\times 4$ $=72\div 3\times 4$ $=48+8\times 4$ $=24\times 4$ $=48+32$ $=48$ $=80$																																
答題表現 選項分析	<table border="1"> <thead> <tr> <th>選 項</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> <th>其他</th> <th>答案：4</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>選項率</td> <td>0.17</td> <td>0.21</td> <td>0.05</td> <td>0.57*</td> <td>0.00</td> <td>鑑別度：0.72 難易度：0.55</td> </tr> <tr> <td>高分組</td> <td>0.06</td> <td>0.02</td> <td>0.01</td> <td>0.91</td> <td>0.00</td> <td></td> </tr> <tr> <td>低分組</td> <td>0.24</td> <td>0.45</td> <td>0.12</td> <td>0.19</td> <td>0.00</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>					選 項	1	2	3	4	其他	答案：4	選項率	0.17	0.21	0.05	0.57*	0.00	鑑別度：0.72 難易度：0.55	高分組	0.06	0.02	0.01	0.91	0.00		低分組	0.24	0.45	0.12	0.19	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：4																											
選項率	0.17	0.21	0.05	0.57*	0.00	鑑別度：0.72 難易度：0.55																											
高分組	0.06	0.02	0.01	0.91	0.00																												
低分組	0.24	0.45	0.12	0.19	0.00																												

一、試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.72，通過率為 0.57，難易度 0.55。

(二) 評量目標說明

本題旨在評量學生是否能用四則運算性質來檢驗算式是否正確，評量學生是否能熟練運用「先乘除後加減」、「由左至右計算」的算則。

(三) 選項表現說明

- 有 57% 的學生選擇選項④，顯示近六成的學生能熟練運用四則運算的算則來檢驗算式是否正確。
- 有 21% 的學生選擇選項②，這些學生不理解「先乘除後加減」的算則，因此加上括號，先算看起來好算的加法，學生不理解同時有乘和除時，要由左至右計算，而且可能亦混淆「連除兩數等於除以兩數之積」的算則而誤用括號來標示先算的部份。
- 有 17% 的學生選擇選項①，這些學生能理解先乘除後加減，但不理解同時有乘和除時，要由左至右計算，或先乘再除與先除再乘結果相同，但若後面先算要加括號，而選擇此錯誤選項。
- 有 5% 的學生選擇選項③，這些學生不理解「先乘除後加減」的算則，因此由左至右先算加法而選擇此錯誤選項。

#### (四) 學生表現說明

- 1.本題的命題設計主要希望了解學生是否能理解及熟練運用整數的四則運算性質，用以檢驗算式的正確性。
- 2.本題通過率為 0.57。有將近六成的學生能理解及熟練運用整數的四則運算性質，故能正確判斷算式的合理性。但仍有四成多的學生，並未能掌握四則運算性質的概念。從高分組與低分組學生的表現來看，91%的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生僅有 19%回答正確，顯示高達八成的低分組學生對四則運算的性質並不了解，很容易產生迷思而混淆或誤用。

## 二、教材地位分析

### 97 課綱 (分年細目)

#### (一) 評量重點

5-a-03 能熟練運用四則運算的性質，做整數四則混合計算。

#### (二) 先備的知識

4-a-02 能在四則混合計算中，應用數的運算性質。

#### (三) 延伸的知識

6-a-04 能利用常用的數量關係，列出恰當的算式，進行解題，並檢驗答案的合理性。

### 十二年國教課綱 (學習內容)

#### (一) 評量重點

R-5-2 四則計算規律 (II)：乘除混合計算。「乘法對加法的分配律」。將計算規律應用於簡化混合計算。熟練整數四則混合計算。

#### (二) 先備的知識

R-4-1 兩步驟問題併式：併式是代數學習的重要基礎。含四則混合計算的約定 (由左往右算、先乘除後加減、括號先算)。學習逐次減項計算。

R-4-2 四則計算規律 (I)：兩步驟計算規則。加減混合計算、乘除混合計算。在四則混合計算中運用數的運算性質。

#### (三) 延伸的知識

R-6-1 數的計算規律：小學最後應認識 (1) 整數、小數、分數都是數，享有一樣的計算規律。(2) 整數乘除計算及規律，因分數運算更容易理解。(3) 逐漸體會乘法和除法的計算實為一體。併入其他教學活動。

## 三、教學建議

#### (一) 評量核心概念

能熟練運用「先乘除後加減」、「由左至右計算」的算則。

#### (二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

- 1.對於四則運算的算則不清楚：因此學生習慣由左至右進行運算，或是算式中看起來好算的部份先算而造成計算錯誤，或是誤以為先乘除意指先乘再除(加減部分亦同)，如下列三個錯誤計算的算式：

(1)  $35 - 5 \times 4 = 120$  (學生由左至右計算，因此先算  $35 - 5$ ，再算  $30 \times 4$ ，所以計算錯誤。)

(2)  $25 \times 7 - 5 = 50$  (學生先算比較好算的  $7 - 5$ ，再算  $25 \times 2$ ，因此計算錯誤。)

(2)  $32 \div 8 \times 2 = 2$  (學生先算乘的部分  $8 \times 2$ ，再算除的部分，因此計算錯誤。)

2.對於併式的過程及方式不了解：如： $7 \times 18 = 126$ ， $7 \times 12 = 84$ ， $126 + 84 = 210$  等三步驟混合計算，如果先算  $18 + 12 = 30$ ，再算  $7 \times 30 = 210$ ，可以簡化計算，因此可以併式為  $7 \times (18 + 12)$ 。當學生不了解這個併式過程及括號先算的意義時，就無法理解各種四則運算的算則，而只是一味的從左至右逐項運算。

3.計算過程中忽略等號的對稱性：學生不了解等號具有兩邊需等值的觀念，把等號當作運算結果，因此在逐次減項的算式中可能遺漏了數字，而只列出自己正在計算的數字，如： $100 - 6 \times 5 + 8 = 100 - 30 = 70 + 8 = 78$ ，此計算結果雖然正確，過程卻是錯誤的。

4.以為分配律的反推算式就是結合律：因為  $8 \times (3 + 2) = 8 \times 3 + 8 \times 2$  是乘法對加法的分配律，學生誤以為  $8 \times 3 + 8 \times 2 = 8 \times (3 + 2)$  就是乘法對加法的結合律，其實  $8 \times 3 + 8 \times 2 = 8 \times (3 + 2)$  只是分配律的反推算式，仍然屬於分配律。

5.因為加法和乘法有結合律，以為減法和除法也有結合律：因為  $(8 + 2) + 5 = 8 + (2 + 5)$  及  $(12 \times 5) \times 2 = 12 \times (5 \times 2)$  成立，所以學生誤以為  $(32 \div 8) \div 2 = 32 \div (8 \div 2)$  及  $(10 - 8) - 2 = 10 - (8 - 2)$  也成立。

6.因為加法和乘法有交換律，以為減法和除法也有交換律：因為  $3 + 4 = 4 + 3$  及  $5 \times 6 = 6 \times 5$  成立，所以學生誤以為  $3 - 5 = 5 - 3$  及  $2 \div 8 = 8 \div 2$ ，因此容易出現不去理解題意，直接用大數減小數或用大數除以小數。尤其是分數的除法，如題目是 2 個披薩分給 8 個人，學生常列成錯誤算式： $8 \div 2$ 。

7.因為乘法對加、減法有分配律，以為除法對加、減法也有分配律：因為乘法對加、減法有左右分配律，所以可以說乘法對加、減法的分配律成立；而除法對加、減法只有右分配律，即  $(12 + 6) \div 3 = 12 \div 3 + 6 \div 3$ ，但是  $36 \div (9 + 3) \neq 36 \div 9 + 36 \div 3$ ，所以除法對加、減法的分配律不成立。

8.因為「先乘後除和先除後乘的結果相同」，與「連除兩數等於除以兩數之積」產生混淆：因為  $96 \times 12 \div 4 = 96 \div 4 \times 12$ ，而  $96 \div 12 \div 4 = 96 \div (12 \times 4)$ ，學生將兩算則混淆，因此以為  $96 \div (12 \times 4) = 96 \div 12 \times 4$ 。

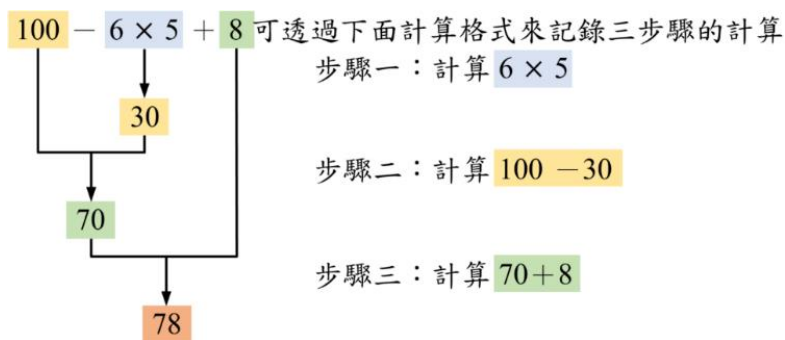
### (三) 核心概念的教學重點

#### 1.理解題意後再列式及學習併式

教師應利用多步驟問題讓學生從理解題意後有次序的一一列式解題，待學生能熟練解決多步驟問題後再開始學習併式。併式教學時需同時呈現多步驟算式，再慢慢併式過渡到能以一個算式紀錄問題。

例如：「小明口袋有 1 個 10 元硬幣和 6 個 5 元硬幣，請問小明共有多少元？」學生理解題意後多步驟解題算式可能為： $6 \times 5 = 30$ ， $10 + 30 = 40$ ；引導學生併式為  $10 + 6 \times 5 = ( )$ ，再討論因為乘或除是連加或連減的簡化紀錄形式，因此運算位階高於加或減，所以約定「先乘除後加減」。括號先算也是利用併式需求而產生的共同約定算則。

## 2.提供層次清楚的計算格式



## 3.透過具體情境，讓學生理解乘法對加法的分配律

乘法對加法有右分配律及左分配律，乘號在加號右邊時，如： $(6+4) \times 5 = 6 \times 5 + 4 \times 5$ ，稱為乘法對加法的右分配律；乘號在加號左邊時，如： $8 \times (7+3) = 8 \times 7 + 8 \times 3$ ，稱為乘法對加法的左分配律。教師應用具體的情境讓學生理解乘法對加法的分配律為何會成立，情境題的數字可以設計成用分配律計算更容易，以產生使用分配律的需求。

例如：「一打鉛筆有 12 枝，小明有黃色鉛筆 8 打，小華有紅色鉛筆 2 打，兩人共有幾枝鉛筆？」引導學生發現  $12 \times 8 + 12 \times 2 = (\quad)$  比較不容易計算，若能利用分配律改成  $12 \times 8 + 12 \times 2 = 12 \times (8+2) = 12 \times 10 = 120$ ，計算上會容易許多。

## 4.透過具體情境，讓學生理解乘法對減法的分配律

乘號在減號右邊時，如： $(8-5) \times 9 = 8 \times 9 - 5 \times 9$  稱為乘法對減法的右分配律；乘號在減號左邊時，「 $10 \times (9-4) = 10 \times 9 - 10 \times 4$ 」稱為乘法對減法的左分配律。教師應用具體的情境讓學生理解乘法對減法的分配律為何會成立，情境題的數字可以設計成用分配律計算更容易，以產生使用分配律的需求。

例如：「一打鉛筆有 12 枝，小明有黃色鉛筆 8 打，小華有紅色鉛筆 2 打，小明比小華多幾枝鉛筆？」引導學生發現  $12 \times 8 - 12 \times 2 = (\quad)$  比較不容易計算，若能利用分配律改成  $12 \times 8 - 12 \times 2 = 12 \times (8-2) = 12 \times 6 = 72$ ，計算上會容易許多。

## 5.透過具體情境，讓學生理解加法與乘法的結合律

在連加算式中， $(5+3)+7=5+(3+7)$ ，所以加法有結合律；在連乘算式中， $(17 \times 5) \times 2 = 17 \times (5 \times 2)$ ，所以乘法也有結合律。教師應用具體的情境讓學生理解加法與乘法的結合律為何會成立，情境題的數字可以設計成用結合律計算更容易，以產生使用結合律的需求。

例如：「有一個長 24 公分、寬 8 公分、高 5 公分長方體，它的體積是多少？」由於長方體是由許多 1 立方公分的白色積木堆疊而成，所以計算體積 = 長  $\times$  寬  $\times$  高時，可以先算前面「 $(24 \times 8) \times 5$ 」，也可以先算後面「 $24 \times (8 \times 5)$ 」，其體積雖然相同，但學生會發現先算  $8 \times 5$  會比較容易計算。

## 6.透過具體情境，讓學生理解「先乘後除和先除後乘的結果相同」，與「連除兩數等於除以兩數之積」的不同

例如：「有 96 盒布丁，每盒有 12 個，平分給 4 間超商販售，每間超商分到幾個布丁？」可以先算出 96 盒布丁共有幾個，再平分給 4 間超商： $96 \times 12 \div 4$ ；也可以先將 96 盒布丁平分給 4 間超商，再算出每間超商分到幾個布丁： $96 \div 4 \times 12$ ，因此  $96 \times 12 \div 4 = 96 \div 4 \times 12$ ，可知「先乘後除和先除後乘的結果相同」。

例如：「有 96 盒布丁，每 12 盒裝成一箱，每 4 箱配送給一間超商，共可配送給幾間超商？」可以先算出 96 盒可以裝成幾箱，再以每 4 箱配送計算可以配送給幾間超商： $96 \div 12 \div 4$ ；也可以先算出每間超商配送的 4 箱共有幾盒布丁，再算出 96 盒布丁可以配送給幾間超商，

併式後為： $96 \div (12 \times 4)$ ，因此 $96 \div 12 \div 4 = 96 \div (12 \times 4)$ ，可知「連除兩數等於除以兩數之積」。

學生經由上面兩個情境的比較，了解算式的意義，才不會產生混淆，誤以為 $96 \div (12 \times 4) = 96 \div 12 \times 4$ 。

#### (四) 本題教學的加強重點

##### 1. 透過擬題的具體情境讓學生理解題意後再列式及併式

本題僅需依題意找出結果相同的算式而不需計算出答案，然而在無情境的算式中，學生因為對四則運算規則不熟悉而容易產生混淆，因此可透過具體情境幫助學生依題意理解算式，再讓學生探討相關的算則。

例如本題算式「 $48+24 \div 3 \times 4$ 」可以擬題為「超商原有 48 包果凍，今天又進貨一箱 24 入的果凍每 3 個裝成一包共 4 箱，進貨後超商共有幾包布丁？」本題依題意可以先算 24 入果凍每 3 個裝成一包再乘以 4 箱，共裝成幾包，再加上原有的 48 包果凍，可併式紀錄為： $48+24 \div 3 \times 4$ ；也可以先算 24 入的 4 箱果凍每 3 個裝成一包，共裝成幾包，再加上原有的 48 包，可併式紀錄為： $48+24 \times 4 \div 3$ ，讓學生理解先乘再除和先除再乘的結果相同。

學生在情境中理解列式及併式的過程後，知道要先計算平分後的鉛筆數，最後再加上小明原來的鉛筆，因此不會再誤以要先算  $48+24$ 。

##### 2. 超越情境進行純數字的計算練習用算則簡化計算

學生能透過情境理解併式及算則的意義後，還可以進行四則運算純數字題的練習，讓學生單純進行算則的運用練習以增加學生的熟練度與敏感度。

本題： $48+24 \div 3 \times 4$ ，先乘除後加減，及由左至右運算，故應先算  $24 \div 3 \times 4 = 32$ ，再算  $48+32=80$ 。

例 1： $25 \times 10 + 30 \div 6$ ，先乘除後加減，因此要先算  $25 \times 10$  和  $30 \div 6$ ，最後再相加。

例 2： $125+240 \div 8-5$ ，先乘除後加減， $240 \div 8=30$ ，再由左至右計算  $125+30-5=150$ 。

#### 四、命題建議

本條細目涵括的範圍非常廣泛，可以說是整數四則運算所有性質和規約的總和，在命題時，有二個重點建議把握住：

(一) 四則運算的性質著重學生對於運算規約的理解，而非強調計算能力。

(二) 四則運算的性質是從生活中的數學應用情境發展而來，新北市歷年皆以選擇題的方式進行呈現，側重於對規約的熟練與判斷，或許可以非選擇題的形式，設計相關情境，藉以了解學生是否理解各規約的意義。

## 五、歷屆檢測試題參考

### (一) 104 學年度數學能力檢測第 19 題

根據四則運算的規則，下列哪一個敘述是錯誤的？

- ①  $48 \times 199 \times 8$  可以用  $48 \times 100 - 199 \times 8$  來計算
- ②  $530 \times 101$  可以用  $53000 + 530$  來計算
- ③  $3001 \times 99$  可以用  $3001 \times 100 - 3001$  來計算
- ④  $80000 \div 32 \div 4$  可以用  $80000 \div (32 \times 4)$  來計算

選 項	1	2	3	4	其他	答案：1
選項率	0.50*	0.21	0.14	0.14	0.01	鑑別度：0.61 難易度：0.54
高分組	0.84	0.07	0.04	0.04	0.00	
低分組	0.23	0.28	0.23	0.24	0.02	

### (二) 105 學年度數學能力檢測第 6 題

下列哪一個算式能夠算出「 $24 + 12 \div 3 \times 4$ 」的答案？

- ①  $36 \div 3 \times 4$
- ②  $24 + 12 \div 12$
- ③  $24 + 4 \times 4$
- ④  $(24 + 12) \div (3 \times 4)$

選 項	1	2	3	4	其他	答案：3
選項率	0.17	0.17	0.43*	0.23	0.00	鑑別度：0.64 難易度：0.47
高分組	0.07	0.09	0.79	0.05	0.00	
低分組	0.24	0.22	0.15	0.39	0.00	

(三) 107 學年度數學能力檢測第 8 題

下列哪兩個算式都是正確的？

算式 A： $(1000 + 100) + 10 = 1000 + (100 + 10)$

算式 B： $(1000 - 100) - 10 = 1000 - (100 - 10)$

算式 C： $(1000 \times 100) \times 10 = 1000 \times (100 \times 10)$

算式 D： $(1000 \div 100) \div 10 = 1000 \div (100 \div 10)$

① 算式 A 和算式 C

② 算式 A 和算式 B

③ 算式 B 和算式 D

④ 算式 C 和算式 D

選 項	1	2	3	4	其他	答案：1
選項率	71.64*	14.84	6.27	7.03	0.00	鑑別度：0.58
						難易度：0.67
高分組	95.96	3.00	0.37	0.68	0.00	
低分組	37.65	28.81	16.49	17.05	0.00	

第 7 題 5-n-17

知識向度	量與實測	認知向度	程序執行																															
對應分年細目	5-n-17 能認識面積單位「公畝」、「公頃」、「平方公里」及其關係，並作相關計算。																																	
題目	<p>新北市各展覽館的佔地面積如下表。佔地最大的與最小的展覽館面積相差多少？ (1公頃=100公畝)</p> <p style="text-align: center;">新北市展覽館佔地面積表</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>場館名稱</th> <th>面積</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>十三行博物館</td> <td>8 公頃 30 公畝</td> </tr> <tr> <td>新北市客家文化園區</td> <td>450 公畝</td> </tr> <tr> <td>陶瓷博物館</td> <td>12 公頃</td> </tr> </tbody> </table> <p>① 3公頃70公畝 ② 4公頃38公畝 ③ 7公頃50公畝 ④ 11公頃550公畝</p>			場館名稱	面積	十三行博物館	8 公頃 30 公畝	新北市客家文化園區	450 公畝	陶瓷博物館	12 公頃																							
場館名稱	面積																																	
十三行博物館	8 公頃 30 公畝																																	
新北市客家文化園區	450 公畝																																	
陶瓷博物館	12 公頃																																	
答題表現 選項分析	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>選 項</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> <th>其他</th> <th>答案：3</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>選項率</td> <td>0.12</td> <td>0.05</td> <td>0.73*</td> <td>0.10</td> <td>0.00</td> <td>鑑別度：0.46 難易度：0.67</td> </tr> <tr> <td>高分組</td> <td>0.05</td> <td>0.00<sup>†</sup></td> <td>0.90</td> <td>0.05</td> <td>0.00</td> <td></td> </tr> <tr> <td>低分組</td> <td>0.22</td> <td>0.15</td> <td>0.45</td> <td>0.17</td> <td>0.00</td> <td></td> </tr> </tbody> </table> <p style="text-align: right; border: 1px solid black; padding: 2px;"><sup>†</sup>代表數值不等於 0</p>						選 項	1	2	3	4	其他	答案：3	選項率	0.12	0.05	0.73*	0.10	0.00	鑑別度：0.46 難易度：0.67	高分組	0.05	0.00 <sup>†</sup>	0.90	0.05	0.00		低分組	0.22	0.15	0.45	0.17	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：3																												
選項率	0.12	0.05	0.73*	0.10	0.00	鑑別度：0.46 難易度：0.67																												
高分組	0.05	0.00 <sup>†</sup>	0.90	0.05	0.00																													
低分組	0.22	0.15	0.45	0.17	0.00																													

一、試題分析

(一) 數據解析：

本題鑑別度為 0.46，通過率為 0.73，難易度 0.67。

(二) 評量目標說明：

本試題評量學生是否瞭解面積單位「公頃」及「公畝」間的單位換算以及減法計算，要求學生能經由面積單位的轉換，能從表格中進行面積單位的大小比較，再進行面積的計算。

(三) 選項表現說明：

- 有 73% 的學生選擇選項③，顯示學生能夠正確判斷面積大小，且進行單位換算，計算出「12 公頃－450 公畝＝12 公頃－4 公頃 50 公畝＝7 公頃 50 公畝」。
- 有 12% 的學生選擇選項①，可知學生理解公頃的單位量比公畝的單位量大，但未能將 450 公畝進行換算，因此僅選擇都有公頃單位者「12 公頃－8 公頃 30 公畝＝3 公頃 70 公畝」的策略作計算。
- 有 10% 的學生選擇選項④，雖然學生選出面積最大與最小的展館，但在面積單位換算上出錯，誤以為 1 公頃＝1000 公畝，故計算「12 公頃－450 公畝＝11 公頃 1000 公畝－450 公畝，11 公頃 50 公畝」。

4.有 5%的學生選擇選項②，沒有留意各展館佔地面積的單位，選擇數字大減數字小的方式進行解題「450 公畝-12 公頃=438 公畝」，再做單位換算 438 公畝=4 公頃 38 公畝。

#### (四) 學生表現說明：

- 1.本題命題設計分成二個層次，學生需理解公畝與公頃單位的大小，再進行單位換算與減法計算，主要希望學生能夠理解面積大單位的換算。
- 2.本題通過率為 73%，高分組學生通過率 90%，低分組學生通過率卻僅有 45%，顯示高分組學生大致對於本細目之概念已經熟悉，能正確回答問題；低分組學生則是無法順利完成解題，從低分組的學生表現中可以發現，學生對於公畝、公頃的大小是可以進行比較的，但是在換算與計算的能力上仍明顯不足。

## 二、教材地位分析

### 97 課綱 (分年細目)

#### (一) 評量重點

5-n-17 能認識面積單位「公畝」、「公頃」、「平方公里」及其關係，並做相關計算。

#### (二) 先備的知識

3-n-18 能認識面積單位「平方公分」，並做相關的實測與計算。

4-n-17 能認識面積單位「平方公尺」，及「平方公分」、「平方公尺」間的關係，並做相關計算。

4-n-18 能理解長方形和正方形的面積公式與周長公式。

#### (三) 延伸的知識

6-n-14 能理解圓面積與圓周長的公式，並計算簡單扇形的面積。(同 6-s-03)

### 十二年國教課綱 (學習內容)

#### (一) 評量重點

N-5-12 面積：「公畝」、「公頃」、「平方公里」。生活實例之應用。含與「平方公尺」的換算與計算。使用概數。

#### (二) 先備的知識

S-4-3 正方形與長方形的面積與周長：理解邊長與周長或面積的關係，並能理解其公式與應用。簡單複合圖形。

N-3-14 面積：「平方公分」。實測、量感、估測與計算。

N-4-11 面積：「平方公尺」。實測、量感、估測與計算。

#### (三) 延伸的知識

S-6-3 圓周率、圓周長、圓面積、扇形面積：用分割說明圓面積公式。求扇形弧長與面積。知道以下三個比相等：(1) 圓心角：360；(2) 扇形弧長：圓周長；(3) 扇形面積：圓面積，但應用問題只處理用 (1) 求弧長或面積。

## 三、教學建議

#### (一) 評量核心概念

認識 1 公畝=100 平方公尺；1 公頃=100 公畝；1 平方公里=100 公頃=10000 公畝=1000000 平方公尺。

## (二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. 缺乏量感：缺乏 1 平方公里、1 公頃、1 公畝、100 平方公尺、1 平方公尺的量感。
2. 混淆公頃、公畝的單位：學生容易誤將 1 公頃當成 1000 公畝，1 公畝 = 1000 平方公尺。

## (三) 核心概念的教學重點

1. 認識和理解面積單位「1 平方公分」、「1 平方公尺」、「1 公畝」、「1 公頃」、「1 平方公里」，以及與長度的單位不同

- (1) 複習面積單位「1 平方公分」、「1 平方公尺」，進而引出「1 平方公里」：老師先帶領學生複習舊經驗，邊長 1 公分的正方形，面積是「1 平方公分」、邊長 1 公尺的正方形，面積是「1 平方公尺」，接著再引出邊長 1 公里的正方形，面積是「1 平方公里」。
- (2) 大單位的命名和定義：繼續利用平方公尺的單位來描述「1 公畝」、「1 公頃」、「1 平方公里」，建議教師可以先命名「邊長 10 公尺正方形的面積為 1 公畝」、「邊長 100 公尺正方形的面積為 1 公頃」、「邊長 1000 公尺正方形的面積為 1 平方公里」，再透過面積公式說明「1 公畝的面積為 100 平方公尺」，「1 公頃的面積為 10000 平方公尺」，「1 平方公里的面積為 1000000 平方公尺」。

2. 認識 1 平方公尺、1 公畝、1 公頃和 1 平方公里之意義：學生能知道以下土地面積，並能有實際量感：

- (1) 邊長 1 公尺圍成的正方形土地面積就是 1 平方公尺
- (2) 邊長 10 公尺正方形土地圍成的面積 100 平方公尺，也就是 1 公畝
- (3) 邊長 100 公尺的正方形土地圍成的面積是 10000 平方公尺，也就是 1 公頃，
- (4) 邊長 1 公里，也就是 1000 公尺的正方形土地面積圍成的面積是 1 平方公里，也是 1000000 平方公尺。

3. 進行面積實測活動，並結合生活情境，增加學生的量感：學生能對 1 平方公分、1 平方公尺、1 公畝、1 公頃和 1 平方公里有實際量感。

- (1) 可以舉例讓學生能知道手指甲的大小大約是 1 平方公分。
- (2) 可以舉例讓學生能知道一張報紙攤開後的大小大約是 1 平方公尺；1 張貼紙的大小約是 10 平方公分。
- (3) 先討論如何在躲避球場上圍出面積是 1 公畝的範圍，再到躲避球場上圍出來，並知道躲避球場比 1 公畝大。
- (4) 可以先與學生討論 1 公頃有多大，由於 1 公頃面積較大比較不能直接觀察得到。建議教師舉例大約 1 公頃大小的公共場地或就近的大型運動場，例如「新莊體育館的面積是 10928 平方公尺」，比 1 公頃大一些。
- (5) 可以先與學生討論 1 公里有多大，由於 1 公里面積非常廣大無法直接觀察得到。建議教師舉例人人皆知的公共場地大小與 1 平方公里作比較，進而感知 1 平方公里的實際大小，例如「大安森林公園的面積是 25.894 公頃」，那麼「4 個大安森林公園的面積大約是 1 平方公里」；也可舉例所居住城市，以新北市為例，面積是 2053 平方公里。
- (6) 找出適當的面積單位：

- A. 一個操場的面積大約是 25 ( )。 答：公畝。
- B. 陽明山國家公園的面積大約是 113 ( )。 答：平方公里。
- C. 一所學校的面積大約是 3.6 ( )。 答：公頃。

D.一間教室的面積大約是 0.8 ( )。 答：公畝。

#### 4. 「平方公尺」、「公畝」、「公頃」與「平方公里」單位間的化聚

##### (1) 「平方公尺」與「公畝」單位間的化聚

- A.知道「1 公畝=100 平方公尺」，練習多少個 1 公畝是多少平方公尺，並將以公畝為單位的面積化為以平方公尺為單位，例如：2 公畝是多少平方公尺？
- B.知道「1 平方公尺=0.01 公畝」，練習將以平方公尺為單位的面積聚為以公畝為單位，例如：3 平方公尺是幾公畝？
- C.探究 1 平方公尺是多少公畝，教師可以帶領學生從「1 公畝=100 平方公尺」中明白 1 公畝是 100 個 1 平方公尺，那麼 1 個 1 平方公尺是  $\frac{1}{100}$  公畝，也就是 0.01 公畝，得到的結果是「1 平方公尺=0.01 公畝」。並將以平方公尺為單位的面積轉化為以公畝為單位，例如 2 平方公尺是多少公畝？20 平方公尺是多少公畝？

##### (2) 「平方公尺」與「公頃」單位間的化聚

- A.知道「1 公頃=10000 平方公尺」，練習多少個 1 公頃是多少平方公尺，並將以公頃為單位的面積化為以平方公尺為單位，例如：2 個 1 公頃是多少公頃？是多少平方公尺？
- B.知道「1 平方公尺=0.0001 公頃」，練習將以平方公尺為單位的面積聚為以公頃為單位，例如：10000 平方公尺是 1 公頃，30000 平方公尺是幾公頃？
- C.探究 1 平方公尺是多少公頃，教師可以帶領學生從「1 公頃=10000 平方公尺」中明白 1 公頃是 10000 個 1 平方公尺，那麼 1 個 1 平方公尺是  $\frac{1}{10000}$  公頃，也就是 0.0001 公頃，得到的結果是「1 平方公尺=0.0001 公頃」。並將以平方公尺為單位的面積聚為以公頃為單位，例如 2 平方公尺是多少公頃？20 平方公尺是多少公頃？200 平方公尺是多少公頃？

##### (3) 「公畝」與「公頃」單位間的化聚

- A.思考與探究「1 公頃是多少公畝」？並將以 1 公頃為單位的面積化為以平方公尺為單位，1 公畝為單位的面積化為以平方公尺為單位，可以得到「公畝」和「公頃」的關係是「1 公頃等於 100 公畝」。
- B.知道「1 公頃=100 公畝」，練習將以公頃為單位的面積化為以公畝為單位。例如：3 公頃是多少公畝？是多少平方公尺？
- C.知道「1 公畝=0.01 公頃」，練習將以公畝為單位的面積聚為以公頃為單位，例如：500 公畝是多少公頃？
- D.探究 1 公畝是多少公頃，教師可以帶領學生從「1 公頃=100 公畝」中明白 1 公頃是 100 個 1 公畝，那麼 1 個 1 公畝是  $\frac{1}{100}$  公頃，也就是 0.01 公頃，得到的結果是「1 公畝=0.01 公頃」。並將以公畝為單位的面積聚為以公頃為單位，例如 2 公畝是多少公頃？20 公畝是多少公頃？

##### (4) 「平方公尺」與「平方公里」單位間的化聚

- A.知道「1 平方公里=1000000 平方公尺」練習多少個 1 平方公里是多少平方公尺，並將以平方公里為單位的面積化為以平方公尺為單位，例如：2 個 1 平方公里是多少平方公里？是多少平方公尺？
- B.知道「1 平方公尺=0.000001 平方公里」練習將以平方公尺為單位的面積聚為以平方公里

為單位，例如：2 平方公尺是幾平方公里？

C.探究 1 平方公尺是多少平方公里，教師可以帶領學生從「1 平方公里=1000000 平方公尺」中明白 1 平方公里是 1000000 個 1 平方公尺，那麼 1 個 1 平方公尺是 $\frac{1}{1000000}$ 公頃，也就是 0.000001 公頃，得到的結果是「1 平方公尺=0.000001 平方公里」。並將以平方公尺為單位的面積聚為以平方公里為單位，例如 1 平方公尺是 0.000001 平方公里，3 平方公尺是幾平方公里？

D.綜合以上面積單位的關係和轉換，可以用以下的寫法來加深學生的概念：

$$\begin{array}{l} \uparrow(\times 100) \downarrow \\ 1 \text{ 公頃} = (\quad) \text{ 公畝} ; \\ \downarrow(\div 100) \uparrow \\ \\ \uparrow(\times 100) \downarrow \\ 1 \text{ 平方公里} = (\quad) \text{ 公頃} ; \\ \downarrow(\div 100) \uparrow \\ \\ \uparrow(\times 10000) \downarrow \\ 1 \text{ 平方公里} = (\quad) \text{ 公畝} 。 \\ \downarrow(\div 10000) \uparrow \end{array}$$

5.使用定位板，可以幫助學生做面積單位的轉換

(1) 1 平方公尺=10000 平方公分，是邊長 1 公尺圍成的正方形面積。

平方公尺				平方公分
1	0	0	0	0

(2) 1 公畝=100 平方公尺=1000000 平方公分，是邊長 10 公尺圍成的正方形面積。

公畝		平方公尺				平方公分
1	0	0	0	0	0	0

(3) 1 公頃=100 公畝=10000 平方公尺，是邊長 100 公尺圍成的正方形面積。

公頃		公畝		平方公尺
1	0	0	0	0

(4) 1 平方公里=100 公頃=10000 公畝，是邊長 1000 公尺圍成的正方形面積。

平方公里		公頃		公畝
1	0	0	0	0

#### (四) 本題教學的加強重點

利用面積定位板幫助學生加強「1 公頃=100 公畝」面積單位的轉換關係以及複名數中兩階單位的換算關係。

如：3 公頃=300 公畝。

公頃		公畝
3		

➔

公頃		公畝
3	0	0

1 公頃 90 公畝 = 190 公畝。

公頃		公畝
1	9	0

➔

公頃		公畝
1	9	0

在定位板中可以清楚的看出複名數中兩階單位的換算關係。可以從中讓學生發現 3 公頃也可以換成 2 公頃 100 公畝，如此即可以減去 1 公頃 90 公畝進行計算。也可以將 3 公頃換成 300 公畝，1 公頃 90 公畝換成 190 公畝，用 300 公畝減去 190 公畝可得 110 公畝，記在定位板上可換成 1 公頃 10 公畝。

公頃		公畝
1	1	0

➔

公頃		公畝
1	1	0

#### 四、命題建議

根據本條細目之內容主要涵括二個部分，建議教師在命題時可以參考如下：

##### (一)「公畝」、「公頃」、「平方公里」之間的關係與比較：

其中「公畝」與「公頃」在生活中較不常使用，教師在命題時，建議多配合生活情境，如：周邊公園的大小、學校操場的大小、教室大小...等，在學生熟悉的生活情境中使用這些大單位。

##### (二) 單位之間的換算與計算：

參考歷屆試題會發現，單位之間的換算與減法容易產生問題，會與公斤、公噸的換算相互混淆，命題時可以針對這個部分持續進行檢驗。

另外，從學生的答題可以發現，即使題目已經提供了單位關係，學生仍是憑藉記憶來解決問題。教師在平時測驗中，可以試著提供單位換算的關係，減少學生記憶的負擔，讓學生能夠確實練習運用題目給予的線索或工具來回答問題。

例：建築公司可以用 100 個 1 平方公尺的磁磚拼出 1 公畝的土地，若要拚出 2.5 公畝的土地，必須用到幾個 1 平方公尺的磁磚？是多少平方公尺？

## 五、歷屆試題

### (一) 104 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

花園的面積為 1 公畝，它的面積與下列哪一個的面積相同？

(1 公畝 = 100 平方公尺)

- ① 邊長為 10 公分的正方形貼紙
- ② 長 20 公尺，寬 5 公尺的長方形草皮
- ③ 邊長為 100 公尺的正方形農地
- ④ 長 1250 公尺、寬 800 公尺的長方形公園

選 項	1	2	3	4	其他	答案：2
選項率	0.13	0.66*	0.17	0.03	0.00	鑑別度：0.58 難易度：0.63
高分組	0.05	0.92	0.03	0.00	0.00	
低分組	0.20	0.34	0.36	0.09	0.01	

### (二) 105 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

有一塊正方形的土地面積是 1 公頃，這塊正方形土地的周長是多少？(1 公頃 = 10000 平方公尺)

- ① 100 公尺
- ② 400 公尺
- ③ 10000 公尺
- ④ 40000 公尺

選 項	1	2	3	4	其他	答案：2
選項率	0.25	0.23*	0.24	0.28	0.00	鑑別度：0.35 難易度：0.28
高分組	0.29	0.45	0.12	0.14	0.00	
低分組	0.18	0.10	0.33	0.38	0.00	

(三) 106 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

小傑有一塊 3 公頃的土地，其中的 1 公頃 90 公畝是遊樂區，其餘部分是購物中心。購物中心的面積是多少？（1 公頃=100 公畝）

- ① 1 公頃 10 公畝
- ② 1 公頃 910 公畝
- ③ 2 公頃 10 公畝
- ④ 4 公頃 90 公畝

選 項	1	2	3	4	其他	答案：1
選項率	0.70*	0.08	0.13	0.06	0.00	鑑別度：0.57 難易度：0.64
高分組	0.92	0.03	0.04	0.38	0.00	
低分組	0.35	0.17	0.27	0.20	0.00	

第 8 題 5-n-05

知識向度	數與計算	認知向度	解題思考																												
對應分年細目	5-n-05 能認識兩數的公因數、公倍數、最大公因數與最小公倍數。																														
題目	由「 $30 \div 6 = 5$ 」、「 $6 \times 12 = 72$ 」的算式，判斷下列敘述哪個正確？ ① 6是30和72的公因數。 ② 30是6和5的公因數。 ③ 30是6和12的公倍數。 ④ 72是6和30的公倍數。																														
答題表現 選項分析	<table border="1"> <thead> <tr> <th>選 項</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> <th>其他</th> <th>答案：1</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>選項率</td> <td>0.64*</td> <td>0.24</td> <td>0.07</td> <td>0.05</td> <td>0.00</td> <td>鑑別度：0.62 難易度：0.61</td> </tr> <tr> <td>高分組</td> <td>0.92</td> <td>0.07</td> <td>0.008</td> <td>0.002</td> <td>0.00</td> <td></td> </tr> <tr> <td>低分組</td> <td>0.30</td> <td>0.41</td> <td>0.17</td> <td>0.12</td> <td>0.00</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：1	選項率	0.64*	0.24	0.07	0.05	0.00	鑑別度：0.62 難易度：0.61	高分組	0.92	0.07	0.008	0.002	0.00		低分組	0.30	0.41	0.17	0.12	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：1																									
選項率	0.64*	0.24	0.07	0.05	0.00	鑑別度：0.62 難易度：0.61																									
高分組	0.92	0.07	0.008	0.002	0.00																										
低分組	0.30	0.41	0.17	0.12	0.00																										

一、試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.62，通過率為 0.64，難易度 0.61。

(二) 評量目標說明

本題是公倍數、公因數的相關問題，評量學生是否能透過乘法、除法算式判斷兩數的公因數及公倍數。

(三) 選項表現說明

1. 約有 64% 的學生選擇正確選項①，顯示將近六成四的學生可以透過乘法算式或除法算式，判斷三個數之間是公因數或公倍數的關係。
2. 約有 24% 的學生選擇選項②，這些學生在除法算式中的被除數、除數與商，三個數之間誰是誰的公因數、公倍數並不清楚，所以把 30 誤認為是 6 和 5 的公因數。
3. 約有 0.7% 的學生選擇選項③，這些學生被除法算式與乘法算式中的數字混淆了公因數、公倍數的概念，所以把 30 誤認為是 6 和 12 的公倍數。
4. 約有 0.2% 的學生選擇選項④，這些學生被除法算式與乘法算式中的數字混淆了公因數、公倍數的概念，所以把 72 誤認為是 6 和 30 的公倍數。

(四) 學生表現說明

1. 本題的目的在於評量學生是否能透過乘除關係，判斷各數之間的關係是公因數或公倍數。
2. 本題通過率為 0.64。有將近六成的學生能透過算式判斷三數之間是公倍數或公因數的關係；但仍有將近四成的學生無法順利判斷。從高分組與低分組學生的表現來看，約有 92% 的高分組學生能正確回答問題，只有不到一成的高分組學生無法判斷。而低分組學生只有 30% 回答正確，約有 70% 的低分組學生回答錯誤，顯示低分組學生由算式判斷數與數之間存在公因數或公倍數的概念並不十分清楚。

## 二、教材地位分析

### 97 課綱 (分年細目)

#### (一) 評量重點

5-n-05 能認識兩數的公因數、公倍數、最大公因數與最小公倍數。

#### (二) 先備的知識

5-n-01 能熟練整數乘、除的直式計算。

5-n-04 能理解因數和倍數。

#### (三) 延伸的知識

6-n-01 能認識質數、合數，並用短除法做質因數的分解（質數 $<20$ ，質因數 $<20$ ，被分解數 $<100$ ）。

6-n-02 能用短除法求兩數的最大公因數、最小公倍數。

### 十二年國教課綱 (學習內容)

#### (一) 評量重點

N-5-3 公因數和公倍數：因數、倍數、公因數、公倍數、最大公因數、最小公倍數的意義。

#### (二) 先備的知識

N-2-6 乘法：乘法的意義與應用。在學習乘法過程，逐步發展「倍」的概念，做為統整乘法應用情境的語言。

N-4-2 較大位數之乘除計算：處理乘數與除數為多位數之乘除直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。

#### (三) 延伸的知識

N-6-1 20 以內的質數和質因數分解：小於 20 的質數與合數。2、3、5 的質因數判別法。以短除法做質因數的分解。

N-6-2 最大公因數與最小公倍數：質因數分解法與短除法。兩數互質。運用到分數的約分與通分。

## 三、教學建議

#### (一) 評量核心概念

透過分別列舉因數、倍數的方式找出兩數的公因數、公倍數。

#### (二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. 基本概念的理解困難：「因數」、「倍數」、「公因數」、「公倍數」、「最大公因數」、「最小公倍數」等概念上的誤解，由於因數和倍數安排在同一個單元，許多學生更是在學習倍數之後就將因、倍數兩者的概念互相顛倒混淆，常見迷思如下：

(1) 基本名詞的混淆，例如誤以為「因數」是「倍數」，「倍數」是「因數」，或者誤以為是「最小公因數」和「最大公倍數」。

(2) 兩數關係的混淆，例如 12 是 84 的因數，是以前者(12)的角色來定義，但學生卻誤以後者(84)的角色來定義，而誤為 12 是 84 的倍數。

2. 計算時容易遺漏答案：因、倍數的單元是學生少數會利用列舉窮盡法來解題的單元，以往學生所經驗的數學題大多是針對兩個數字做加減乘除的運算，遇到因、倍數的單元，因、

倍數則是要逐一列舉合理的答案進行驗證，在不熟悉此種解題方式的狀況下，很容易缺漏答案。

- (1) 遇到數字較大的情況，例如 72，它的因數有 1、2、3、4、6、8、9、12、18、24、36、72 等十二個之多，稍不留意就會遺漏。
- (2) 部分學生未能利用除法算式的關係來簡化計算，即透過  $12 \div 2 = 6$  的計算同時也可得知  $12 \div 6 = 2$ ，利用前面的除法算式即可得到 2 和 6 兩個因數，不需要再計算後者，若學生未能理解及觀察到大部分的因數都是成對出現而簡化計算，將會花費過多時間求解且容易遺漏。

**3. 因倍數文字題理解困難：**大部分學生能解決因倍數的計算題，但面對文字題時卻有較多的困擾，無法發覺題目是需要運用因倍數的概念解題，或者無法判斷是需要運用因數或者倍數的概念解題。

- (1) 例如學生可以找出 24 的所有因數，但對於因數的應用問題「24 顆糖果要平分成每包一樣多，且要全部分完，有哪些分法？」卻無法用找因數的方式解題。
- (2) 求公因數的文字題對學生來說難度更高，例如學生可以找出 20 和 15 的公因數，但對於公因數的應用問題「20 個男生和 15 個女生要平分成幾組，各組的男生一樣多，各組的女生也要一樣多，可以分成幾組？」卻無法判斷是要用公因數來解題。

### (三) 核心概念的教學重點

#### 1. 公因數、最大公因數的教學：

- (1) 「公因數」即為兩數共有的因數，而「最大公因數」即為公因數中最大者。所以在進行公因數教學時，可先請學生分別列舉出兩數各自的因數，在兩數因數之間有相同者，即為兩數的公因數。例如：

18 的因數：1、2、3、6、9、18；

24 的因數：1、2、3、4、6、8、12、24。

18 與 24 相同的因數有 1、2、3、6，這些數即為兩數的「公因數」。而公因數中最大者，即為二數的「最大公因數」。以上面的例子為例，6 為 4 個公因數中最大者，因此 6 就是 18 和 24 的「最大公因數」。

- (2) 任何大於零的整數一定有 1 這個因數，而且是最小的因數，因此任意兩個整數的最小公因數必為 1。

#### 2. 公倍數、最小公倍數的教學：

「公倍數」即為兩數共有的倍數，而「最小公倍數」即為公倍數中最小者。以 18 和 24 為例：

18 的倍數：18、36、54、72、90、108、126、144……；

24 的倍數：24、48、72、96、120、144……。

18 與 24 相同的倍數有 72、144……，可以用列舉的方式找出兩數的公倍數。同時可以發現只要是 72 的倍數一定也會是 18 和 24 的公倍數，並引導學生發現能找的到 18 與 24 兩數的最小公倍數為 72，但找不到最大的公倍數。老師可以再舉例說明，讓學生發現任意兩個大於零的整數，只能找到最小公倍數，但找不到最大的公倍數。

#### 3. 將因倍數概念與生活情境連結：

進行因倍數教學時，應盡可能時時引導學生思考學習這個概念可以應用在生活中哪些地

方，並連結學生過去學習的經驗，讓學生發現使用因倍數概念是一種進階的解題方式，以下舉例說明之。

- (1) 因數：可運用在平分和分裝情境的問題，例如「50 顆糖果，要平分成幾包，全部分完不能有剩下，可以有幾種分法？」、「班上有 30 個人，幾個人一組可以剛好分完，不會有人剩下？」，學習因數之前學生也可以利用除法來解這樣的題目，現在將這樣的問題轉為用因數解題，較容易找出可能的所有答案。
- (2) 公因數：可用運在解決兩種物品需要同時平分和分裝的情境，或是有關面積的長寬問題，例如「50 顆糖果和 30 包餅乾，可以平分成幾包，全部分完不能有剩下，而且每包的糖果一樣多，餅乾也一樣多？」、「長 20 公分、12 公分的色紙，想把它全部剪成一樣大小的正方形，正方形的大小有幾種可能？」當學生無法直接把這樣的題目連結到運用公因數解題時，可以用分段佈題的方式「先找出平分 50 顆糖果的可能」、「再找出平分 30 包餅乾的可能」、「兩種物品一起分的時候」，讓學生透過操作或試誤了解使用公因數解題的原因。

#### (四) 本題教學的加強重點

透過乘、除法算式三數之關係，澄清因數、倍數的概念

「 $30 \div 6 = 5$ 」	「 $72 \div 6 = 12$ 」
「 $30 \div 5 = 6$ 」	「 $72 \div 12 = 6$ 」
「 $5 \times 6 = 30$ 」	「 $6 \times 12 = 72$ 」
「 $6 \times 5 = 30$ 」	「 $12 \times 6 = 72$ 」

題目中的算式三個數之間的關係只列出一條「 $30 \div 6 = 5$ 」、「 $6 \times 12 = 72$ 」，教師檢討教學時應再列出其他 3 條算式，讓學生透過除法算式清楚發現 30 可以 6 整除也可以被 5 整除，所以 30 的因數有 5 和 6，也就是被除數的因數有除數和商；另一方面透過乘法算式也可說明 5 的 6 倍是 30、6 的 5 倍是 30，30 是 6 和 5 共有的倍數，所以 30 是 6 和 5 的公倍數，非公因數。另外，公倍(因)數是兩數共同有的倍(因)數，要先有倍(因)數關係才可能存在公倍(因)數關係，當學生發現 72 不能被 30 整除，所以 72 不是 30 的倍數，也就不存在公倍數的關係。30 也不能被 12 整除，30 不是 12 的倍數，也就不存在公倍數的關係。

#### 四、命題建議

針對本能力指標能認識兩數的公因數、公倍數、最大公因數與最小公倍數，學生最容易產生迷思的部分是(一)混淆因數與倍數的定義及相關名詞，以及(二)不知道如何應用因數、倍數等相關概念，去解決生活中的問題。建議在評量時可從這兩個面向思考，減少計算題，例如：求某兩數的公因數、求某兩數的公倍數。評量題應讓學生反覆思考因數與倍數是如何定義的，生活情境中哪題地方可以應用因倍數概念，解決問題。以下從兩面向進行說明。

##### (一) 透過算式思考數字之間的關係，重新檢視因倍數的定義：

可參見 105 學年度數學能力檢測題。

例：從算式「 $52 \div 13 = 4$ 」可得知下列哪個敘述是正確的？

- ① 4 是 13 的因數
- ② 52 是 13 的因數
- ③ 4 和 13 是 52 的公因數

④ 52 是 4 和 13 的倍數

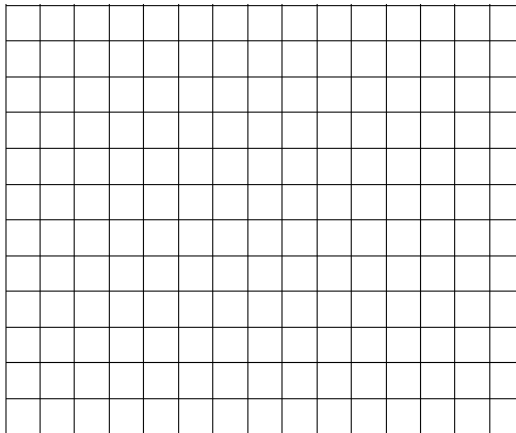
(二) 公因數與公倍數概念強調問題情境與數字之間的連結：

如下：107 學年度非選試題

柯南想要在一張長 15 公分、寬 12 公分的長方形圖畫紙上，用長 3 公分、寬 2 公分的長方形紙片，排出一個最大的正方形，請問他要用幾張長方形紙片？請寫下答案並說明你的做法。



長 3 公分、寬 2 公分的  
長方形紙片



長 15 公分、寬 12 公分的長方形圖畫紙

透過非選的作答說明，也較容易發現學生是因數或倍數概念出現了問題，也能發現學生在應用因倍數相關概念時產生了哪些迷思概念，教師可針對學生的迷思，提供補救教學策略以增進學生數學能力。

五、歷屆檢測試題參考

(一) 104 學年度數學能力檢測第 4 題

已知 54 是 6 的倍數，也是 9 的倍數，所以 54 是 6 和 9 的公倍數。  
下列哪一個數也是 6 和 9 的公倍數？

① 3  
② 36  
③ 60  
④ 63

選 項	1	2	3	4	其他	答案：2
選項率	0.18	0.77*	0.03	0.02	0.00	鑑別度：0.46
						難易度：0.73
高分組	0.03	0.96	0.00	0.00	0.00	
低分組	0.35	0.51	0.07	0.06	0.01	

(二) 105 學年度數學能力檢測第 3 題

下列敘述何者正確？

- ① 2 和 4 的最小公倍數是 8
- ② 2 和 4 的最小公因數是 2
- ③ 4 和 8 的最大公倍數是 32
- ④ 4 和 8 的最大公因數是 4

選 項	1	2	3	4	其他	答案：4
選項率	0.19	0.34	0.18	0.29*	0.00	鑑別度：0.49 難易度：0.34
高分組	0.12	0.24	0.06	0.59	0.00	
低分組	0.25	0.37	0.28	0.10	0.00	

(三) 106 學年度數學能力檢測第 2 題

用相同的小磁磚貼滿一個正方形的圖形，小磁磚的長、寬分別為 8 公分與 6 公分，貼出來的正方形邊長可能是幾公分？

- ① 14 公分
- ② 24 公分
- ③ 36 公分
- ④ 64 公分

選 項	1	2	3	4	其他	答案：2
選項率	0.16	0.62*	0.08	0.11	0.00	鑑別度：0.53 難易度：0.62
高分組	0.06	0.88	0.01	0.03	0.00	
低分組	0.26	0.35	0.18	0.20	0.00	

(四) 107 學年度數學能力檢測第 13 題

有一盒餅乾數量不到 60 片，每 6 片裝一盤、每 8 片裝一盤，都剛好分完。這一盒餅乾的數量，有幾種可能？

- ① 2 種
- ② 4 種
- ③ 7 種
- ④ 10 種

選 項	1	2	3	4	其他	答案：1
選項率	0.57*	0.22	0.12	0.08	0.00	鑑別度：0.55 難易度：0.58
高分組	0.86	0.08	0.04	0.03	0.00	
低分組	0.31	0.34	0.20	0.15	0.00	

第 9 題 5-n-19

知識向度	量與實測	認知向度	程序執行																															
對應分年細目	5-n-19 能認識體積單位「立方公尺」，及「立方公分」、「立方公尺」間的關係，並做相關計算																																	
題目	書櫃體積是2立方公尺，衣櫥體積是200000立方公分。下列敘述哪個正確？(1立方公尺=1000000立方公分) ① 衣櫥體積是書櫃體積的10倍。 ② 書櫃體積比衣櫥體積還要大。 ③ 衣櫥體積和書櫃體積一樣大。 ④ 衣櫥體積和書櫃體積加起來為 400000 立方公分。																																	
答題表現 選項分析	<table border="1"> <thead> <tr> <th>選 項</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> <th>其他</th> <th>答案：2</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>選項率</td> <td>0.10</td> <td>0.80</td> <td>0.06</td> <td>0.03</td> <td>0.00</td> <td>鑑別度：0.45 難易度：0.73</td> </tr> <tr> <td>高分組</td> <td>0.03</td> <td>0.96</td> <td>0.01</td> <td>0.01</td> <td>0.00</td> <td></td> </tr> <tr> <td>低分組</td> <td>0.20</td> <td>0.50</td> <td>0.18</td> <td>0.11</td> <td>0.00</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>						選 項	1	2	3	4	其他	答案：2	選項率	0.10	0.80	0.06	0.03	0.00	鑑別度：0.45 難易度：0.73	高分組	0.03	0.96	0.01	0.01	0.00		低分組	0.20	0.50	0.18	0.11	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：2																												
選項率	0.10	0.80	0.06	0.03	0.00	鑑別度：0.45 難易度：0.73																												
高分組	0.03	0.96	0.01	0.01	0.00																													
低分組	0.20	0.50	0.18	0.11	0.00																													

一、試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.45，通過率為 0.80，難易度 0.73。

(二) 評量目標說明

本題是要求學生能利用 1 立方公尺 = 1000000 公分的關係，來進行立方公尺和立方公分之間的換算，評量學生是否理解給定不同體積單位時，可以用體積關係換算成同單位再進行計算。

(三) 選項表現說明

1. 有 80% 的學生選擇正確選項②，顯示有 8 成的學生可以利用立方公尺和立方公分之間的關係，將不同體積單位先換算成同單位再進行比較或計算。
2. 有 10% 的學生選擇選項①，這些學生可以將書櫃體積先換算為立方公分，但可能混淆比較量與基準量，誤以為數字比較大的(書櫃體積二百萬立方公分)是比較量，而數字比較小的(衣櫥體積二十萬立方公分)是基準量，因此選擇 10 倍。
3. 有 6% 的學生選擇選項③，這些學生可能在換算過程中出錯，將書櫃體積換算為二十萬立方公分，或可能將衣櫥體積誤讀為二百萬立方公分，因此認為衣櫥體積與書櫃體積相同。
4. 有 3% 的學生選擇選項④，這些學生可能在換算過程中出錯，將書櫃體積換算為二十萬立方公分，因此加上衣櫥體積共計四十萬立方公分。

(四) 學生表現說明

1. 本題通過率為 80%，表示已有 8 成的學生已能利用立方公尺和立方公分之間的關係進行不同體積單位的換算。
2. 然而在題目已提供 1 立方公尺 = 1000000 公分的條件下，仍有 2 成的學生無法正確答題，其中 1 成的學生是混淆基準量與比較量，多數學生習慣將數字較大的當作比較量，另外 1 成

的學生是換算過程出錯，由於一立方公尺等同於一百萬立方公分，一百萬為學生較少使用的大數，漏寫 0 的機率較高。從高分組與低分組學生的表現來看，96% 的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生只有 50% 回答正確，低分組學生的最多的錯誤類型是混淆基準量與比較量，顯見在題目語意的理解上面需要加強。

## 二、教材地位分析

### 97 課綱（分年細目）

#### （一）評量重點

5-n-19 能認識體積單位「立方公尺」、「立方公分」及「立方公尺」間的關係，並做相關計算。

#### （二）先備的知識

2-n-15 能認識長度單位「公分」、「公尺」及其關係，並能做相關的實測、估測與同單位的計算。

3-n-14 能認識長度單位「毫米」及「公尺」、「公分」、「毫米」間的關係，並做相關的實測、估測與計算。

4-n-19 能認識體積及體積單位「立方公分」。

#### （三）延伸的知識

6-n-15 能理解簡單直柱體的體積為底面積與高的乘積。

### 十二年國教課綱（學習內容）

#### （一）評量重點

S-5-5 正方體和長方體：計算正方體和長方體的體積與表面積。正方體與長方體的體積公式。

N-5-14 體積：「立方公尺」。簡單實測、量感、估測與計算。

#### （二）先備的知識

N-2-11 長度：「公分」、「公尺」。實測、量感、估測與計算。單位換算。

S-4-4 體積：以具體操作為主。在活動中認識體積的意義與比較。認識 1 立方公分之正方體，能理解並計數正方體堆疊的體積。

N-4-12 體積與「立方公分」：以具體操作為主。體積認識基於 1 立方公分之正方體。

#### （三）延伸的知識

S-6-4 柱體體積與表面積：含角柱和圓柱。利用簡單柱體，理解「柱體體積＝底面積×高」的公式。簡單複合形體體積。

## 三、教學建議

#### （一）評量核心概念

體積單位的換算及計算（1 立方公尺＝1000000 立方公分）。

#### （二）學生常見的錯誤類型／迷思概念

「體積單位」與「長度單位」、「面積單位」混淆不清：誤認為體積單位是公分(公尺)或平方公分(平方公尺)，又因為 1 公尺＝100 公分、1 平方公尺＝10000 平方公分，而誤用 1 立方公尺＝100 立方公分或 1 立方公尺＝10000 立方公分。

「立方公尺」與「立方公分」大小關係混淆不清：認為1立方公分比1立方公尺大，而誤用1立方公分=1000000立方公尺。

### (三) 核心概念的教學重點

1. **長度、面積與體積單位的澄清討論**：學生在低年級時接觸到長度單位公分及公尺，中年級時學習面積單位平方公分、平方公尺及體積單位立方公分，到了五年級學習更大的體積單位立方公尺後，學生容易將這些單位混淆在一起，老師可以幫助學生進行統整釐清。  
例：請學生舉例說明6公分、6平方公分、6立方公分可能是什麼物品的單位？要如何做出上面三種不同單位的物品？接著請學生利用公分尺、平方公分板與1立方公分小積木分別做出6公分、6平方公分與6立方公分，讓學生發現從長度、面積到體積是一維、二維、三維的變化，因而相對應的單位也有所不同。
2. **提供立方公尺與立方公分單位轉換的操作活動**：1立方公尺對學生來說較為抽象，教師可以準備紙箱或利用6片面積為1平方公尺的巧拼地墊來製作體積為1立方公尺的箱子。教師除了可以透過思考1立方公尺的箱子每邊可以鋪排幾個1立方公分小積木討論1立方公尺如何換算成立方公分外，由於使用1立方公分小積木來實際鋪排1立方公尺的箱子較為困難，教師可以讓每位學生製作邊長為10公分、體積為1000立方公分的正方體紙盒，利用這些紙盒進行堆疊，請學生紀錄1立方公尺的箱子，需要用幾個正方體紙盒才能放滿。學生可以發現一層是一排用了10個正方體紙盒，排了10排，共用了 $10 \times 10 = 100$ 個立體紙盒，也就是 $100$ （立方公分） $\times 1000$ （個） $= 100000$ 立方公分，所以1立方公尺的箱子的體積是1000000立方公分，透過這樣的操作活動來強化立方公尺與立方公分互換的經驗。

### (四) 本題教學的加強重點

1. **幫助學生理解一立方公尺如何換成一百萬立方公分**：立方公尺與立方公分的換算，若學生是用死記硬背的方式或是利用題目所給資訊來進行答題，很有可能因為背錯或是看錯而無法正確解題，教師應引導學生能以下列兩種方式清楚說明立方公尺如何換成立方公分(1)因為1立方公尺的箱子每邊可以排列100個1立方公分小積木，一層有100排，總共有100層，總共就有 $100 \times 100 \times 100 = 1000000$ 個1立方公分小積木，也就是1000000立方公分。(2)因為1立方公尺的箱子每邊長1公尺，也就是100公分，可利用體積公式求出 $100 \times 100 \times 100 = 1000000$ ，也就是1000000立方公分。
2. **澄清基準量與比較量語意**：當兩量進行比較時，學生習慣將數字比較大的當作比較量，也習慣兩量之間的倍數關係是大於1的整數倍，因此教師可以簡化數字幫助學生思考。例如有甲、乙兩個盒子，甲盒子的體積是1000立方公分，乙盒子的體積是100立方公分，先問學生說哪個盒子比較大？接著問甲盒子體積是乙盒子體積的幾倍？再問乙盒子體積是甲盒子體積的幾倍？讓學生發現比較量比基準量小的時候，兩量之間的關係不會是大於1的整數倍才合理。

## 四、命題建議：

(一) 本條目在今年的答對率為最高，達到八成，可以發現若直接進行兩物品的體積比較，則學生的答對率較高，教師可以透過這樣的題型確認學生是否具備體積單位互換的能力。

### ◎命題範例

有甲乙兩個紙箱，甲紙箱體積為320000000立方公分，乙紙箱體積為34立方公尺，關於這兩個紙箱的敘述，何者為正確？(1立方公尺=1000000立方公分)

- ① 甲紙箱比較大
- ② 乙紙箱比較大
- ③ 兩個紙箱的體積合起來是66立方公尺
- ④ 甲紙箱的體積也可以說是32立方公尺

(二) 然而分析前五年的能力檢測同樣指標命題的答對率只有五到六成(參見五、歷屆試題參考)，

可以發現若給定邊長讓學生計算體積後再換算體積單位，則學生的答對率立刻降低，顯見不同長度單位的邊長，對學生進行體積單位的換算會造成混淆，因此教師命題可以從此方向著手，了解學生是否在長度和體積的計算仍有困難。

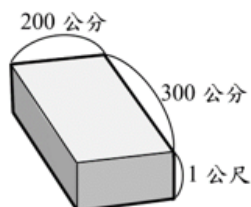
◎命題範例參見 104 學年度第 22 題

## 五、歷屆檢測試題參考：

### (一) 106 學年度第 20 題

有一個長方體(如下圖)，它的體積是多少立方公尺？

(1 公尺=100 公分，1 立方公尺=1000000 立方公分)



- ① 0.06 立方公尺
- ② 6 立方公尺
- ③ 600 立方公尺
- ④ 60000 立方公尺

選 項	1	2	3	4	其他	答案：2
選項率	0.10	0.65*	0.08	0.14	0.00	鑑別度：0.59 難易度：0.61
高分組	0.06	0.90	0.01	0.03	0.00	
低分組	0.15	0.31	0.21	0.33	0.00	

(二) 105 學年度第 15 題

一個邊長 1 公尺的正方體，它的體積和多少個 1 立方公分的小正方體一樣大？（1 公尺=100 公分）

- ① 100 個
- ② 1000 個
- ③ 10000 個
- ④ 1000000 個

選 項	1	2	3	4	其他	答案：4
選項率	0.27	0.06	0.14	0.53*	0.00	鑑別度：0.59 難易度：0.55
高分組	0.06	0.01	0.09	0.84	0.00	
低分組	0.44	0.13	0.17	0.25	0.00	

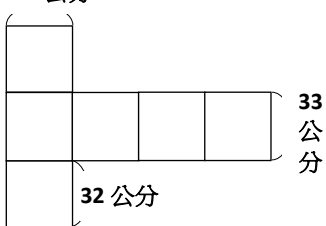
(三) 104 學年度第 22 題

每邊長 3 公尺的正方體，體積是多少立方公分？（1 公尺=100 公分）

- ① 90000 立方公分
- ② 9000000 立方公分
- ③ 270000 立方公分
- ④ 27000000 立方公分

選 項	1	2	3	4	其他	答案：4
選項率	0.16	0.19	0.13	0.52*	0.01	鑑別度：0.61 難易度：0.51
高分組	0.06	0.09	0.03	0.81	0.00	
低分組	0.29	0.25	0.24	0.21	0.01	

第 10 題 5-n-20

知識向度	量與實測	認知向度	概念理解																															
對應	5-n-20 能理解長方體和正方體體積的計算公式，並能求出長方體和正方體的表面積。(同 5-s-07)																																	
題目	<p>一個立體形體展開後如下圖，下列敘述哪個正確？</p> <p>①這是一個正立方體的展開圖。            ②立體形體的表面積是<math>32 \times 32 \times 6</math>(平方公分)。            ③立體圖形的表面積是<math>32 \times 32 \times 33</math>(平方公分)。            ④立體圖形的體積是<math>32 \times 32 \times 33</math>(立方公分)。</p> 																																	
答題表現 選項分析	<table border="1"> <thead> <tr> <th>選 項</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> <th>其他</th> <th>答 案</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>選 項 率</td> <td>0.20</td> <td>0.11</td> <td>0.10</td> <td>0.59*</td> <td>0.00</td> <td>鑑別度：0.62 難易度：0.57</td> </tr> <tr> <td>高 分 組</td> <td>0.06</td> <td>0.03</td> <td>0.03</td> <td>0.88</td> <td>0.00</td> <td></td> </tr> <tr> <td>低 分 組</td> <td>0.34</td> <td>0.20</td> <td>0.20</td> <td>0.26</td> <td>0.00</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>						選 項	1	2	3	4	其他	答 案	選 項 率	0.20	0.11	0.10	0.59*	0.00	鑑別度：0.62 難易度：0.57	高 分 組	0.06	0.03	0.03	0.88	0.00		低 分 組	0.34	0.20	0.20	0.26	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答 案																												
選 項 率	0.20	0.11	0.10	0.59*	0.00	鑑別度：0.62 難易度：0.57																												
高 分 組	0.06	0.03	0.03	0.88	0.00																													
低 分 組	0.34	0.20	0.20	0.26	0.00																													

一、試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.62，通過率為 0.59，難易度 0.57。

(二) 評量目標說明

本題旨在評量學生是否能判讀展開圖為何種立體形體，並據此進行表面積與體積的計算，因此以選項①、②作為誤判為正方體的誘答，以選項③作為將體積公式誤認為表面積公式的誘答。

(三) 選項表現說明

1. 有 59% 的學生選擇正確選項④，顯示有近六成左右的學生可以透過觀察展開圖中長、寬、高的數字來判斷可以組合成為長方體，並知道如何計算長方體的體積。
2. 有 20% 的學生選擇選項①，學生可能只有以視覺來判斷，誤以為展開圖全部是由正方形組成，所以是正立方體的展開圖，而忽略了長、寬、高的數字並不完全相同。
3. 有 11% 的學生選擇選項②，學生雖然知道如何正確計算表面積，卻忽略了此為一長方體，因此展開圖中有正方形的面也有長方形的面，應該分別計算。
4. 有 10% 的學生選擇選項③，這些學生混淆體積與表面積的計算，誤以為表面積的計算是長×寬×高。

#### (四) 學生表現說明

- 1.本題的通過率為 0.59，顯示有約六成的學生能仔細判讀展開圖，同時也能清楚區辨體積與表面積的計算方式不同。根據學生作答情形，只有四成的學生未能判讀展開圖，或混淆體積與表面積計算。
- 2.以組別來看，低分組有 34%及高分組有 6%的學生選擇錯誤選項①，這些學生誤以為展開圖是由正方形組成，因此判斷此為正立方體的展開圖，顯見學生認為看起來像正方形就是正方形，沒有確認邊長是否等長的習慣。低分組有 20%及高分組有 3%的學生選擇錯誤選項②，這些學生的迷思可能和選擇選項①的學生相同，誤將展開圖判斷為正立方體，所以造成計算錯誤。低分組有 20%及高分組有 3%的學生選擇錯誤選項③，這些學生可能已正確判斷此為長方體，但卻因為混淆體積與表面積的計算，而將表面積計算誤為體積計算。

## 二、教材地位分析

### 97 課綱 (分年細目)

#### (一) 評量重點

5-n-19 能認識體積單位「立方公尺」、「立方公分」及「立方公尺」間的關係，並做相關計算。

5-n-20 能理解長方體和正方體體積的計算公式，並能求出長方體和正方體的表面積。

#### (二) 先備的知識

2-n-15 能認識長度單位「公分」、「公尺」及其關係，並能做相關的實測、估測與同單位的計算。

3-n-14 能認識長度單位「毫米」及「公尺」、「公分」、「毫米」間的關係，並做相關的實測、估測與計算。

4-n-19 能認識體積及體積單位「立方公分」。

#### (三) 延伸的知識

6-n-15 能理解簡單直柱體的體積為底面積與高的乘積。

### 十二年國教課綱 (學習內容)

#### (一) 評量重點

S-5-5 **正方體和長方體**：計算正方體和長方體的體積與表面積。正方體與長方體的體積公式。

N-5-14 **體積**：「立方公尺」。簡單實測、量感、估測與計算。

#### (二) 先備的知識

N-2-11 **長度**：「公分」、「公尺」。實測、量感、估測與計算。單位換算。

S-4-4 **體積**：以具體操作為主。在活動中認識體積的意義與比較。認識 1 立方公分之正方體，能理解並計數正方體堆疊的體積。

N-4-12 **體積與「立方公分」**：以具體操作為主。體積認識基於 1 立方公分之正方體。

#### (三) 延伸的知識

S-6-4 **柱體體積與表面積**：含角柱和圓柱。利用簡單柱體，理解「柱體體積＝底面積×高」的公式。簡單複合形體體積。

### 三、教學建議

#### (一) 評量核心概念

判讀展開圖所提供的資訊，計算立方體(正方體與長方體)的體積與表面積。

#### (二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1.混淆立方體(長方體或正方體)之體積與表面積的概念與計算：體積指的是立方體所占空間的大小，透過堆疊1立方公分的小正方體積木，並計算其數量引入體積公式。表面積是指立方體所有表面的面積總和，透過觀察立方體的六個面或展開圖來進行計算。由於兩者的計算皆須利用長、寬、高的數值，學生容易將兩者的概念與計算混淆，尤其部分學生熟記計算公式而不理解概念，常常會產生誤用公式的情形。

2.混淆立方體(長方體或正方體)之體積與表面積的單位：體積是由1立方公分(或立方公尺)的正方體堆疊而成，因此單位是立方公分，表面積則是由1平方公分(或平方公尺)的正方形鋪排而成，因此單位是平方公分，若學生未充分理解兩者的差異，也常常會產生誤用單位的情形。

#### (三) 核心概念的教學重點

1.透過堆疊的操作活動建立體積的概念與公式：學生在四年級時已透過堆疊1立方公分積木來點數體積大小，五年級時仍可提供1立方公分積木，讓學生先堆疊出正方體或長方體，再引導學生明白長、寬、高代表的是各邊小正方體積木的數量，需要先計算一層的積木數量(長×寬)，再算所有層數共有多少個(×高)，所以是將長、寬、高的長度先轉換為1立方公分積木的數量再進行計算，而非是長、寬、高的長度相乘。

2.透過切割的操作活動建立表面積的概念與公式：表面積的學習首先透過拆解正方體或長方體的盒子，剪出展開圖後，觀察展開圖是由六個平面所組成，計算這六個平面的面積總和即為表面積，並引導學生發現正方體的表面積可以有簡化計算的方式(邊長×邊長×6)。另外由於面積的大小是1平方公分正方形紙片覆蓋的總數量，也要再次提醒學生計算面積是將長度先轉換為1平方公分正方形紙片的數量，再進行計算，而非是長度的數字相乘。

3.體積與表面積的區辨討論活動：學生在學習完體積和表面積之後時常容易產生混淆的狀況，有些版本的教科書會將體積與表面積分開為兩個單元，教師可以在兩個單元都學習完之後，統整布題加強兩者的區辨。

例：美美的生日快到了，小華摺了1000顆紙星星要送給美美，已知所有紙星星的體積是1600立方公分。小華到文具店挑選紙盒要裝紙星星，發現有甲、乙兩種尺寸的紙盒如下圖。



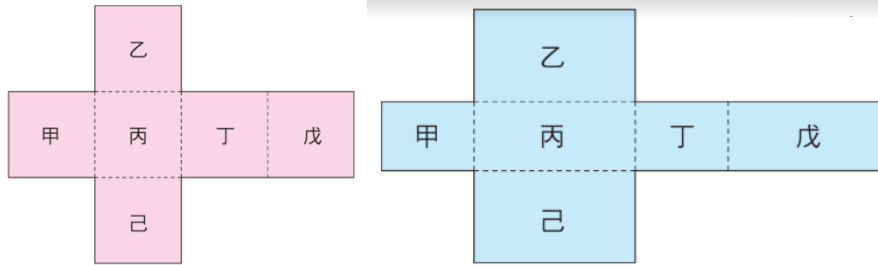
(1) 哪一個紙盒才可以裝得下所有紙星星呢？

(2) 小華準備了面積是870平方公分的包裝紙，哪一個紙盒才適用這些包裝紙呢？

#### (四) 本題教學的加強重點

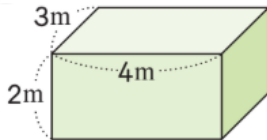
1.觀察各種不同的展開圖，判斷展開圖可以組合成何種形體(限正方體與長方體)：

教師提供多種不同類型的展開圖，讓學生自行觀察展開圖的六個面，判讀可以組成何種形體，其中可以包含如同本題類型的長方體，讓學生發覺僅僅靠視覺觀察仍然會有誤判的可能，實際測量展開圖的各個邊長更有助於精準的判讀。



## 2. 透過展開圖來進行體積與表面積的計算：

學生一般是直接利用立方體的視圖(如下圖)來計算體積，較少有透過展開圖來計算體積的經驗，教師可以提供一立方體盒子的展開圖，讓學生摺成立方體先討論最少需要知道哪些邊的長度就可以計算出盒子的體積與表面積，再實際計算體積與表面積的大小。



## 四、命題建議：

本條目在這五年的命題類型，完全不同(參見五、歷屆試題參考)，除本年度的通過率較高為近六成外，其餘年度的通過率皆不達五成，學生在單純計算體積、表面積大小、應用的題目上已表現不佳，若是再加入立體圖形的切割、比較，通過率則更低，所以在命題建議上，應聚焦在學生是否能理解、分辨「面積」、「體積」及「表面積」這些量的意涵與差別，包含面積/表面積、體積單位的不同。下面提供兩題範例：

1. 有一個邊長為 4 公分的正方體，請問正方體的表面積為多少平方公分？

- ① 4   ② 16   ③ 64   ④ 96

2. 有一個邊長為 6 公分的正方體，這個正方體的表面積是 216 ██████，被 ██████ 遮住的單位應該填什麼才對？

- ① 毫公分   ② 公分   ③ 平方公分   ④ 立方公分

## 五、歷屆檢測試題參考：

### (一) 107 學年度第 23 題

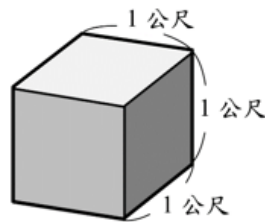
有甲乙兩個正立方體，甲的邊長為 2 公分，乙的邊長為 6 公分，比較其表面積，下列敘述哪個正確？

- ① 甲的表面積為 8 平方公分
- ② 乙的表面積為 36 平方公分
- ③ 乙的表面積為甲的 3 倍
- ④ 乙的表面積為甲的 9 倍

選 項	1	2	3	4	其他	答案：4
選項率	0.17	0.12	0.21	0.49*	0.00	鑑別度：0.65 難易度：0.51
高分組	0.07	0.03	0.07	0.83	0.00	
低分組	0.28	0.21	0.32	0.18	0.00	

### (二) 106 學年度第 27 題

右圖中正方體的體積，與幾個邊長 20 公分的正方體一樣大？  
(1 公尺 = 100 公分)

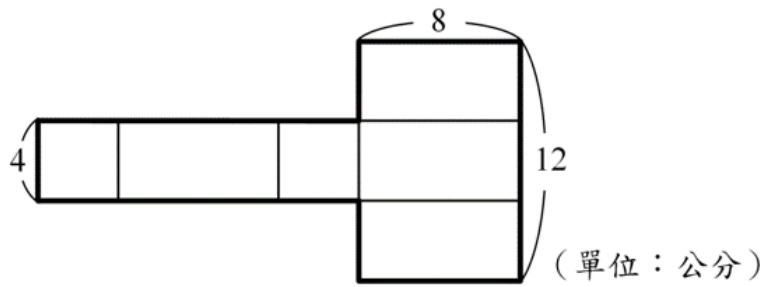


- ① 5 個
- ② 125 個
- ③ 2500 個
- ④ 50000 個

選 項	1	2	3	4	其他	答案：2
選項率	0.20	0.40*	0.12	0.26	0.02	鑑別度：0.44 難易度：0.46
高分組	0.09	0.68	0.05	0.18	0.00	
低分組	0.29	0.24	0.23	0.24	0.00	

(三) 105 學年度第 11 題

下圖為一個長方體的展開圖，這個長方體的體積是多少立方公分？

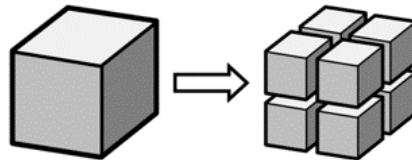


- ① 128 立方公分
- ② 160 立方公分
- ③ 256 立方公分
- ④ 384 立方公分

選 項	1	2	3	4	其他	答案：1
選項率	0.31*	0.18	0.07	0.45	0.00	鑑別度：0.42 難易度：0.34
高分組	0.55	0.14	0.02	0.29	0.00	
低分組	0.13	0.18	0.13	0.55	0.00	

(四) 104 學年度第 25 題

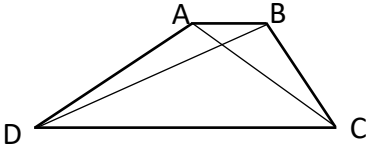
將邊長 2 公分的正方體分割成 8 個邊長 1 公分的小正方體（如下圖），分割後所有的小正方體的表面積是原來正方體表面積的多少倍？



- ①  $\frac{1}{8}$  倍
- ② 1 倍
- ③ 2 倍
- ④ 8 倍

選 項	1	2	3	4	其他	答案：3
選項率	0.30	0.10	0.28*	0.31	0.01	鑑別度：0.37 難易度：0.34
高分組	0.20	0.08	0.53	0.19	0.00	
低分組	0.34	0.11	0.15	0.38	0.02	

第 11 題 5-s-05

知識向度	幾何	認知向度	解題思考																														
對應分年細目	5-s-05 平行四邊形及三角形複合圖形面積的問題。																																
題目	<p>一個梯形ABCD(如下圖)，邊CD的長度是邊AB的長度的4倍，三角形ACD的面積是三角形ABD的幾倍？</p>  <p>①2 倍    ②3 倍    ③4 倍    ④8 倍</p>																																
答題表現 選項分析	<table border="1"> <thead> <tr> <th>選 項</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> <th>其他</th> <th>答案：3</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>選項率</td> <td>0.14</td> <td>0.13</td> <td>0.53*</td> <td>0.20</td> <td>0.00</td> <td>鑑別度：0.46 難易度：0.53</td> </tr> <tr> <td>高分組</td> <td>0.07</td> <td>0.08</td> <td>0.76</td> <td>0.09</td> <td>0.00</td> <td></td> </tr> <tr> <td>低分組</td> <td>0.21</td> <td>0.20</td> <td>0.30</td> <td>0.29</td> <td>0.00</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>					選 項	1	2	3	4	其他	答案：3	選項率	0.14	0.13	0.53*	0.20	0.00	鑑別度：0.46 難易度：0.53	高分組	0.07	0.08	0.76	0.09	0.00		低分組	0.21	0.20	0.30	0.29	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：3																											
選項率	0.14	0.13	0.53*	0.20	0.00	鑑別度：0.46 難易度：0.53																											
高分組	0.07	0.08	0.76	0.09	0.00																												
低分組	0.21	0.20	0.30	0.29	0.00																												

一、試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.46，通過率為 0.53，難易度 0.53。

(二) 評量目標說明

本題旨在測驗學童是否能從題目中理解三角形面積和底與高有關：在同高的情況下底的長度比就是面積的大小比。

(三) 選項表現說明

- 1.本題僅約 53%學生選擇正確選項③，顯示許多學生能掌握三角形 ACD 的面積是三角形 ABD 的幾倍與邊長相同都是 4 倍而選擇選項③。
- 2.有 21%的學生選擇選項④，這些學生被公式誤導，雖然三角形面積的公式是底×高÷2，但是利用邊長比來反推面積，則必須還原動作再×2， $4 \times 2 = 8$ 而選擇選項④。
- 3.有 14%學生選擇選項①，這些學生被公式誤導，認為面積必須再÷2，雖然同一長度的高，但是底面長度轉換到高的倍數後，需要如同公式再÷2， $4 \div 2 = 2$ ，而選擇選項①。
- 4.有 13%的學生選擇選項②，這些學生認為三角形 ACD 的面積是三角形 ABD 的幾倍時是兩個底邊的長度相減， $4 - 1 = 3$ ，而選擇選項②。

(四) 學生表現說明

- 1.本題的命題設計中，希望學生除了能理解三角形面積公式=底×高÷2外，更可以理解當三角形高一樣時，底的長度倍數也是三角形面積的倍數，而不管幾個三角形而在公式「÷2」都是需要做的動作而不影響其三角形面積的倍數

2.本題難易度為 0.53 只有將近五成三的學生通過。高分組通過的比率为 76%，表示大部分高分組的學生都能掌握，而低分組 4 個選項選的人都很平均，可見再 $\div 2$ 的問題上，50%學生不理解。這是老師教學除了公式外，更需要讓學生理解每個算式的意義。

## 二、教材地位分析

### 97 課綱（分年細目）

#### （一）評量重點

5-s-05 平行四邊形及三角形複合圖形面積的問題。（同 5-n-18）。

#### （二）先備的知識

4-n-18 能理解長方形和正方形的面積公式與周長公式。

4-s-07 能認識平行四邊形和梯形。

#### （三）延伸的知識

6-s-05 能理解簡單直柱體的體積為底面積與高的乘積。

### 十二年國教課綱（學習內容）

#### （一）評量重點

S-5-2 三角形與四邊形的面積：操作活動與推理。利用切割重組，建立面積公式，並能應用。

#### （二）先備的知識

N-3-14 面積：「平方公分」。實測、量感、估測與計算。

S-4-3 正方形與長方形的面積與周長：理解邊長與周長或面積的關係，並能理解其公式與應用。簡單複合圖形。

S-4-7 三角形：以邊與角的特徵認識特殊三角形並能作圖。如正三角形、等腰三角形、直角三角形、銳角三角形、鈍角三角形。

#### （三）延伸的知識

S-6-4 柱體體積與表面積：含角柱和圓柱。利用簡單柱體，理解「柱體體積 = 底面積 $\times$ 高」的公式。簡單複合形體體積。

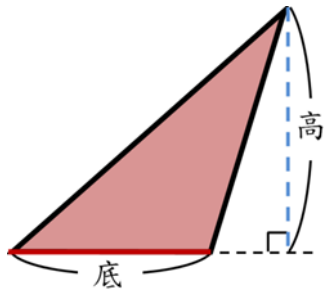
## 三、教學建議

#### （一）評量核心概念

由實際切割重組中，認識三角形的面積公式 = (底 $\times$ 高) $\div 2$ 。

#### （二）學生常見的錯誤類型／迷思概念

- 1.無法利用三角形面積公式反推求高或底：三角型的面積公式為「底 $\times$ 高 $\div 2$ 」，如果只求三角形面積時，學生較容易利用三角型的面積公式求出三角形面積。但反推求高或底時，常常忘記三角形面積要 $\times 2$ ，才能求出正確的高或底。
- 2.無法找出在三角形外的高：學生遇到求三角形面積時，對於如何畫出三角形的高不是非常清楚。如果可以從頂點順利做垂直線段到底邊，便能找出三角形的高。但如果是如【圖 28-1】的三角形，便無法找出三角形的高，因此也無法順利求出三角形的面積。



【圖 11-1】

(三) 核心概念的教學重點

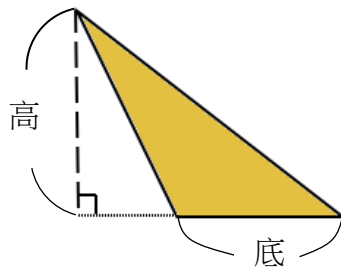
1. 國小五年級的學生，對於平行四邊形面積公式的由來及意義應該較易熟悉。一般來說，可以利用切割及拼湊的方式將三角形，變形成平行四邊形後導出三角形面積公式，並探討如何找出三角形的高及底。

2. 接下來可分為兩個面向探討：

- (1) 知道面積及其中一個底邊長度如何找出對應的高及其長度。
- (2) 底或高其中一個固定另一個改變後，面積會如何改變及其之間的關係。

3. 知道面積及其中一個底邊長度如何找出對應的高及其長度：

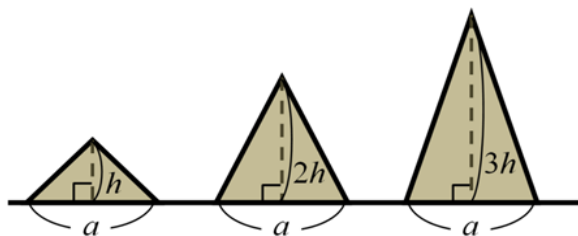
學生知道三角形的面積公式為「 $\text{底} \times \text{高} \div 2$ 」，和學生探討利用已知的面積和底邊的長度求出對應高的長度。如【圖 11-2】，如果知道三角形的面積及底邊的長度必須知道要將三角形的面積先 $\times 2$ ，找出由兩個相同的三角形所拼成的平行四邊形面積。



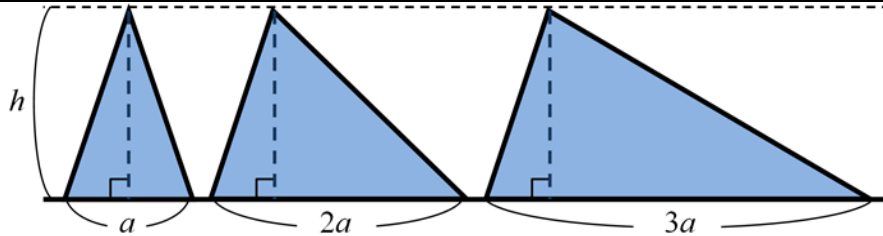
【圖 11-2】

4. 底或高其中一個固定另一個改變後，面積會如何改變及其之間的關係：

學生知道三角形的面積公式為「 $\text{底} \times \text{高} \div 2$ 」之後，再和學生探討當三角形的底不變，高增加幾倍，三角形的面積就會變為原來面積的幾倍，如【圖 11-3】，三角形的高不變，底增加幾倍，三角形的面積就會變為原來面積的幾倍。如【圖 11-4】。



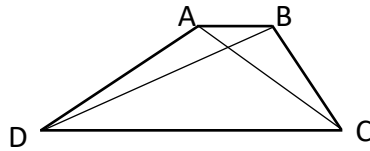
【圖 11-3】



【圖 11-4】

(四) 本題的教學重點

1.讓學生回想三角形面積的計算公式為(底×高)÷2。



2.梯形 ABCD 中，在邊 AB 及邊 CD 之間做一條垂直線為梯形 ABCD 的高，也是三角形 ABD 和三角形 ACD 的高

3.引導從公式中理解三角形 ABD 面積=邊 AB 長度×高÷2。

$$\text{三角形 ACD 面積}=\text{邊 CD 長度}\times\text{高}\div 2$$

兩個三角形的高相同並且同時÷2。

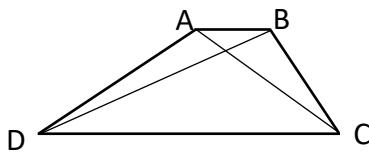
4.因為三角形高相同，底邊變為原來的幾倍，面積就會變為原來的幾倍，所以三角形 ACD 的面積是三角形 ABD 面積的 4 倍。

四、命題建議

(一) 老師可以改為給予梯形 ABCD，給定三角形 ABD 面積和邊 AB 和邊 CD 的倍數，找出三角形 ACD 的面積。

(二) 或給三角形 ABC 面積，求三角形 ACD 面積。

(三) 或是給定兩個三角形面積如三角形 ACD 是 20 平方公分，三角形 ABD 是 5 平方公分，若邊 AB 是 4 公分，求邊 CD 是幾公分？



## 五、歷屆試題

### (一) 國家教育研究院 2014 年協助縣市辦理學生學習能力檢測—國小五年級數學科試題

7. 平行四邊形甲的底是 6 公分，高是 4 公分，平行四邊形乙的底是甲的 2 倍，高是甲的 3 倍，請問平行四邊形乙的面積為甲的多少倍？  
 ① 2    ② 3    ③ 5    ④ 6

選項    1        2        3        4        其他    答案：4

選項率 0.07   0.07    0.12    0.72    0.00

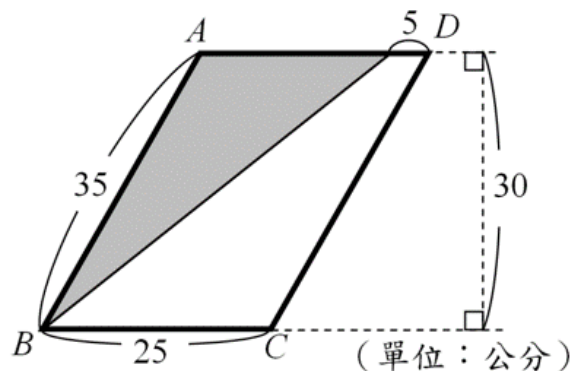
高分組 0.01   0.00    0.02    0.97    0.00

低分組 0.17   0.20    0.26    0.36    0.01

### (二) 國家教育研究院 106 年協助縣市辦理學生學習能力檢測國一小五年級數學試題

一個平行四邊形  $ABCD$  中，灰色三角形（如下圖）的面積是多少平方公分？

- ① 300 平方公分  
 ② 350 平方公分  
 ③ 600 平方公分  
 ④ 700 平方公分



選 項    1        2        3        4        其他    答案：1

選項率 0.34\*   0.31    0.18    0.17    0.00    鑑別度：0.45

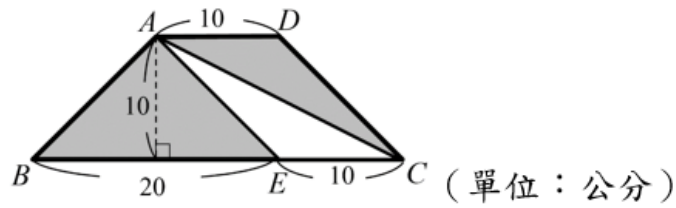
難易度：0.28

高分組 0.61    0.22    0.12    0.06    0.00

低分組 0.16    0.35    0.24    0.26    0.00

(三) 106 學年度新北市學生能力檢測五年級數學試題

有一個梯形  $ABCD$ (如下圖)，灰色部分的面積是多少平方公分？

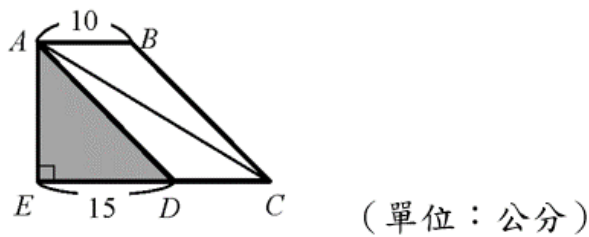


- ① 100 平方公分
- ② 150 平方公分
- ③ 300 平方公分
- ④ 350 平方公分

選 項	1	2	3	4	其他	答案：2
選項率	0.12	0.64*	0.16	0.08	0.00	鑑別度：0.6 難易度：0.61
高分組	0.04	0.91	0.03	0.02	0.00	
低分組	0.21	0.31	0.31	0.17	0.00	

(四) 107 度新北市學生能力檢測五年級數學試題

有一個平行四邊形  $ABCD$  (如下圖)，三角形  $ACD$  面積是 60 平方公分，灰色三角形  $ADE$  的面積是多少平方公分？



- ① 45 平方公分
- ② 60 平方公分
- ③ 90 平方公分
- ④ 180 平方公分

選 項	1	2	3	4	其他	答案：3
選項率	0.19	0.21	0.42*	0.18	0.00	鑑別度：0.41 難易度：0.46
高分組	0.11	0.10	0.66	0.13	0.00	
低分組	0.24	0.27	0.25	0.24	0.00	

第 12 題 5-n-11

知識向度	數與計算	認知向度	概念理解																																																								
對應分年細目	5-n-11 能用直式處理乘數是小數的計算，並解決生活中的問題。																																																										
題目	<p>「<math>4.68 \times 3.09</math>」的直式計算，下列哪個正確？</p> <p>①                      ②                      ③                      ④</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center; width: 25%;"><math>4.68</math></td> <td style="text-align: center; width: 25%;"><math>4.68</math></td> <td style="text-align: center; width: 25%;"><math>4.68</math></td> <td style="text-align: center; width: 25%;"><math>4.68</math></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><math>\times 3.09</math></td> <td style="text-align: center;"><math>\times 3.09</math></td> <td style="text-align: center;"><math>\times 3.09</math></td> <td style="text-align: center;"><math>\times 3.09</math></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><hr style="width: 100%;"/></td> <td style="text-align: center;"><hr style="width: 100%;"/></td> <td style="text-align: center;"><hr style="width: 100%;"/></td> <td style="text-align: center;"><hr style="width: 100%;"/></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">4 2 1 2</td> <td style="text-align: center;">4 2 1 2</td> <td style="text-align: center;">4 2 1 2</td> <td style="text-align: center;">4 2 1 2</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><hr style="width: 100%;"/></td> <td style="text-align: center;"><hr style="width: 100%;"/></td> <td style="text-align: center;"><hr style="width: 100%;"/></td> <td style="text-align: center;"><hr style="width: 100%;"/></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">1 4 0 4 0</td> <td style="text-align: center;">1 4 0 4</td> <td style="text-align: center;">1 4 0 4</td> <td style="text-align: center;">1 4 0 4 0</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><hr style="width: 100%;"/></td> <td style="text-align: center;"><hr style="width: 100%;"/></td> <td style="text-align: center;"><hr style="width: 100%;"/></td> <td style="text-align: center;"><hr style="width: 100%;"/></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">1 4 4 6.1 2</td> <td style="text-align: center;">1 8 2.5 2</td> <td style="text-align: center;">1.8 2 5 2</td> <td style="text-align: center;">1 4.4 6 1 2</td> </tr> </table>			$4.68$	$4.68$	$4.68$	$4.68$	$\times 3.09$	$\times 3.09$	$\times 3.09$	$\times 3.09$	<hr style="width: 100%;"/>	<hr style="width: 100%;"/>	<hr style="width: 100%;"/>	<hr style="width: 100%;"/>	4 2 1 2	4 2 1 2	4 2 1 2	4 2 1 2	<hr style="width: 100%;"/>	<hr style="width: 100%;"/>	<hr style="width: 100%;"/>	<hr style="width: 100%;"/>	1 4 0 4 0	1 4 0 4	1 4 0 4	1 4 0 4 0	<hr style="width: 100%;"/>	<hr style="width: 100%;"/>	<hr style="width: 100%;"/>	<hr style="width: 100%;"/>	1 4 4 6.1 2	1 8 2.5 2	1.8 2 5 2	1 4.4 6 1 2																								
$4.68$	$4.68$	$4.68$	$4.68$																																																								
$\times 3.09$	$\times 3.09$	$\times 3.09$	$\times 3.09$																																																								
<hr style="width: 100%;"/>	<hr style="width: 100%;"/>	<hr style="width: 100%;"/>	<hr style="width: 100%;"/>																																																								
4 2 1 2	4 2 1 2	4 2 1 2	4 2 1 2																																																								
<hr style="width: 100%;"/>	<hr style="width: 100%;"/>	<hr style="width: 100%;"/>	<hr style="width: 100%;"/>																																																								
1 4 0 4 0	1 4 0 4	1 4 0 4	1 4 0 4 0																																																								
<hr style="width: 100%;"/>	<hr style="width: 100%;"/>	<hr style="width: 100%;"/>	<hr style="width: 100%;"/>																																																								
1 4 4 6.1 2	1 8 2.5 2	1.8 2 5 2	1 4.4 6 1 2																																																								
答題表現 選項分析	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">選 項</td> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;">2</td> <td style="text-align: center;">3</td> <td style="text-align: center;">4</td> <td style="text-align: center;">其他</td> <td style="text-align: center;">答案：4</td> </tr> <tr> <td colspan="7" style="text-align: center;">-----</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">選項率</td> <td style="text-align: center;">0.11</td> <td style="text-align: center;">0.05</td> <td style="text-align: center;">0.11</td> <td style="text-align: center;">0.73*</td> <td style="text-align: center;">0.00</td> <td style="text-align: center;">鑑別度：0.53</td> </tr> <tr> <td colspan="6"></td> <td style="text-align: center;">難易度：0.68</td> </tr> <tr> <td colspan="7" style="text-align: center;">-----</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">高分組</td> <td style="text-align: center;">0.04</td> <td style="text-align: center;">0.00</td> <td style="text-align: center;">0.02</td> <td style="text-align: center;">0.94</td> <td style="text-align: center;">0.00</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">低分組</td> <td style="text-align: center;">0.21</td> <td style="text-align: center;">0.14</td> <td style="text-align: center;">0.23</td> <td style="text-align: center;">0.42</td> <td style="text-align: center;">0.00</td> <td></td> </tr> <tr> <td colspan="7" style="text-align: center;">-----</td> </tr> </table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：4	-----							選項率	0.11	0.05	0.11	0.73*	0.00	鑑別度：0.53							難易度：0.68	-----							高分組	0.04	0.00	0.02	0.94	0.00		低分組	0.21	0.14	0.23	0.42	0.00		-----						
選 項	1	2	3	4	其他	答案：4																																																					
-----																																																											
選項率	0.11	0.05	0.11	0.73*	0.00	鑑別度：0.53																																																					
						難易度：0.68																																																					
-----																																																											
高分組	0.04	0.00	0.02	0.94	0.00																																																						
低分組	0.21	0.14	0.23	0.42	0.00																																																						
-----																																																											

一、試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.52，通過率為 0.73，難易度 0.68。

(二) 評量目標說明

本題旨在測驗學生是否能在二位小數乘以二位小數的直式計算，選出正確的直式紀錄，評量學生對於小數乘法計算的直式運算的理解情形。

(三) 選項表現說明

1. 有 73% 的學生選擇正確選項④，顯示有近七成的學生對於二位小數乘以二位小數的直式計算，能選出正確的直式紀錄。
2. 有 11% 的學生選擇選項①，這些學生可能受到小數加法的影響，列出直式後，將乘積中的小數點位置，直接對齊乘數和被乘數的小數點位置。
3. 有 11% 的學生選擇選項③，這些學生可能在計算過程中，對於被乘數 $\times 3.09$  中的十分位位值為 0 時，省略不記，直接將被乘數乘以 3 的結果記錄在錯誤的位值，造成答案錯誤。
4. 有 5% 的學生選擇選項②，這些學生除了小數點的位置是受到加法算則的影響，另外在計算過程中被乘數 $\times 3.09$  中的十分位位值為 0 時，省略不記，直接將被乘數乘以 3 的結果記錄在錯誤的位值，造成答案錯誤。

(四) 學生表現說明

1. 本題的命題設計主要希望了解學生是否能理解二位小數乘以二位小數的直式計算，學生能否選出正確的直式紀錄，評量學生小數乘法計算的直式運算能力。

2.本題通過率為 0.73。有將近七成的學生已能掌握小數乘小數的算則概念，但仍有將近三成的學生概念尚未清楚。從高分組與低分組學生的表現來看，94%的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生亦有 42%能回答正確，但有 11%的學生選擇選項①和有 5%的學生選擇選項②，表示這些學生可能受到可能受到小數加法的影響，認為列出直式後小數點的位置應該要直接對齊小數點點的位置。此外，有 11%的學生選擇選項③，表示這些學生可能只記憶「被乘數與乘數的小數位數和就是積的小數位數」口訣，對其意義並不了解，因此，在計算過程中乘數(被乘數)有缺位時，學生可能會省略不記，記錄在錯誤的位值，造成答案錯誤。

## 二、教材地位分析

### 97 課綱 (分年細目)

#### (一) 評量重點

5-n-11 能用直式處理乘數是小數的計算，並解決生活中的問題。

#### (二) 先備的知識

4-n-12 能用直式處理二位小數加、減與整數倍的計算，並解決生活中的問題。

#### (三) 延伸的知識

6-n-06 能用直式處理小數除法的計算，並解決生活中的問題。

### 十二年國教課綱 (學習內容)

#### (一) 評量重點

N-5-8 小數的乘法：整數乘以小數、小數乘以小數的意義。乘數為小數的直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。處理乘積一定比被乘數大的錯誤類型。

#### (二) 先備的知識

N-4-7 二位小數：位值單位「百分位」。位值單位換算。比較、計算與解題。用直式計算二位小數的加、減與整數倍。

#### (三) 延伸的知識

N-5-9 整數、小數除以整數(商為小數)：整數除以整數(商為小數)、小數除以整數的意義。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。能用概數協助處理除不盡的情況。熟悉分母為 2、4、5、8 之真分數所對應的小數。

N-6-4 小數的除法：整數除以小數、小數除以小數的意義。直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。處理商一定比被除數小的錯誤類型。

## 三、教學建議

#### (一) 評量核心概念

小數乘以小數的問題(兩位小數)。

#### (二) 學生常見的錯誤類型/迷思概念

1.對小數沒有估算的數感：因此學生對於兩數乘積的小數點位置沒有概念，以致於出現小數乘法直式計算結果中積的小數點位置錯誤(如下列直式)。

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 4.05 \\ \hline 115 \\ 920 \\ \hline 93.15 \end{array}$$

小數點位置正確

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 4.05 \\ \hline 115 \\ 920 \\ \hline 931.5 \end{array}$$

小數點位置錯誤

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 4.05 \\ \hline 115 \\ 920 \\ \hline 9.315 \end{array}$$

小數點位置錯誤

2.對乘數位值為0的乘法意義不了解：乘數的位值有0時，學生對位值出現0在乘法計算上的意義不了解，因此在直式算式中不知如何紀錄，以致於其他位值的乘法計算結果的位值亦錯誤。例如：23×4.05的乘數十分位位值為0，在乘法直式計算時忽略了0乘以23的紀錄，直接將4乘以23的結果紀錄在錯誤的位值造成答案錯誤（如下列直式）。

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 4.05 \\ \hline 115 \\ 92 \\ \hline 10.37 \end{array} \quad \longrightarrow \text{位值錯誤}$$

3.在小數乘法直式計算有個位對齊的迷思：受舊經驗小數的加減直式法則，學生記憶要個位對齊個位，但在學小數乘法的直式計算，卻要先不管小數點的位置，直接最右邊對齊，此時容易受到前面舊經驗的干擾。

4.直式計算乘積末位為「0」時小數點位置的處理：學生受到小數點右邊末位的0省略的影響，在處理新的積數時，會出現將末位0省略後，小數位數與原來總合不同，故又將小數點向左移一位。例如在計算「2.6×2.5=」時，先計算「26×25=650」，然後點數被乘數與乘數的小數位數總合為兩位，故取得新的積數為「6.50」，學生再將小數點右邊末位的0省略為「6.5」，此時發現6.5的小數位數只有一位，故又將小數點向左移一位得到「0.65」。

### (三) 核心概念的教學重點

1.利用「單位量轉換」的策略理解：建議可透過單位量轉換的方式，連結並推廣小數乘法直式計算直式記法對位和整數乘法算則相同，並理解被乘數及乘數的小數點位置與積的小數點位置之關係。透過單位量轉換的關係，讓學生將小數直式乘法與整數直式乘法做連結，依本題為例，只要算出整數部分468×309的結果即可，最後只要確認整數乘出來的結果是幾個0.0001，再依最後整數相乘的結果加上小數點，即為最後答案。所以小數的直式乘法是以整數的直式乘法對齊方式進行。

$$\begin{array}{r} 4.68 \times 3.09 = \\ 4.68 \rightarrow 468 \text{ 個 } 0.01 \\ \times 3.09 \rightarrow 309 \text{ 個 } 0.01 \text{ 倍} \\ \hline 468 \\ \times 309 \\ \hline \end{array}$$

0.01 的 0.01 倍  
= 0.0001  
連結分數算則

$$\frac{1}{100} \times \frac{1}{100} = \frac{1}{10000}$$

2.加強分數和小數的連結：在進行小數教學時，應重視分數和小數的連結，因為小數是分數的另一種表達形式。在處理「0.01 的 0.01 倍」時應適時與分數乘法做連結，讓學生從分數乘法分母的變化中，自己察覺出「二位小數乘以一位小數，結果會是三位小數」或「一位小數乘以一位小數，結果會是二位小數」的結果，進而得到「二位乘以一位可由2+1=3得到是三位小數」及「一位乘以一位可由1+1=2得到是二位小數」的程序性結果，非由教師告知而失去讓學生察覺歸納的機會。所以用 $\frac{1}{10}$ 、 $\frac{1}{100}$ 、 $\frac{1}{1000}$ 的分數來學習小數，可以幫助學生理解0.1、0.01、0.001的小數概念，並連結兩者之間的關連。

$$\begin{array}{r}
 4.68 \\
 \times 3.09 \\
 \hline
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{r}
 468 \\
 \times 309 \\
 \hline
 144612
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{r}
 4.68 \\
 \times 3.09 \\
 \hline
 14.4612
 \end{array}$$

(列出直式)      (算出  $468 \times 309$  的乘積)      (前述乘積的  $\frac{1}{10000}$  倍，  
小數點往左移 4 位)

**3.培養小數估算的數感：**除了小數和分數的連結外，在進行小數教學時，另一個很重要的概念是培養小數的數感以進行積的估算，例如： $4.68 \times 3.09$ ，是 4.6 的 3 倍多，所以可以估算答案應大於 12，小於 15 左右。小數數感的估算，也可以幫助學生先以整數進行小數的乘除計算，再定出積或商的小數點位置，例如：將  $4.68 \times 3.09$  當成  $468 \times 309$  的整數相乘，乘積為 144612，因以小數估算  $4.6 \times 3$  的積介於 12~15 之間，因此可知其積應為四位小數，故積為 14.1612。

#### (四) 本題教學的加強重點

- 1.本題為小數乘以小數的題目，透過單位量轉換的方式，連結並推廣小數乘法直式計算直式記法對位和整數乘法算則相同，並理解被乘數及乘數的小數點位置與積的小數點位置之關係。因此，先將題目視為整數乘以整數的乘法計算，再依被乘數和乘數的小數位數總和，做原積數的小數點位移，來決定新積數小數點的位置。因此  $4.68 \times 3.09$  的小數位數總和是四位，從原積數 144612 變成新積數 14.4612。
- 2.對乘數位值有 0 的乘法時，學生對位值出現 0 在乘法計算上的意義不了解，因此在直式算式中不知如何紀錄，以致於其他位值的乘法計算結果的位值錯誤。建議教師應用位值的概念來說明與澄清。以本題為例， $4.68 \times 3.09$  先視為  $468 \times 309$ ，其意義為 468 的 3 個一倍、468 的 0 個十倍和 468 的 3 個百倍的和，引導學生發現乘數中的 0 有其位值的意義。

#### 四、命題建議

本項指標評量目的旨在了解學生是否能用直式處理小數乘法計算，因此命題上有以下三個方向：

- (一) 以直式運算命題：能同時檢核學生的乘法直式運算紀錄及小數點位置的處理。
- (二) 以橫式紀錄命題：檢核學生如何透過判斷小數點位置，將整數乘法的積變成小數乘法的積；或檢核當乘數部分位值為 0(缺位)時，學生計算結果記錄錯誤的迷思。
- (三) 以非選擇題形式命題：檢核學生是否真正理解小數乘法的小數點位置算則規約，而非僅是口訣的背誦及應用。例如:新北市 106 檢測試題非選抽測題。

## 五、歷年檢測試題參考

### (一) 104 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

在「 $18 \times 2.07$ 」的直式記錄中，下列哪一個直式記錄是正確的？

①	②	③	④
$\begin{array}{r} 18 \\ \times 2.07 \\ \hline 136 \\ 26 \\ \hline 3.96 \end{array}$	$\begin{array}{r} 18 \\ \times 2.07 \\ \hline 126 \\ 36 \\ \hline 4.86 \end{array}$	$\begin{array}{r} 18 \\ \times 2.07 \\ \hline 136 \\ 260 \\ \hline 27.36 \end{array}$	$\begin{array}{r} 18 \\ \times 2.07 \\ \hline 126 \\ 360 \\ \hline 37.26 \end{array}$

選 項	1	2	3	4	其他	答案：4
選項率	0.02	0.09	0.04	0.85*	0.00	鑑別度：0.33
高分組	0.00	0.02	0.01	0.97	0.00	難易度：0.81
低分組	0.05	0.21	0.09	0.65	0.01	

### (二) 105 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

下列哪一個直式紀錄是正確的？

①	②
$\begin{array}{r} 31.55 \\ \times 500 \\ \hline 157.75 \end{array}$	$\begin{array}{r} 31.55 \\ \times 500 \\ \hline 1577500 \end{array}$
③	④
$\begin{array}{r} 500 \\ \times 31.55 \\ \hline 2500 \\ 2500 \\ 500 \\ 1500 \\ \hline 295.00 \end{array}$	$\begin{array}{r} 500 \\ \times 31.55 \\ \hline 2500 \\ 2500 \\ 500 \\ 1500 \\ \hline 15775.00 \end{array}$

選 項	1	2	3	4	其他	答案：4
選項率	0.10	0.11	0.05	0.73*	0.00	鑑別度：0.36
高分組	0.03	0.05	0.01	0.91	0.00	難易度：0.73
低分組	0.18	0.17	0.10	0.55	0.00	

(三) 106 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

已知「 $374 \times 265 = 99110$ 」，則  $3.74 \times 2.65 = ?$

- ① 9911.0
- ② 991.1
- ③ 9.911
- ④ 0.9911

選 項	1	2	3	4	其他	答案：3
選項率	0.02	0.09	0.81*	0.08	0.00	鑑別度：0.36 難易度：0.77
高分組	0.00	0.02	0.95	0.03	0.00	
低分組	0.08	0.18	0.59	0.15	0.00	

(四) 106 學年度新北市五年級數學能力檢測非選題

老師出了一個數學問題「一條彩帶長 3.5 公尺，姊姊佈置教室用了 2.7 條，姊姊共用掉多少公尺的彩帶？」

小平先寫了算式「 $3.5 \times 2.7 =$ 」，再用直式計算出結果如下：

$$\begin{array}{r}
 3.5 \\
 \times 2.7 \\
 \hline
 245 \\
 70 \\
 \hline
 94.5
 \end{array}$$

你覺得他的直式計算做對了嗎？請說明理由。

類型	2					1			0				合計
	2A	2B	2C	2D	2E	1A	1B	1X	0A	0B	0X	99	
人數	0	0	98	55	12	32	98	15	25	5	22	5	367 人
百分比(%)	0	0	27	15	3	9	27	4.5	7	1	5.5	1	
人數	165					145			57				
百分比(%)	45%					40.5%			14.5%				

(五) 107 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

已知「 $275 \times 154 = 42350$ 」，下列哪個選項的積是「42.35」？

- ①  $0.275 \times 1540$       ②  $2.75 \times 154$   
③  $27.5 \times 1.54$       ④  $27.5 \times 15.4$

選 項	1	2	3	4	其他	答案：3
選項率	0.13	0.12	0.58*	0.16	0.00	鑑別度：0.6 難易度：0.59
高分組	0.05	0.02	0.89	0.04	0.00	
低分組	0.19	0.24	0.29	0.28	0.00	

第 13 題 5-a-02

知識向度	代數	認知向度	程序執行																														
對應分年細目	5-a-02 能在具體情境中，理解先乘再除與先除再乘的結果相同，也理解連除兩數相當於除此兩數之積。																																
題目	下列哪位學生的算式結果與「 $96 \times 24 \div 12 \div 2$ 」 <u>不同</u> ？ ① 小傑： $96 \times 24 \div (12 \div 2)$ ② 小美： $96 \times (24 \div 12) \div 2$ ③ 小明： $(96 \times 24) \div 12 \div 2$ ④ 小婷： $96 \times (24 \div 12 \div 2)$																																
答題表現 選項分析	<table border="1"> <thead> <tr> <th>選 項</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> <th>其他</th> <th>答案：1</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>選項率</td> <td>0.42*</td> <td>0.20</td> <td>0.15</td> <td>0.23</td> <td>0.00</td> <td>鑑別度：0.53 難易度：0.46</td> </tr> <tr> <td>高分組</td> <td>0.72</td> <td>0.09</td> <td>0.06</td> <td>0.13</td> <td>0.00</td> <td></td> </tr> <tr> <td>低分組</td> <td>0.19</td> <td>0.28</td> <td>0.23</td> <td>0.30</td> <td>0.00</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>					選 項	1	2	3	4	其他	答案：1	選項率	0.42*	0.20	0.15	0.23	0.00	鑑別度：0.53 難易度：0.46	高分組	0.72	0.09	0.06	0.13	0.00		低分組	0.19	0.28	0.23	0.30	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：1																											
選項率	0.42*	0.20	0.15	0.23	0.00	鑑別度：0.53 難易度：0.46																											
高分組	0.72	0.09	0.06	0.13	0.00																												
低分組	0.19	0.28	0.23	0.30	0.00																												

一、試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.53，通過率為 0.42，難易度 0.46。

(二) 評量目標說明

本題旨在評量學生除了能列出算式外，是否理解四則運算規則中連除兩數與除以兩數之積的結果相同，以及添加括號的差異。

(三) 選項表現說明

- 有 42% 的學生選擇正確選項①，顯示有四成以上的學生已經能理解「連除兩數相當於除以兩數之積」的算則。
- 有 23% 的學生選擇選項④，學生可能誤以為加了括號之後運算結果會與原來不同，故而選擇選項④。另外，學生也可能瞭解「 $\div 12 \div 2$ 」為連除情境，因此括號後，後項必須變號為乘號，因此對於「 $\times 24 \div 12 \div 2$ 」這連續四則運算情境，學生可能誤以為括號後，後兩項為連除的情境，因此連除的後項必須變號，因此選項應為「 $96 \times (24 \div 12 \times 2)$ 」才對，故選擇選項④。
- 有 20% 的學生選擇選項②，顯示有兩成學生可能誤以為加了括號之後運算結果會與原來不同，故而選擇選項②。另外，學生也有可能誤以為四則運算是依該項後方而不是前方的運算符號，因此學生以為該式是除以 24 和除以 12，為連除兩數，因此括號後，後項必須變號為乘號，因此選擇選項②。
- 有 15% 的學生選擇選項③，顯示有一成五學生可能誤解題意，誤以為是選出與「 $96 \times 24 \div 12 \div 2$ 」結果相同，但卻忽略連除兩數等於除此兩數之積，所以直覺選擇選項③。另外，學生也有可能誤以為加了括號之後運算結果會與原來不同，故而選擇選項③。

#### (四) 學生表現說明

- 1.本題的命題設計主要是希望能了解學生對於「理解連除兩數相當於除以此兩數之積」，以及「添加括號的差異」概念是否完全清楚。而在選項設計上，學生需判斷括號的位置對於算式的影響，同時也檢核學生對於先乘除後加減與有括號要先算的計算規則的理解，若學生能充分注意，則無需逐式計算也能從選項中的錯誤處判斷出正確答案。
- 2.本題的通過率為42%，顯示只有四成二的學生能理解「理解連除兩數相當於除以此兩數之積」，以及「添加括號的差異」的概念。從五成八的答錯學生來看，高分組學生大多能理解在連乘的情境下，括號與否並不影響運算結果，但對於先乘再除的順序似乎容易受括號影響而混淆；低分組學生的答錯選項人數頗平均，顯示可能對於由左至右、先乘後除與先除再乘結果相同、連除兩數相當於除以此兩數之積的算則並不熟悉，較容易受到括號在算式中的位置影響而產生判斷上的困難。教師在進行相關教學時，可引導學生從生活情境中去理解各種算則產生的需求與必要性。

## 二、教材地位分析

### 97 課綱 (分年細目)

#### (一) 評量重點

5-a-02 能在具體情境中，理解先乘再除與先除再乘的結果相同，也理解連除兩數相當於除以此兩數之積。

#### (二) 先備的知識

4-a-01 能在具體情境中，理解乘法結合律。

4-a-02 能在四則混合計算中，應用數的運算性質。

#### (三) 延伸的知識

5-a-03 能熟練運用四則運算的性質，做整數四則混合計算。

6-a-04 能利用常用的數量關係，列出恰當的算式，進行解題，並檢驗答案的合理性。

### 十二年國教課綱 (學習內容)

#### (一) 評量重點

R-5-2 **四則計算規律 (II)**：乘除混合計算。「乘法對加法的分配律」。將計算規律應用於簡化混合計算。熟練整數四則混合計算。

#### (二) 先備的知識

R-4-1 **兩步驟問題併式**：併式是代數學習的重要基礎。含四則混合計算的約定（由左往右算、先乘除後加減、括號先算）。學習逐次減項計算。

R-4-2 **四則計算規律 (I)**：兩步驟計算規則。加減混合計算、乘除混合計算。在四則混合計算中運用數的運算性質。

#### (三) 延伸的知識

R-6-1 **數的計算規律**：小學最後應認識(1)整數、小數、分數都是數，享有一樣的計算規律。(2)整數乘除計算及規律，因分數運算更容易理解。(3)逐漸體會乘法和除法的計算實為一體。併入其他教學活動。

### 三、教學建議

#### (一) 評量核心概念

利用先乘再除與先除再乘的結果相同，以及連除兩數相當於除以此兩數之積簡化計算過程。

#### (二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. 對四則運算中去掉括號後的運算不清楚：因為  $a \times (b \div c) = a \times b \div c$ ，學生常會誤以為  $a \div (b \times c) = a \div b \times c$ 。事實上  $a \div (b \times c) = a \div b \div c$ ，兩者是屬於不同情境下的運算。
2. 對交換律的誤解：因為加法和乘法有交換律，而  $a \times b \div c = a \div c \times b$ ，學生便誤以為  $a \div (b \times c) = a \times (b \div c)$  或是  $a \div (b \times c) = a \div b \times c$ 。

#### (三) 核心概念的教學重點

##### 1. 理解「先乘再除」與「先除再乘」的計算結果相同

對於  $a \times b \div c = a \div c \times b$ ，這是乘法交換律的延伸，因為  $a \times b \div c = a \times b \times \frac{1}{c} = a \times \frac{1}{c} \times b = a \div c \times b$ ，所以最後計算的結果必然相等。

老師在教學時，可以舉例如下：「蘋果 1 公斤賣 240 元，現在有 6 位同學想要合買 4 公斤的蘋果，平均每人要付多少錢？」並且和學生探討下面所提供的兩個方法，所列出的算式不同，結果會如何？

方法1：先算出 4 公斤的蘋果總共是多少元，再讓 6 位同學平均分攤全部的錢。列出  $240 \times 4 \div 6$  這個式子，再計算出每人要付 160 元。

方法2：先算出平均每個人 1 公斤要負擔多少元，再算出 4 公斤蘋果每個人各要付多少元。因此可以列出算式  $240 \div 6 \times 4$  計算出每人要付 160 元。

可以發現兩個方法所得到的結果相同。

##### 2. 「乘號後有括號」與「除號後有括號」的計算結果不同

對於  $a \times b \div c$  這個算式而言，其實就是  $a \times (b \times \frac{1}{c}) = a \times b \times \frac{1}{c}$  所以計算結果必然相同。但是， $a \div (b \times c)$  其實是  $a \times \frac{1}{b \times c}$ ，因此其計算結果必然和  $a \times (b \times \frac{1}{c}) = a \times b \times \frac{1}{c}$  是不同的。

老師教學時，可以舉例如下：「老師有 320 枝鉛筆，全部平分給班上的 8 組學生，每組的學生有 4 人，每位學生可以分到幾支鉛筆？」並且和學生探討下面所提供的兩個方法，所列出的算式不同，結果會如何？

方法1：先算出全班有多少位學生之後，再計算將 320 枝鉛筆平分給每位學生，每位學生可以分得幾支鉛筆要如何列式？可以列出  $320 \div (8 \times 4)$  這個式子。再計算出每位學生可以分到 10 枝鉛筆。

方法2：如果 320 枝鉛筆平分給各組之後，各組在將每組分到的鉛筆平分給每組的人，要如何列式？可以列出  $320 \div 8 \div 4$  這個式子，計算出每位同學可以分到 10 枝鉛筆。

可以發現兩個式子的結果是相同的。

但如果用  $320 \times (8 \div 4)$  所計算出的結果是不同的。這個式子所代表的意思，可以看成將 8 位同學平分成 4 組，每組有 2 人，每人可以分到 320 枝鉛筆，所以每一組可以分到 640 枝鉛筆，意思和前面的兩個式子是完全不同的。

#### (四) 本題教學的加強重點

##### 1. 運用「情境問題」理解連除兩數等於除以兩數之積

$96 \times 24 \div 12 \div 2$  此概念可以透過舊經驗的分裝情境讓學生理解，如以下列情境問題來說明：金莎巧克力一大包有 96 顆巧克力球，老師買了 24 包，打算將巧克力球重新以每 12 顆裝成一袋，每 2 袋裝成一盒，共可裝成幾盒？

先算 24 包總共有幾顆巧克力球後，再算可裝幾袋，最後算出可裝成幾盒？

$$\begin{aligned}\text{算式 A: } & 96 \times 24 \div 12 \div 2 \quad (\text{先算 24 包總共有幾顆巧克力球}) \\ & = 2304 \div 12 \div 2 \quad (\text{再算全部巧克力球可分裝成幾袋}) \\ & = 192 \div 2 \quad (\text{再算全部袋數可分裝成幾盒}) \\ & = 96 \text{ (盒)}\end{aligned}$$

先算 1 盒可裝幾顆巧克力球，再算全部巧克力球可裝成幾盒？

$$\begin{aligned}\text{算式 B: } & 96 \times 24 \div 12 \div 2 \\ & = 96 \times 24 \div (12 \times 2) \quad (\text{先算 } 12 \times 2 \text{ 是算一盒要有幾顆巧克力球}) \\ & = 96 \times 24 \div 24 \quad (\text{再算全部有幾顆巧克力球}) \\ & = 2304 \div 24 \quad (\text{再算 } \div 24 \text{ 是算可裝滿幾盒巧克力球}) \\ & = 96\end{aligned}$$

由此可得知，「連除兩數等於除以兩數之積」。

教學時應透過情境問題讓學生理解連除兩數等於除以兩數之積，而非只是計算規則的記憶。再利用四則運算規則來檢核此 2 個算式，算式 A： $96 \times 24 \div 12 \div 2$  運用四則運算規則，「由左而右算」，要先算  $96 \times 24 = 2304$ ，再算  $2304 \div 12 = 192$ ，最後算出  $192 \div 2 = 96$  得正解 96；算式 B： $96 \times 24 \div (12 \times 2)$  運用四則運算規則「先乘除後加減有括號要先算」則要先算  $12 \times 2 = 24$ ，再算  $96 \times 24 = 2304$ ，最後算出  $2304 \div 24 = 96$ 。

##### 2. 運用四則運算算則，實際進行計算，檢驗四個選項的答是否與原題的算式答案相同：

原題算式： $96 \times 24 \div 12 \div 2$ ，由左至右運算，先除再乘答案相同可簡化計算，答案為 96。

正確選項①： $96 \times 24 \div (12 \div 2)$ ，括號先算，先除再乘答案相同可簡化計算，答案為 384，和原題算式答案不同。連除兩數等於除以兩數之積，故括號內應為  $12 \times 2$ 。

錯誤選項②： $96 \times (24 \div 12) \div 2$ ，括號先算，先除再乘答案相同可簡化計算，答案為 96。加括號不影響原算式結果。

錯誤選項③： $(96 \times 24) \div 12 \div 2$ ，括號先算，和由左至右運算相同，答案為 96。加括號不影響原算式結果。

錯誤選項④： $96 \times (24 \div 12 \div 2)$ ，括號先算，先除再乘答案相同，答案為 96。加括號不影響原算式結果。

##### 3. 利用「裸題」與「擬題」強化連除兩數等於除以兩數之積

用練習題如：「 $444 \div 3 \div 4$ 、 $444 \div (3 \times 4)$ 」利用四則運算中由左而右算、有括號要先算的規則，讓兩算式並陳，請學生寫出計算過程，強化學生連除兩數等於除以兩數之積的概念。也可以利用擬題的方式讓學生嘗試說明為何連除兩數等於除以兩數之積，強化學生此概念。

#### 四、命題建議：

##### (一) 括號概念的檢核：

括號是用來標記要先算的部分，有括號的部分要先算，學生往往專注括號的部分，忽略括號前後的運算也要用先乘除後加減的規則，所以命題要診斷學生對括號的理解，如：「乘號後有括號」與「除號後有括號」的計算結果不同，以下例題組讓學生分別計算，以診斷學生對括號概念的理解。

$$(1) 320 \times (8 \div 4) \text{ 和 } 320 \times 8 \div 4$$

$$(2) 320 \div (8 \times 4) \text{ 和 } 320 \div 8 \times 4$$

##### (二) 對乘除計算規律與四項以上乘除計算的檢核：

例一：課本習題上多是「 $240 \times 15 \div 24$ 」等類題，學生能夠透過多次練習了解先乘再除與先除再乘的結果相同，建議教師可將列式改成「 $15 \times 240 \div 24$ 」，讓學生了解先除再乘不一定是指第一項除以第三項，也可以是第二項先除以第三項，但需注意列式中的數值不宜過小，以免學生直接從左至右計算出答案。

例二：為了方便學生了解乘除計算規則，課本習題的乘除計算題型都只有三項數值，只有在補充教材中的較難題型才會出現四項以上數值的乘除計算，如  $77 \times 225 \div 77 \div 5$ 、 $3737 \times 60 \div 37 \times 5$  或  $600 \div 1.25 \div 8 \div 0.5 \div 5$ ，建議教師可藉由多項的乘除簡化運算練習了解學生是否理解乘除運算規律。

##### (三) 命題參考：

四則運算的性質是從生活中的數學應用情境發展而來，新北市歷年皆以選擇題的方式進行呈現，側重於對規約的熟練與判斷，或許可以非選擇題的形式，設計相關情境，藉以了解學生是否理解各個規約的意義。

## 五、歷屆檢測試題參考：

### (一) 105 學年度數學能力檢測第 5 題

「一包糖果有 50 顆，老師買了 4 包，想平分給 2 個班級的學生，每班可以分到幾顆糖果？」下列哪一個算式不能算出正確答案？

- ①  $50 \times 4 \div 2$
- ②  $50 \div 2 \times 4$
- ③  $50 \div (4 \times 2)$
- ④  $50 \times (4 \div 2)$

選 項	1	2	3	4	其他	答案：3
選項率	0.11	0.08	0.71*	0.10	0.00	鑑別度：0.48
						難易度：0.7
高分組	0.02	0.01	0.94	0.02	0.00	
低分組	0.21	0.15	0.46	0.18	0.00	

### (二) 106 學年度數學能力檢測第 24 題

「1 盒原子筆有 6 枝，小傑買了 84 盒，共花了 5040 元。1 枝原子筆是多少元？」下列哪一個算式不能算出正確答案？

- ①  $5040 \div (84 \div 6)$
- ②  $5040 \div 84 \div 6$
- ③  $5040 \div (6 \times 84)$
- ④  $5040 \div (84 \times 6)$

選 項	1	2	3	4	其他	答案：1
選項率	0.55*	0.21	0.14	0.10	0.00	鑑別度：0.63
						難易度：0.56
高分組	0.88	0.05	0.05	0.02	0.00	
低分組	0.24	0.33	0.23	0.20	0.00	

(三) 107 學年度數學能力檢測第 12 題

算式「 $64 \div (4 \times 8)$ 」的答案與下列哪個算式的答案相同？

- ①  $64 \div 4 \div 8$
- ②  $64 \div 4 \times 8$
- ③  $(64 \times 4) \div 8$
- ④  $64 \div 4 \times 64 \div 8$

選 項	1	2	3	4	其他	答案：1
選項率	0.68*	0.11	0.08	0.13	0.00	鑑別度：0.63
高分組	0.95	0.01	0.01	0.03	0.00	難易度：0.63
低分組	0.32	0.28	0.20	0.20	0.00	

第 14 題 5-n-10

知識向度	數與計算	認知向度	概念理解				
對應分年細目	5-n-10 能認識多位小數，並做比較與加、減與整數倍的計算，以及解決生活中的問題。						
題目	下列哪一個選項是正確的？ ①「21.213」是一個五位小數。 ②「2.0023」讀作「二點零二三」。 ③ $0.569 > 0.58 > 0.6$ 。 ④ 0.88 是 88 個 0.01。						
答題表現 選項分析	選 項	1	2	3	4	其他	答案：4
	選項率	0.04	0.09	0.03	0.84*	0.00	鑑別度：0.42 難易度：0.77
	高分組	0.00 <sup>+</sup>	0.01	0.00 <sup>+</sup>	0.98	0.00	
	低分組	0.11	0.22	0.11	0.56	0.00	
							*代表數值不等於 0

一、試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.42，通過率為 0.84，難易度 0.77。

(二) 評量目標說明

本題旨在評量學生對多位小數的概念是否正確。

(三) 選項表現說明

1. 有 84% 的學生選擇正確選項④，顯示大部分的學生已經具備多位小數的位值的概念。
2. 有 9% 的學生選擇選項②，這些學生在報讀多位小數時，可能會受到整數概念的影響，誤以為多位小數中間有多個零在報讀時可以省略，因而誤以為報讀一次「零」即可。
3. 有 4% 的學生選擇選項①，這些學生誤認為五位小數的判定是依所有數字的個數來決定，而非依位值表的為值來判斷小數。
4. 有 3% 的學生選擇選項③，這些學生在進行多位小數大小比較時，可能是受整數概念的影響，認為位數愈多其值也愈大，故認為小數點後的位數越多，則該數越大。

(四) 學生表現說明

1. 本題的命題設計在了解學生是否能理解其單位量和單位數(位值)、小數的報讀，以及進行多位小數大小比較。
2. 本題通過率為 0.84。有高於八成的學生已能掌握多位小數的相關概念，但仍有近二成左右的學生，概念並不清楚。從高分組與低分組學生的表現來看，98% 的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生亦有 56% 回答正確，但有 44% 的低分組學生選擇選項①、②、③，顯示低分組學生對於多位小數的報讀與單位量判斷上仍有待加強。

## 二、教材地位分析

### 97 課綱 (分年細目)

#### (一) 評量重點

5-n-10 能認識多位小數，並做比較與加、減與整數倍的計算，以及解決生活中的問題。

#### (二) 先備的知識

4-n-12 能用直式處理二位小數加、減與整數倍的計算，並解決生活中的問題。

#### (三) 延伸的知識

6-n-08 能在具體情境中，解決小數的兩步驟問題，並能併式計算。

### 十二年國教課綱 (學習內容)

#### (一) 評量重點

N-5-1 十進位的位值系統：「兆位」至「千分位」。整合整數與小數。理解基於位值系統可延伸表示更大的數和更小的數。

#### (二) 先備的知識

N-4-7 二位小數：位值單位「百分位」。位值單位換算。比較、計算與解題。用直式計算二位小數的加、減與整數倍。

#### (三) 延伸的知識

N-6-5 解題：整數、分數、小數的四則應用問題。二到三步驟的應用解題。含使用概數協助解題。

## 三、教學建議

#### (一) 評量核心概念

測驗多位小數的意義。

#### (二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

##### 1. 小數的基本概念迷思

- (1) 不了解小數與分數之間的連結，所以不清楚小數點右邊的數字所代表的值，例如：0.23 的 2 是 2 個  $\frac{1}{10}$ ，所以 2 是十分位，也就是 2 個 0.1；0.23 的 3 是 3 個  $\frac{1}{100}$ ，所以 3 是百分位，也就是 3 個 0.01。
- (2) 不了解小數所代表的值，如不了解 3.45 是介於 3 和 4 之間的值。
- (3) 數線上讀小數或標小數點時，會弄錯兩格之間的單位，例如；0.1 和 0.2 之間分成十格時，不清楚兩小隔間代表的是 0.01。
- (4) 不了解小數之間存在著無限個小數，例如：0.1 和 0.2 之間有 0.11、0.12、0.13……；0.01 和 0.02 之間還有 0.011、0.012、0.013……。
- (5) 在度量衡單複名數的轉換問題時，易產生位值錯誤，例如：以為 2 公尺 3 公分=2.3 公尺。
- (6) 在離散量情境時，易將小數點左邊的數當成大單位的個數，將小數點右邊的數當成小單位的個數，例如：一袋糖果有 20 顆，2.5 袋糖果就是 2 袋又 5 顆。
- (7) 小數化聚的迷思：例如：「0.6 是由幾個 0.01 合成？」多數學生會回答 6 個。因此，未能正確做二位小數的化聚，表示學生缺乏位值概念。

## 2.小數與整數概念混淆形成的迷思

- (1) 讀小數時，會類推讀整數的方式，例如：0.24 讀成「零點二十四」，或將 0.2007 讀成「零點二零七」，因學生不理解讀整數時有讀出位名，故零可省略，而讀小數時沒有讀出位名，故零不可以省略。
- (2) 不了解小數點右邊末位的 0 可以省略，例如：以為  $12.30 > 12.3$ 。
- (3) 在小數數詞序列遇到進位時容易出錯，例如： $0.7 \xrightarrow{+0.1} 0.8 \xrightarrow{+0.1} 0.9 \xrightarrow{+0.1} 0.10$ 。
- (4) 在比較小數的大小時，以為小數點右邊的數字越多，其值越大，例如：以為  $0.123 > 0.4$ 。
- (5) 在比較小數的大小時，將小數當成整數來比較，例如：以為  $12.3 < 4.56$  或  $4.12 > 4.3$ 。

## 3.小數計算的迷思

- (1) 在計算小數加減時，會以整數的加減經驗類推，而將「數字向右」對齊來計算。

$$\begin{array}{r} 0.54 \\ + 0.3 \\ \hline 0.57 \end{array}$$

- (2) 在加減小數時計算結果忘了標示小數點。

$$\begin{array}{r} 2.54 \\ + 1.3 \\ \hline 267 \end{array}$$

- (3) 計算小數乘法時，會放錯積數小數點的位置。
- (4) 計算小數除法時，會放錯餘數的小數點，不是忽略要加小數點，就是將小數點對齊放在被除數後來的小數點的位置。

## 4.小數與分數概念混淆形成的迷思

將小數和分數的數字直接轉換，例如：以為  $5.4 = \frac{4}{5}$ ，或以為  $\frac{3}{8} = 0.3$ 。

## (三) 核心概念的教學重點

### 1.透過具體操作讓學生從分數概念引進，讓學生理解小數的意義

以千格板當作 1，一個百格板是  $\frac{1}{10}$ ，也就是 0.1；一個橘色積木是  $\frac{1}{100}$ ，也就是 0.01；一個小白積木是  $\frac{1}{1000}$ ，也就是 0.001。

學生在四年級已經認識二位小數與百分位的位名，且理解小數本身記錄了多單位的合成結果，例如一位小數是記錄數個「1」和數個「0.1」的合成結果；二位小數是記錄數個「1」、數個「0.1」和數個「0.01」的合成結果。

五年級開始出現四位小數以上的小數，四位小數是記錄數個 1，數個 0.1，數個 0.01，數個 0.001 和數個 0.0001 的合成結果，例如： $0.3758$  是記錄 3 個 0.1、7 個 0.01 和 5 個 0.001 的合成結果，展開式可以寫成  $0.3758 = 0.1 \times 3 + 0.01 \times 7 + 0.001 \times 5 + 0.0001 \times 8$ 。

### 2.透過定位板讓學生觀察發現，能理解小數多單位位值和其大小的變化

整數位值越往左其值越大，數字往左移動一個位值，其值變為原來的 10 倍，反之往右移動一個位值，其值變為原來的  $\frac{1}{10}$  倍。小數亦然，十分位的 1 代表個位 1 的  $\frac{1}{10}$ ，百分位的 1 代

表十分位 1 的  $\frac{1}{10}$ 。

利用定位板，如【表 14-1】來輔助認識小數的位值和位名，以了解小數概念是整數十進位系統的延伸。

【表 14-1】

個 位	十 分 位	百 分 位	千 分 位	萬 分 位
0	3	7	5	8

以定位板理解「0.1」、「0.01」、「0.001」、「0.0001」四個單位間的化聚活動，例如一位小數問題：「一盒雞蛋有 10 個，1 個雞蛋是 0.1 盒。35 個雞蛋是幾個 0.1 盒？合起來是幾盒？」與「一盒雞蛋有 10 個，3.5 盒有幾個雞蛋？」的雙向化聚問題。

再到兩位小數問題：「一包影印紙有 100 張，1 張影印紙是 0.01 包，10 張影印紙是 0.1 包。76 張影印紙是幾個 0.01 包和幾個 0.1 包？」與「一包影印紙有 100 張，幾個 0.01 和幾個 0.1 包合起來是 0.76 包？」的雙向化聚問題。

再到三位小數問題：「一盒白色積木有 1000 個，1 個白色積木是 0.001 盒，10 個白色積木（即 1 個橘色積木）是 0.01 盒，100 個白色積木（即 1 個百格板）是 0.1 盒。468 個白色積木是由多少個 0.001 盒、多少個 0.01 盒和多少個 0.1 盒白色積木合起來的？」與「一盒白色積木有 1000 個，多少個 0.001 盒、多少個 0.01 盒（即 1 個橘色積木）和多少個 0.1 盒白色積木（即 1 個百格板）合起來是 0.468 盒？」的雙向化聚問題。

#### （四）本題教學的加強重點

在小數的概念，學生易把整數讀法的習慣用在小數部分，老師應配合定位板來加強學生小數的位值概念，可先從整數的位值認識再到小數的位值認識，引導學生理解讀整數時，我們會讀出位名，故零可省略，而讀小數時沒有讀出位名，故零不可以省略。從【表 14-2】讓學生理解與發現 3009.1008 這個數字，報讀整數時與報讀小數時的差異。此外，引導學生理解越靠近個位或小數點的位值越大，再連結整數比大小的舊經驗：比大小時，先從比較大的位值開始比。從【表 14-3】和【表 14-4】的定位板可以清楚看出兩數的個位、十分位和百分位皆相同，9.180 和 9.18 都是表示千分位為 0，差別只在當小數點右邊末位的 0 可以省略。之後，並多做小數的聽、說、讀、寫的練習。

【表 14-2】

千 位	百 位	十 位	個 位	十 分 位	百 分 位	千 分 位	萬 分 位
3	0	0	9	1	0	0	8

【表 14-3】

個 位	十 分 位	百 分 位	千 分 位
9	1	8	0

【表 14-4】

個 位	十 分 位	百 分 位	千 分 位
9	1	8	

定位板也可以用來理解「0.1」和「0.01」單位間的化聚，1 個 0.1 是 10 個 0.01。從【表 14-5】中，可以將 0.88 看成 8 個 0.1 和 8 個 0.01 合成，而 1 個 0.1 個是 10 個 0.01，8 個 0.1 是 80 個 0.01，所以也可以將 0.88 看成 88 個 0.01 合成。

【表 14-5】

個 位	十 分 位	百 分 位	千 分 位
0	8	8	

#### 四、命題建議

5-n-10 的基本學習內容包含以下：

5-n-10-1 能進行多位小數的命名及說、讀、聽、寫。

5-n-10-2 能認識「千分位」、「萬分位」等的位名。

5-n-10-3 能進行多位小數位值單位的換算。

5-n-10-4 能進行多位小數的大小比較。

5-n-10-5 能進行多位小數的加、減計算。

5-n-10-6 能進行多位小數的整數倍計算。

本條文所包含的概念較多，教師在進行命題時可針對不同的學習表現單獨命題，較能診斷出學生在該學習表現上的迷思處。

## 五、歷年檢測試題參考

### (一) 104 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

有三種面積為 0.1 平方公尺、0.01 平方公尺和 0.0001 平方公尺的紙片，若要利用紙片拼排出「0.3082 平方公尺」，下列哪個選項是正確的？

- ① 3 張 0.1 平方公尺，82 張 0.0001 平方公尺
- ② 3 張 0.1 平方公尺，8 張 0.01 平方公尺，  
2 張 0.0001 平方公尺
- ③ 3 張 0.01 平方公尺，82 張 0.0001 平方公尺
- ④ 3082 張 0.01 平方公尺

選 項	1	2	3	4	其他	答案：1
選項率	0.70*	0.14	0.08	0.07	0.01	鑑別度：0.59 難易度：0.65
高分組	0.94	0.04	0.01	0.00	0.00	
低分組	0.35	0.28	0.19	0.17	0.01	

### (二) 105 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

下列哪一個選項是正確的？

- ①  $0.90098 > 0.9098$
- ② 「15.0032」讀作「十五點零三二」
- ③ 「0.23695」中的 9 是千分位
- ④  $\frac{1}{16}$  用小數表示是 0.0625

選 項	1	2	3	4	其他	答案：4
選項率	0.09	0.18	0.11	0.62*	0.00	鑑別度：0.54 難易度：0.62
高分組	0.02	0.06	0.03	0.89	0.00	
低分組	0.17	0.29	0.19	0.35	0.00	

(三) 106 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

求  $6.789 + 3.92 = ?$

- ① 6.071
- ② 7.181
- ③ 9.609
- ④ 10.709

選 項	1	2	3	4	其他	答案：4
選項率	0.02	0.13	0.05	0.80*	0.00	鑑別度：0.4 難易度：0.76
高分組	0.00	0.03	0.01	0.96	0.00	
低分組	0.04	0.30	0.10	0.56	0.00	

(四) 107 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

下列選項哪個是正確的？

- ①  $9.180 > 9.18$
- ②  $0.099 + 0.001 = 0.1$
- ③ 0.99 共有 99 個 0.1
- ④  $\frac{4}{5} = 0.4$

選 項	1	2	3	4	其他	答案：2
選項率	0.03	0.80*	0.13	0.04	0.00	鑑別度：0.47 難易度：0.74
高分組	0.00	0.97	0.02	0.00	0.00	
低分組	0.08	0.50	0.31	0.11	0.00	

第 15 題 5-n-09

知識向度	數與計算	認知向度	概念理解																														
對應	5-n-09 能理解除數為整數的分數除法的意義。																																
題目	<p>「冰箱裡有<math>6\frac{3}{6}</math>公升的牛奶，平分給3個人，每個人可以得到多少公升的牛奶？」下列答案何者正確？</p> <p>① <math>2\frac{1}{6}</math>公升</p> <p>② <math>2\frac{1}{2}</math>公升</p> <p>③ <math>3\frac{1}{2}</math>公升</p> <p>④ <math>6\frac{1}{6}</math>公升</p>																																
答題表現 選項分析	<table border="1"> <thead> <tr> <th>選 項</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> <th>其他</th> <th>答案：1</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>選項率</td> <td>0.68*</td> <td>0.17</td> <td>0.06</td> <td>0.07</td> <td>0.00</td> <td>鑑別度：0.53 難易度：0.65</td> </tr> <tr> <td>高分組</td> <td>0.91</td> <td>0.06</td> <td>0.01</td> <td>0.02</td> <td>0.00</td> <td></td> </tr> <tr> <td>低分組</td> <td>0.38</td> <td>0.29</td> <td>0.17</td> <td>0.15</td> <td>0.00</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>					選 項	1	2	3	4	其他	答案：1	選項率	0.68*	0.17	0.06	0.07	0.00	鑑別度：0.53 難易度：0.65	高分組	0.91	0.06	0.01	0.02	0.00		低分組	0.38	0.29	0.17	0.15	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：1																											
選項率	0.68*	0.17	0.06	0.07	0.00	鑑別度：0.53 難易度：0.65																											
高分組	0.91	0.06	0.01	0.02	0.00																												
低分組	0.38	0.29	0.17	0.15	0.00																												

一、試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.53，通過率為 0.68，難易度 0.65。

(二) 評量目標說明

本題是在等分除的情境下，評量學生是否能以分數除法來解決問題，以及能理解被除數為帶分數時進行分數除法的意義。

(三) 選項表現說明

- 有 68% 的學生選擇①顯示這些學生具有明確的「部分與整體」的分數概念，知道在等分除的情境下，能正確將帶分數中的整數部分及小數部分進行等分。
- 有 17% 的學生選擇選項②，顯示這些學生對於帶分數的意涵不甚明確，將帶分數中的「整數部分、分子、分母」皆除以 3。
- 有 7% 的學生選擇選項④，顯示這些學生將帶分數中的「分子部分」除以 3，但卻未處理帶分數中的「整數部分」。
- 有 6% 的學生選擇選項③，顯示些學生將帶分數中的「分子、分母的部分」皆除以 3，而「整數部分」卻以減法的方式來進行計算。

#### (四) 學生表現說明

- 1.本題是一個等分除的問題，但是被除數為帶分數，除數為整數，結果為分數，評量學生對於帶分數除以整數的情境裡解情形以及分數除法的計算能力。
- 2.本題的通過率為 68%，顯示將近七成的學生能理解等分除情境下的題意，並熟悉當被除數為帶分數時的運算規則。從高分組與低分組學生的表現來看，高分組學生答對率為 91%，表示高分組學生多能理解及運用此運算規則。而低分組學生答對率卻只有 38%，甚至有 29% 的低分組的學生選擇選項②，顯示這些學生無法掌握被除數為帶分數時的計算概念，而低分組選擇選項③、選項④的學生合計有將近有 32%，可見仍有許多學生不了解帶分數中整數部分所代表的意涵，教師在教學時應特別注意如何讓學生理解後進一步能熟練應用於解題。

## 二、教材地位分析

### 97 課綱 (分年細目)

#### (一) 評量重點

5-n-09 能理解除數為整數的分數除法的意義，並解決生活中的問題。

#### (二) 先備的知識

4-n-08 能認識真分數、假分數與帶分數，熟練假分數與帶分數的互換，並進行同分母分數的比較、加、減與整數倍的計算。

5-n-08 能理解分數乘法的意義，並熟練其計算，解決生活中的問題。

#### (三) 延伸的知識

6-n-04 能理解分數除法的意義及熟練其計算，並解決生活中的問題。

### 十二年國教課綱 (學習內容)

#### (一) 評量重點

N-5-7 分數除以整數：分數除以整數的意義。最後將問題轉化為乘以單位分數。

#### (二) 先備的知識

N-4-5 同分母分數：一般同分母分數教學 (包括「真分數」、「假分數」、「帶分數」名詞引入)。假分數和帶分數之變換。同分母分數的比較、加、減與整數倍。

N-5-5 分數的乘法：整數乘以分數、分數乘以分數的意義。知道用約分簡化乘法計算。處理乘積一定比被乘數大的錯誤類型。透過分數計算的公式，知道乘法交換律在分數也成立。

#### (三) 延伸的知識

N-6-3 分數的除法：整數除以分數、分數除以分數的意義。最後理解除以一數等於乘以其倒數之公式。

## 三、教學建議

#### (一) 評量核心概念

在等分除情境下，分數除以整數的問題。

#### (二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1.雖以除法列式，但卻用乘法來計算，例如 $\frac{3}{4} \div 3 = \frac{3}{4} \times 3 = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$ 。

2.被除數的分子和分母皆除以整數，和約分的方法混淆，

例如： $\frac{3}{4} \div 2 = \frac{4}{6} \div 2 = \frac{2}{3}$ 。

3.不熟悉「 $\div m$ 」相當於「 $\times \frac{1}{m}$ 」的運算規則，除號直接改乘號，

例如： $\frac{3}{4} \div 3 = \frac{3}{4} \times 3$ 。

4.當被除數為帶分數的情形時，未能明確理解「整數部分」所代表的分數意涵。

### (三) 核心概念的教學重點

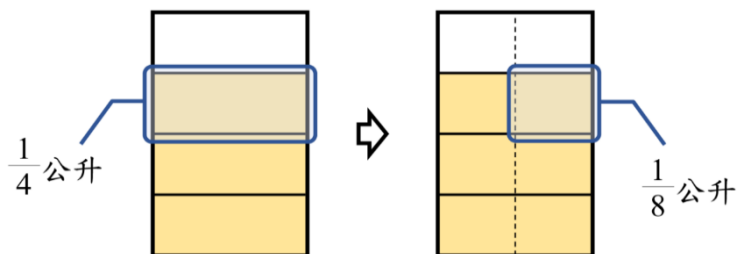
分數除以整數的問題可以是整數除法問題的延伸。

#### 1. 整數除法的問題

以「6公升的牛奶，要平分裝成3杯牛奶，一杯是幾公升？」為例。這是整數等分除的問題情境，我們將大集合6公升看成6個小元素「1」公升，平均分配到3杯後，再回頭計數每一杯有幾公升。所以， $6 \div 3 = 2$  得到每一杯有2個1公升，也就是每一杯有2公升。

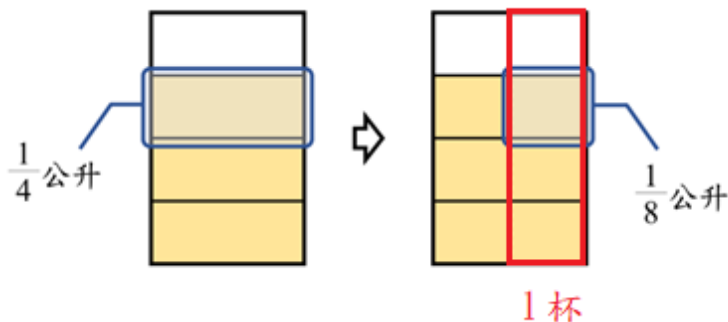
#### 2. 分數除以整數的問題

(1) 同整數除法，將大集合換成小元素的細分觀點引入：以「 $\frac{3}{4}$ 公升的牛奶，要平分裝成2杯牛奶，一杯是幾公升？」為例。將 $\frac{3}{4}$ 公升視為3個 $\frac{1}{4}$ 公升平分成2份，所以把3個 $\frac{1}{4}$ 公升再細分成6個 $\frac{1}{8}$ 公升，如【圖 15-1】。



【圖 15-1】

所以每一份中有3個 $\frac{1}{8}$ 公升，也就是每杯有 $\frac{3}{8}$ 公升。算式紀錄為 $\frac{3}{4} \div 2 = \frac{3}{8}$ 。如【圖 10-2】。



【圖 15-2】

- (2) 從分數倍的觀點引入：以「 $\frac{3}{4}$ 公升的牛奶，要平分裝成 2 杯牛奶，一杯是幾公升？」為例，題意是要把 $\frac{3}{4}$ 公升的牛奶，平分裝成 2 份取其中 1 份。從分數的意義上來看，可以視為「 $\frac{3}{4}$ 公升的 $\frac{1}{2}$ 倍是多少公升？」，引導學生將問題當作分數的分數倍問題，算式記錄成「 $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = ?$ 」，再用分數乘法算出答案： $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$ 。
- (3) 教師引導學生觀察除法記錄問題與乘法記錄問題的事實相同，進而引出 $\frac{3}{4} \div 2 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$ ，觀察發現，學生最後要熟知「 $\div 2$ 」相當於「 $\times \frac{1}{2}$ 」之事實，並能熟練計算。
- (4) 教學時，布題要包含真分數、假分數及帶分數除以整數的問題，也要有離散量與連續量的情境。
- (5) 教學時，讓學生理解「平分成 2 等份，就是全部的 $\frac{1}{2}$ 」、「平分成 3 等份，就是全部的 $\frac{1}{3}$ 」。藉由情境理解並類推，熟知「 $\div m$ 」等於「 $\times \frac{1}{m}$ 」。程序性知識：分數除以整數沒有餘數時，分子不變，分母乘以除數，即： $\frac{\text{分子}}{\text{分母}} \div \text{整數} = \frac{\text{分子}}{\text{分母} \times \text{整數}}$ 。

#### (四) 本題教學的加強重點

本題希望學生遇到「當被除數為帶分數」的情形時，能明確理解「整數部分」所代表的分數意涵，並帶入算式記錄。

1. 以本題為例，學生可將「整數部分」與「分數部份」分開計算，將 $6\frac{3}{6}$ 公升的牛奶，視為「6公升的牛奶及 $\frac{3}{6}$ 公升的牛奶」平分成 3 份，所以把 6 公升分成 3 份，而每一個人分到其中的 1 小等份，也就是 2 公升，再將 $\frac{3}{6}$ 公升的牛奶」平分成 3 份，每人分得 $\frac{1}{6}$ 公升，合起來每一個人共分得 $2\frac{1}{6}$ 公升的牛奶。
2. 教師亦可從分數倍的觀點引入：以本題為例，題意是要把 $6\frac{3}{6}$ 公升的牛奶，平分裝成 3 份取其中 1 份，也就是全部的 $\frac{1}{3}$ 。從分數的意義上來看，可以將「 $6\frac{3}{6}$ 公升以假分數的形式表示為 $\frac{39}{6}$ 的 $\frac{1}{3}$ 倍是多少公升？」，引導學生將問題當作分數的分數倍問題，進而求出答案。
3. 教師亦可利用本題之四個選項中的算式與題目相互澄清，讓學生透過情境思考解題算式的意義是否符合題目情境，以理解選項間的算式是否具有相同代表意義，以澄清算式與題目情境間的關係。另外，再澄清題意所要求解的選擇錯誤選項。
4. 由於除法教學相對比較抽象，教師應該鼓勵學生驗算，並理解其意義。

#### 四、命題建議

- (一) 選擇命題應盡量避免出現下列何者錯誤的命題，因為其錯誤原因可能是學生真的有迷思概念，但也可能是因為未看清楚題目，看到對的答案就選了該選項。若一定要出現這樣的命題方式，可以設計為解題步驟中哪一項是錯誤的，如此比較能清楚知道學生迷思問題在哪裡，較能針對迷思問題進行補救教學。

(二) 分數除以整數可從等分除的情境入手，也可以考慮處理測量(分裝)的情境，如「將 $\frac{1}{2}$ 公升的水倒入容量3公升的水桶， $\frac{1}{2}$ 公升的水是幾桶水？」

## 五、歷屆檢測試題參考

### (一) 104 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

「有一塊 $6\frac{12}{15}$ 公畝的農地，平分成3區種植不同的農作物，問每一區農作物面積是多少？」下列哪一個算式是錯誤的？

- ①  $6\frac{12}{15} \div 3 = 6 \div 3 + \frac{12}{15}$   
 ②  $6\frac{12}{15} \div 3 = 6 \div 3 + \frac{12}{15} \div 3$   
 ③  $6\frac{12}{15} \div 3 = 6 \times \frac{1}{3} + \frac{12}{15} \times \frac{1}{3}$   
 ④  $6\frac{12}{15} \div 3 = \frac{102}{15} \times \frac{1}{3}$

選 項	1	2	3	4	其他	答案：1
選項率	0.55*	0.19	0.13	0.12	0.01	鑑別度：0.72 難易度：0.56
高分組	0.92	0.04	0.02	0.02	0.00	
低分組	0.20	0.32	0.26	0.21	0.02	

(二) 105 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

冰箱裡有  $1\frac{8}{12}$  桶豆花，平分給 4 位學生，每位可分得幾桶豆花？

- ①  $1\frac{2}{12}$  桶
- ②  $\frac{5}{12}$  桶
- ③  $\frac{5}{3}$  桶
- ④  $\frac{2}{3}$  桶

選 項	1	2	3	4	其他	答案：2
選項率	0.07	0.69*	0.18	0.06	0.00	鑑別度：0.4 難易度：0.69
高分組	0.01	0.90	0.08	0.01	0.00	
低分組	0.13	0.49	0.25	0.13	0.00	

(三) 106 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

「將  $3\frac{3}{4}$  公升的果汁平分成 3 杯，每杯有幾公升？」下列選項何者錯誤？

- ① 每杯是「 $3 + \frac{3}{4} \div 3$ 」公升
- ② 每杯是「 $3\frac{3}{4}$  的  $\frac{1}{3}$ 」公升
- ③ 每杯是「 $3\frac{3}{4} \div 3$ 」公升
- ④ 每杯是「 $3\frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$ 」公升

選 項	1	2	3	4	其他	答案：1
選項率	0.39*	0.23	0.17	0.19	0.00	鑑別度：0.49 難易度：0.45
高分組	0.70	0.14	0.08	0.09	0.00	
低分組	0.20	0.26	0.29	0.26	0.00	

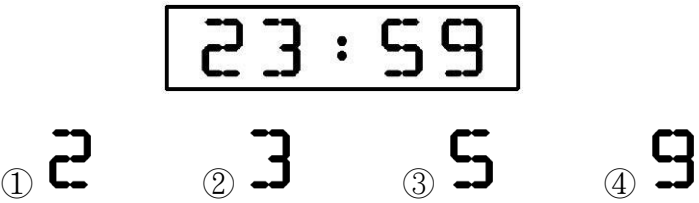
(四) 107 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

「一瓶  $\frac{5}{7}$  公升的牛奶，平分倒在 5 個杯子，每個杯子有幾公升的牛奶？」下列選項哪個錯誤？

- ① 每杯是  $\frac{5}{7}$  公升的  $\frac{1}{5}$  倍
- ② 每杯是「 $\frac{5}{7} \times \frac{1}{5}$ 」公升
- ③ 每杯是「 $\frac{5}{7} \div 5$ 」公升
- ④ 每杯是「 $\frac{5}{7} \times 5$ 」公升

選 項	1	2	3	4	其他	答案：4
選項率	0.09	0.09	0.20	0.62*	0.00	鑑別度：0.65 難易度：0.6
高分組	0.01	0.02	0.04	0.93	0.00	
低分組	0.20	0.18	0.35	0.28	0.00	

第 16 題 5-s-04

知識向度	幾何	認知向度	概念理解																														
對應分年細目	5-s-04 能認識線對稱與簡單平面圖形的線對稱性質。																																
題目	<p>電子錶上面有四個數字(如下圖)，哪個數字是線對稱圖形？</p> 																																
答題表現 選項分析	<table border="1"> <thead> <tr> <th>選 項</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> <th>其他</th> <th>答案：2</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>選項率</td> <td>0.07</td> <td>0.78*</td> <td>0.09</td> <td>0.06</td> <td>0.00</td> <td>鑑別度：0.43</td> </tr> <tr> <td>高分組</td> <td>0.01</td> <td>0.95</td> <td>0.03</td> <td>0.01</td> <td>0.00</td> <td>難易度：0.73</td> </tr> <tr> <td>低分組</td> <td>0.16</td> <td>0.52</td> <td>0.19</td> <td>0.13</td> <td>0.00</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>					選 項	1	2	3	4	其他	答案：2	選項率	0.07	0.78*	0.09	0.06	0.00	鑑別度：0.43	高分組	0.01	0.95	0.03	0.01	0.00	難易度：0.73	低分組	0.16	0.52	0.19	0.13	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：2																											
選項率	0.07	0.78*	0.09	0.06	0.00	鑑別度：0.43																											
高分組	0.01	0.95	0.03	0.01	0.00	難易度：0.73																											
低分組	0.16	0.52	0.19	0.13	0.00																												

一、試題分析

(一) 數據解析：

本題鑑別度為 0.43，通過率為 0.78，難易度為 0.73。

(二) 評量目標說明：

本題旨在測驗學生是否理解平面圖形的線對稱性質，評量學生是否能從給定的圖形中判斷是否為線對稱圖形。

(三) 選項表現說明：

1. 本題正確答案為選項②，通過率為 0.73，顯示大部分的學生已經掌握判別對稱圖形的能力。
2. 有 9% 的學生選擇選項③、7.05% 的學生選擇選項①、5.47% 的學生選擇選項④這些學生對於線對稱圖形的性質並未完全理解。

(四) 學生表現說明：

本題的命題設計主要希望了解學生，對於「線對稱圖形」概念及性質是否完全了解。因此，在選項中設計了幾個電子時鐘的數字，包含了線對稱、點對稱及非對稱圖形得數字，讓學生找哪一個數字是線對稱圖形。

二、教材地位分析

97 課綱 (分年細目)：

(一) 評量重點：

5-s-04 能認識線對稱與簡單平面圖形的線對稱性質。

(二) 先備的知識：

4-s-03 能認識平面圖形全等的意義。

4-s-06 能理解平面上直角、垂直與平行的意義。

**(三) 延伸的知識：**

8-s-06 能理解線對稱的意義，以及能應用到理解平面圖形的幾何性質。

8-s-14 能用線對稱概念，理解等腰三角形、正方形、菱形、箏形等平面圖形。

**十二年國教課綱（學習內容）：**

**(一) 評量重點：**

S-5-4 線對稱：線對稱的意義。「對稱軸」、「對稱點」、「對稱邊」、「對稱角」。由操作活動知道特殊平面圖形的線對稱性質。利用線對稱做簡單幾何推理。製作或繪製線對稱圖形。

**(二) 先備的知識：**

S-4-6 平面圖形的全等：以具體操作為主。形狀大小一樣的兩圖形全等。能用平移、旋轉、翻轉做全等疊合。全等圖形之對應角相等、對應邊相等。

**(三) 延伸的知識：**

S-8-11 梯形的基本性質：等腰梯形的兩底角相等；等腰梯形為線對稱圖形；梯形兩腰中點的連線段長等於兩底長和的一半，且平行於上下底。

**三、教學建議**

**(一) 評量核心概念：**

能在具體示例中判斷圖形是否為線對稱圖。

**(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念：**

- 1.認為對角線即是對稱軸：受正方形影響，常常也認為矩形、平行四邊形、等腰梯形……，等相近圖形的對角線也是對稱軸。
- 2.認為對稱軸只有一條：尤其是對於正多邊形及圓形的對稱軸，許多學生常常認為只有一條對稱軸。因為學生雖然知道對稱軸的定義，但卻忽略在圖形上仍然可以找出其他直線，讓圖形對摺後仍可以完全重疊。
- 3.認為只有垂直線、水平線才能當作對稱軸：在圖形中除了水平線及垂直線有可能是對稱軸外，其他直線也有可能是對稱軸。例如：正方形的兩條對角線也是對稱軸。

**(三) 核心概念的教學重點：**

- 1.線對稱圖形的定義：一個平面圖形，如果可以找到一條直線，將圖形分成兩部分，沿著此直線對摺後，兩部分的圖形能夠完全疊合，此圖形稱為線對稱圖形。
- 2.透過鏡子觀察：使用鏡子利用鏡射的方式讓學生觀察，鏡子必需放在圖形中的那一個地方與圖形互相垂直才能完全呈現圖形的另一半，形成一個線對稱圖形，同時讓學生了解鏡子所放的地方形成一條線，就是所謂的對稱軸。
- 3.透過摺紙活動：教師可以提供日常生活中屬於線對稱的圖形，例如：建築物圖片、動物圖片、正多邊形……等圖片，讓學生透過摺疊的活動，找出對稱軸。實際觀察對稱圖形在對稱軸兩邊的圖形，經過摺疊以後會完全疊合。

4.對稱點、對稱邊、對稱角的認識：老師可以指導學生將對稱圖形利用對稱軸摺疊後，觀察發現疊合的圖形中，可以找到相疊合的點、邊及角，並透過命名活動命名為對稱點、對稱邊、對稱角。

5.畫出線對稱圖形：老師可以先透過釘板的操作，讓學生利用對稱軸的觀念，拼出對稱圖形的另一半。確認學生已熟悉對稱圖形的性質之後，可以進一步利用方格紙，讓學生畫出對稱圖形的另一半。

(四) 本題教學的加強重點：

對於如何判斷是否為線對稱圖形，老師可以讓學生嘗試對選項中的四個數字，找出可能得對稱軸，再透過鏡子利用鏡射方式，觀察所產生的另一半圖形，會產生和題目中相同的數字（鏡子後方圖形完全重疊）。或者利用對摺的方式，觀察哪一個數字對摺後，圖形會完全重疊。

四、命題建議

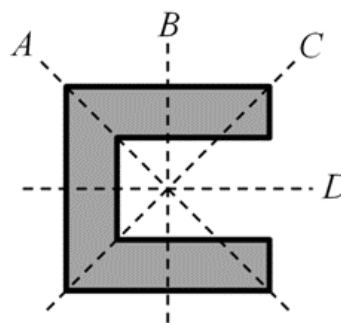
- (一) 老師可以設計一個線對稱圖形，並在圖形中畫出幾條直線，讓學生判斷圖形的對稱軸是那一條。
- (二) 如果是開放性的題型，老師可以先畫出圖形的一部份及指定的對稱軸，再讓學生畫出圖形的另一半。

五、歷屆試題

(一) 國家教育研究院 105 年協助縣市辦理學生學習能力檢測國一小五年級數學科試題

小明畫出一個線對稱圖形「E」(如下圖)，哪一條虛線是它的對稱軸？

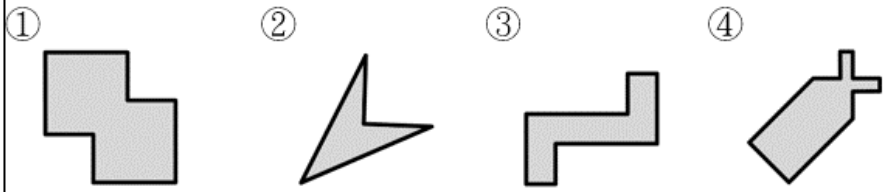
- ① 虛線 A
- ② 虛線 B
- ③ 虛線 C
- ④ 虛線 D



選 項	1	2	3	4	其他	答案：4
選項率	0.02	0.08	0.02	0.88*	0.00	鑑別度：0.24 難易度：0.86
高分組	0.00	0.01	0.00	0.98	0.00	
低分組	0.05	0.17	0.04	0.74	0.00	

(二) 106 學年度新北市國小五年級數學能力檢測試題

下列哪個圖形 不是 線對稱圖形？



選 項      1            2            3            4            其他      答案：3

選項率      0.04        0.03        0.88\*      0.04        0.01      鑑別度：0.24

難易度：0.85

高分組      0.01        0.78        0.97        0.61        0.00

低分組      0.08        0.08        0.74        0.10        0.00

第 17 題 5-n-03

知識向度	數與計算	認知向度	概念理解				
對應分年細目	5-n-03 能熟練整數四則混合計算。						
題目	<p>「糖果一包有 60 顆，把 2 包糖果平分成 15 袋，其中 5 袋給甲班。」要計算甲班拿到幾顆糖果的算式是下列哪個選項？</p> <p>① <math>60 \div 2 \div 15</math>                      ② <math>60 \times 2 \div 15</math>            ③ <math>60 \times 2 \div 15 - 5</math>                ④ <math>60 \times 2 \div 15 \times 5</math></p>						
答題表現 選項分析	選 項	1	2	3	4	其他	答案：4
	選項率	0.05	0.10	0.35	0.50*	0.00	鑑別度：0.6 難易度：0.5
	高分組	0.00 <sup>+</sup>	0.03	0.17	0.80	0.00	
	低分組	0.14	0.22	0.44	0.20	0.00	
							<sup>+</sup> 代表數值不等於 0

一、試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.6，通過率為 0.49，難易度 0.5。

(二) 評量目標說明

本題旨在評量學生是否理解題意，並能用整數三步驟的四則混合計算來列式記錄。

(三) 選項表現說明

1. 有 50% 的學生選擇選項④，顯示有五成的學生能理解題意並清楚掌握整數四則混合運算的算則。題目中的總量為 2 包糖果的總顆數，因此先記錄為「 $60 \times 2$ 」，再將其平分成 15 小包，算式再記錄為「 $60 \times 2 \div 15$ 」，此時得到的商為每一袋的顆數，因題目說將其中 5 袋給甲班，且問的是得到的顆數，因此算式需記錄為「 $60 \times 2 \div 15 \times 5$ 」。
2. 有 35% 的學生選擇選項③，這些學生學生可能出現以下幾種錯誤：一是未能理解「 $60 \times 2 \div 15$ 」所得到的商為每一袋的顆數。二是忽略所問的單位是「顆數」。三是誤以為「其中 5 袋給甲班」是「減法中的拿走型」題目，故列式為「 $60 \times 2 \div 15 - 5$ 」。
3. 有 10% 的學生選擇選項②，這些學生學生僅是忽略了「其中 5 袋給甲班」，故最後算式記錄為「 $60 \times 2 \div 15$ 」。
4. 有 5% 的學生選擇選項①，這些學生學生在理解題目時，誤將「2 包平分」解讀為「平分成 2 包」，所以紀錄為「 $60 \div 2$ 」，再加上忽略了「其中 5 袋給甲班」，故最後算式記錄為「 $60 \div 2 \div 15$ 」。

(四) 學生表現說明

1. 本題為整數四則混合運算的題目，在評量學生是否能從問題情境中理解題意，並能熟練運用四則運算規則列式記錄問題。
2. 本題的通過率為 0.49，表示只有不到五成的學生能清楚理解題意，並運用四則運算規則來列式記錄；反之，卻有超過五成的學生因為題意的不理解而造成列式錯誤。從高分組與

低分組學生的表現來看，高分組學生的答對率有 80%，而在低分組學生中答對率僅有 20%，且有 44% 選③，這些低分組的學生誤以為「其中 5 袋給甲班」是「減法中的拿走型」題目，而未能理解「 $60 \times 2 \div 15$ 」所得到的商為每一袋的顆數。

## 二、教材地位分析

### 97 課綱（分年細目）

#### （一）評量重點

5-n-03 能熟練整數四則混合計算。

#### （二）先備的知識

4-n-04 能在具體情境中，解決兩步驟問題，並學習併式的記法與計算。

4-n-05 能做整數四則混合計算（兩步驟）。

#### （三）延伸的知識

6-n-05 能在具體情境中，解決分數的兩步驟問題，並能併式計算。

6-n-08 能在具體情境中，解決小數的兩步驟問題，並能併式計算。

### 十二年國教課綱（學習內容）

#### （一）評量重點

R-5-2 四則計算規律（II）：乘除混合計算。「乘法對加法或減法的分配律」。將計算規律應用於簡化混合計算。熟練整數四則混合計算。

#### （二）先備的知識

R-4-1 兩步驟問題併式：併式是代數學習的重要基礎。含四則混合計算的約定（由左往右算、先乘除後加減、括號先算）。學習逐次減項計算。

R-4-2 四則計算規律（I）：兩步驟計算規則。加減混合計算、乘除混合計算。在四則混合計算中運用數的運算性質。

#### （三）延伸的知識

R-6-1 數的計算規律：小學最後應認識（1）整數、小數、分數都是數，享有一樣的計算規律。（2）整數乘除計算及規律，因分數運算更容易理解。（3）逐漸體會乘法和除法的計算實為一體。併入其他教學活動。

## 三、教學建議

#### （一）評量核心概念

學生能理解題意，並用整數三步驟的四則混合計算來列式記錄。

#### （二）學生常見的錯誤類型／迷思概念

##### 1. 一律由左至右計算

學生可能對於整數四則運算順序的規約並不了解，因此不論算式中是否同時具有加、減、乘、除或是有括號，皆由左至右逐一進行計算。

例如：「 $20 + 4 \times 5 - 3 =$ 」，學生可能會先計算  $20 + 4 = 24$ ，接著將  $16 \times 5 = 80$ ，再算  $80 - 3 = 77$ ，因此而得到錯誤的結果，此即學生了解其運用四則運算規約，而只知由左至右逐步計算。

## 2.以為先算乘法，再算除法

學生可能因為背誦口訣「先乘除後加減」，誤解口訣中的運算規則，以為乘法的運算順序先於除法。另外也有可能是因為括號通常先教，所以學生最熟悉，因此容易忽略其他的運算規則。

例如：「 $48 \div 6 \times 2 =$ 」，學生可能先算  $6 \times 2 = 12$ ，再算  $48 \div 12 = 4$ ，所以誤算答案為 4。

## 3.以為先算加法，再算減法

學生可能因為背誦口訣「先乘除後加減」，誤解口訣中的運算規則，以為加法的運算順序先於減法。

例如：「 $20 - 3 + 7 =$ 」，學生可能先算  $3 + 7 = 10$ ，再算  $20 - 10 = 10$ ，所以誤算答案為 10。

## 4.對於併式的過程及方式不了解

當學生不了解併式的意義及算則規約產生的情況時，學生不容易理解「括號先算」、「先算乘或除，後算加或減」等算則的意義。

例如： $7 \times 18 = 126$ ， $7 \times 12 = 84$ ， $126 + 84 = 210$ ，如果先算  $18 + 12 = 30$ ，再算  $7 \times 30 = 210$ ，可以簡化計算，因此可以併式為  $7 \times (18 + 12)$ 。當學生不了解這個併式過程及括號先算的意義時，就無法理解各種四則運算的算則，而只是一味的從左至右逐項運算。

**5.對多步驟問題的題意理解有困難：**五年級整數混合運算學習的是三步驟應用問題，學生對複雜的應用問題情境不能充分理解題意，因此容易錯誤列式。

## 6.不理解括號的有無與對算式的影響

學生在學習四則運算的算則時，會記得有括號要先算，但為什麼要先算或者括號位置的改變對於運算過程有無影響，則不甚清楚，例如： $100 - (3 \times 31) = 100 - 3 \times 31$ ，此算式使用先乘除後加減的算則判斷，得知有無括號不會影響答案，故應鼓勵學生不使用括號。又如： $1000 - (400 + 300)$  與  $1000 - 400 + 300$ ，有括號與無括號計算的答案是不同的。括號使用的需求性及必要性應從生活情境問題去引導學生理解。

## 7.無法充分理解括號的位置與對運算結果的影響

以  $(1000 \times 400) \div 100$  與  $1000 \times (400 \div 100)$  二個算式為例，括號位置的改變對算式無影響；而比較  $(1000 - 400) \div 100$  與  $1000 - (400 \div 100)$  二個算式，括號位置的改變對算式是有影響。教師在教學時應讓學生在情境問題中解釋，括號位置的改變對算式的影響，再利用純計算題讓學生能熟練運用四則運算規則，自行發現括號位置的改變對算式的影響。

### (三) 核心概念的教學重點

學生在學習四則運算的算則時，應該利用生活化的情境，讓學生理解為了簡化複雜的列式及運算過程，因此逐漸形成運算規則的共識：

#### 1.由左至右計算

學生在學習整數四則運算之前即具有「先算左邊，再算右邊」的舊經驗。唯先前的學習情境是較為單純的單步驟或二步驟解題，在進入較為複雜的情境（多步驟）之後，人們首先形成「由左至右計算」的規約。

例如：「 $23 - 30 + 15 =$ 」和「 $3 \times 15 \div 5 =$ 」，因為式子中的運算符號為「+」、「-」與「 $\times$ 」、「 $\div$ 」與學生先前的計算經驗雷同，因此學生多數能執行由左至右計算，部分學生可能會先進行「 $30 + 15$ 」以及「 $15 \div 5$ 」的運算，雖然答案相同，唯在進行教學時，應適當檢視計算方式與題意是否相符。

## 2.括號部分先計算

在一個算式中如果出現括號，則表示「必須先處理的部分」，教師應從情境布題，再輔以提問，讓學生產生「某部分必須先處理」的體會，亦即出現「使用括號的需求感」。例如：「包子店新開幕，每個包子特價一律 5 元，媽媽用 500 元買了 6 個肉包，8 個菜包，應該找回多少元？」學生依據題意，可分別列出下列算式： $5 \times 6 = (\quad)$ （買 6 個肉包的錢），及  $5 \times 8 = (\quad)$ （買 8 個菜包的錢）。

這時老師可輔以提問：「媽媽買包子一共花多少錢？」多數學生會將兩者相加，以「 $5 \times 6 + 5 \times 8$ 」合併算式，教師再提問：「媽媽付了 500 元，應該找回多少錢？」，學生可能會寫成： $500 - 5 \times 6 + 5 \times 8 = (\quad)$ 。

此時，即應請學生思考這個算式的計算是否符合題意，學生提出應該要「先算」肉包和菜包一共要多少錢，再用 500 元減去花費的總額，即是老師提問之應該找回的金額。在情境設計及教師的提問引導下產生「括號先算」的需求，因此，我們可以使用括號將上述算式寫成： $500 - (8 \times 5 + 6 \times 5)$ 。

## 3.先算乘或除，後算加或減

隨著運算情境的複雜，為了減少括號的使用，人們約定當算式中同時出現加、減或乘、除在一個算式中時，要先算乘除再算加減，因此在這個運算規約的學習，亦應設計生活化的情境，協助學生理解「先算乘（或除），後算加（或減）」規約的產生。

以  $53 - 3 \times 15$  為例，在解題時，應先算「 $3 \times 15$ 」的部分，得到 45，再計算  $53 - 45 = 8$ 。

## 4.理解題意後再列式及學習併式

教師應利用多步驟問題讓學生從理解題意後有次序的一一列式解題，待學生能熟練解決多步驟問題後再開始學習併式。併式教學時需同時呈現多步驟算式，再慢慢併式過渡到能一個算式記錄問題。

例如：「小明口袋有 1 個 10 元硬幣和 6 個 5 元硬幣，請問小明共有多少元？」學生理解題意後多步驟解題算式可能為： $6 \times 5 = 30$ ， $10 + 30 = 40$ ；引導學生併式為  $10 + 6 \times 5 = (\quad)$ ，再討論因為乘或除是連加或連減的簡化記錄形式，因此運算位階高於加或減，所以約定「先算乘或除，後算加或減」的算則。

## 5.理解及應用計算規律

除了四則運算教學外，還需將計算規律應用於簡化混合計算，計算規律練習包含以下：「連除兩數等於除以兩數之機」、「連除兩數的順序交換結果不變」、「乘法對加法和減法的分配律」。完整教學應包含三部分：(1) 計算規律為何正確的說明與應用：教室透過布題，讓學生在活動中自然察覺；(2) 純數字的規律練習：學習規律的方法之一是應用規律，但是規律是抽象的，涉及生活情境的應用問題，牽涉到情境的細節與合理性，反而會模糊學習焦點，因此應該提供學生單純數字的練習，但教學上必須小心布題，製造動機，讓學生有應用規律的動機，樂於運用規律；(3) 超越情境的應用：數學規律的抽象性超越特定的情境，一個數字算式可能可以應用到不同型態的情境。

### (四) 本題教學的加強重點

#### 理解逐次減項的每個步驟在問題情境中代表的意義

有三成五學生的答案為選項③，高分組有 17%，低分組更高達 44%，這些學生都誤以為「其中 5 袋給甲班」是「減法中的拿走型」題目，故列式為「 $60 \times 2 \div 15 - 5$ 」。因此教學中除了讓學生熟練整數四則混合計算的運算規則外，在逐次減項的運算過程中，應該讓學生養成檢視每一個數字在情境中代表的意義，以及是否合理。

以本題為例:若學生的列式為「 $60 \times 2 \div 15 - 5$ 」,第一個步驟「 $60 \times 2 = 120$ 」,老師提問「120 在題目中代表什麼?」,學生須回答「2 包共 120 顆糖果」;第二個步驟「 $120 \div 15 = 8$ 」,老師提問「8 在題目中代表什麼?」,學生須回答「每袋有 8 顆糖果」,第三個步驟「 $8 - 5 = 3$ 」,老師先提問「每袋有 8 顆糖果,5 袋給甲班,所以 5 袋只有 3 顆合理嗎?」再提問「若每袋有 8 顆糖果,5 袋有幾顆?算式應該如何記錄?」,從以上步驟讓學生檢視列式是否正確,並修正「 $8 - 5$ 」為「 $8 \times 5$ 」。

#### 四、命題建議

四則運算的性質是從生活中的數學應用情境發展而來,以下幾種命題形式側重目的不同,說明如下:

- (一) 計算題:檢核學生對算則是否熟練。
- (二) 選擇題:透過選項的編排,在算式的逐次減項過程中來檢核學生的錯誤出現在何處,側重對學生迷失思的檢核。
- (三) 非選擇題的形式,設計相關情境,藉以了解學生是否理解規約的意義及應用。

除了基本的四則混合計算外,也應將下列計算規律納入評量命題中:「連除兩數等於除以兩數積」、「連除兩數的順序交換結果不變」、「乘法對加法和減法的分配律」。

#### 五、歷屆檢測試題參考

##### (一) 104 學年度新北市五年級數學能力檢測第 2 題

求 $30 - 4 \times 5 + 3 \times 2 = ?$						
①	266					
②	136					
③	26					
④	16					
選 項	1	2	3	4	其他	答案: 4
選項率	0.03	0.04	0.06	0.86*	0.00	鑑別度: 0.31 難易度: 0.83
高分組	0.00	0.00	0.01	0.98	0.00	
低分組	0.08	0.10	0.14	0.67	0.00	

(二) 105 學年度新北市五年級數學能力檢測試題第 24 題

一個機器人模型賣 180 元，買 4 個機器人模型比買 6 輛汽車模型的價錢少了 30 元，一輛汽車模型賣多少元？

- ① 90 元
- ② 115 元
- ③ 125 元
- ④ 150 元

選 項	1	2	3	4	其他	答案：3
選項率	0.14	0.38	0.35*	0.12	0.00	鑑別度：0.33 難易度：0.39
高分組	0.05	0.37	0.55	0.03	0.00	
低分組	0.22	0.32	0.22	0.23	0.00	

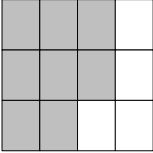
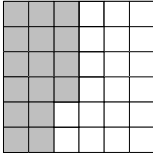
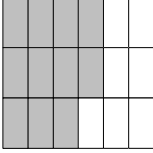
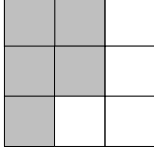
(三) 106 學年度新北市五年級數學能力檢測試題第 9 題

求  $49 - 42 \div 7 \times 3 + 4 = ?$

- ① 133
- ② 51
- ③ 35
- ④ 7

選 項	1	2	3	4	其他	答案：3
選項率	0.04	0.11	0.66*	0.19	0.00	鑑別度：0.62 難易度：0.62
高分組	0.01	0.04	0.93	0.02	0.00	
低分組	0.08	0.18	0.31	0.43	0.00	

第 18 題 5-n-07

知識向度	數與計算	認知向度	程序執行																														
對應分年細目	5-n-07 能用通分做簡單異分母分數的比較與加減。																																
題目	<p>有一個正方形，可以等分成A、B、C、D四種方式(如下圖)。哪個等分方式的灰色部分代表的分數最大？</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  <p>A</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>B</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>C</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>D</p> </div> </div> <p>① A ② B ③ C ④ D</p>																																
答題表現 選項分析	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th style="border: none;">選 項</th> <th style="border: none;">1</th> <th style="border: none;">2</th> <th style="border: none;">3</th> <th style="border: none;">4</th> <th style="border: none;">其他</th> <th style="border: none;">答案：1</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="border: none;">選項率</td> <td>0.58*</td> <td>0.11</td> <td>0.14</td> <td>0.16</td> <td>0.00</td> <td>鑑別度：0.63 難易度：0.55</td> </tr> <tr> <td style="border: none;">高分組</td> <td>0.86</td> <td>0.02</td> <td>0.08</td> <td>0.04</td> <td>0.00</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border: none;">低分組</td> <td>0.23</td> <td>0.29</td> <td>0.18</td> <td>0.30</td> <td>0.00</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>					選 項	1	2	3	4	其他	答案：1	選項率	0.58*	0.11	0.14	0.16	0.00	鑑別度：0.63 難易度：0.55	高分組	0.86	0.02	0.08	0.04	0.00		低分組	0.23	0.29	0.18	0.30	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：1																											
選項率	0.58*	0.11	0.14	0.16	0.00	鑑別度：0.63 難易度：0.55																											
高分組	0.86	0.02	0.08	0.04	0.00																												
低分組	0.23	0.29	0.18	0.30	0.00																												

一、試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.63，通過率為 0.58，難易度 0.55。

(二) 評量目標說明

本題旨在了解學生是否能找出圖片中所代表的分數數值，並能用通分做簡單異分母分數的比較。

(三) 選項表現說明

1. 有 58% 的學生選擇正確選項①，此一部分的學生能先找到圖片中所代表的分數數值，再將各選項圖片中所代表的分數數值進行通分後比較得知答案。
2. 有 16% 的學生選擇選項④，這些學生可能以直觀經驗認為 D 等分方式的單一個灰色圖形較其他等分方式的灰色圖形大，則所代表的分數最大。
3. 有 14% 的學生選擇選項③，這些學生可能進行通分時計算錯誤，所以選擇此選項。
4. 有 11% 的學生選擇正確選項②，這些學生可能直接點數正方形內灰色圖形數量，認為點數後數量多所代表的分數最大。

#### (四) 學生表現說明

- 1.在以約分、擴分的方式比較異分母分數時，大多僅會將重點放在數字的計算上，本題命題設計希望利用圖示的方式，來了解學生是否能在圖形中找出所代表的分數數值，再以約分、擴分的方式進行分數大小的比較。
- 2.本題通過率為 58%。有約五成八的學生能正確找出圖示所代表的分數數值，並以約分、擴分的方式進行分數大小的比較，但仍有近五成二的學生無法正確找出圖示所代表的分數數值並進行大小比較。從高分組與低分組學生的表現來看，86%的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生只有 23%回答正確，其中錯誤選項②、④的選答率皆有將近三成的學生選擇，顯示低分組學生中，過半數的學生對於圖示所代表的分數數值，以及利用約分、擴分的方式進行比較的概念並不熟悉，因而產生了錯誤的解題策略。

## 二、教材地位分析

### 97 課綱 (分年細目)

#### (一) 評量重點

5-n-07 能用通分做簡單異分母分數的比較與加減。

#### (二) 先備的知識

4-n-09 能認識等值分數，進行簡單異分母分數的比較，並用來做簡單分數與小數的互換。

5-n-06 能用約分、擴分處理等值分數的換算。

#### (三) 延伸的知識

5-n-08 能理解分數乘法的意義，並熟練其計算，解決生活中的問題。

5-n-09 能理解除數為整數的分數除法的意義，並解決生活中的問題。

### 十二年國教課綱 (學習內容)

#### (一) 評量重點

N-5-4 異分母分數：用約分、擴分處理等值分數並做比較。用通分做異分母分數的加減。養成利用約分化簡分數計算習慣。

#### (二) 先備的知識

N-4-6 等值分數：由操作活動中理解等值分數的意義。簡單異分母分數的比較、加、減的意義。簡單分數與小數的互換。

#### (三) 延伸的知識

N-5-5 分數的乘法：整數乘以分數、分數乘以分數的意義。知道用約分簡化乘法計算。處理乘積一定比被乘數大的錯誤類型。透過分數計算的公式，知道乘法交換律在分數也成立。

N-5-6 整數相除之分數表示：從分裝（測量）和平分的觀點，分別說明整數相除為分數之意義與合理性。

N-5-7 分數除以整數：分數除以整數的意義。最後將問題轉化為乘以單位分數。

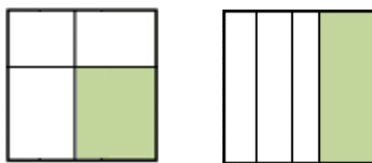
## 三、教學建議

#### (一) 評量核心概念

能用從圖示中找到所代表的分數，再進行通分做簡單異分母分數的比較與加減。

## (二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

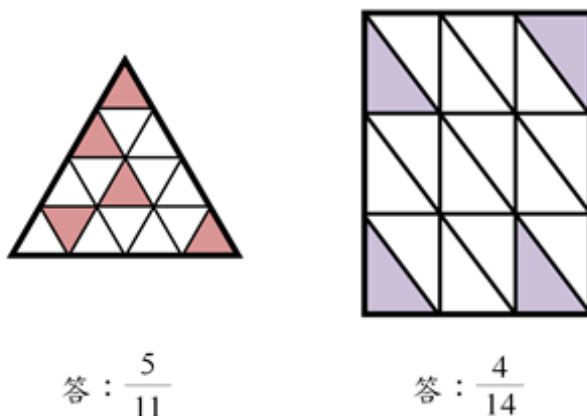
1. 等分的概念不足：學生可能知道一半就是分成兩部分，但沒有等分的概念。因此在處理部分/全體的問題時，會有錯誤的迷思。例如：將 $\frac{1}{4}$ 張色紙著色，很有可能因為沒有等分的概念，而犯了如【圖 18-1】的錯誤。



【圖 18-1】

2. 缺乏整體量的概念：整體量是指我們把什麼當作 1，學生要先學會確認什麼是整體「1」的單位，否則常會產生如以下舉例的迷思概念。從中我們能發現學生無法指認問題中的整體量，只考慮到問題中的分子（分割後的量）及分母（總分割份數），並且解題過程深受分子、分母的影響。

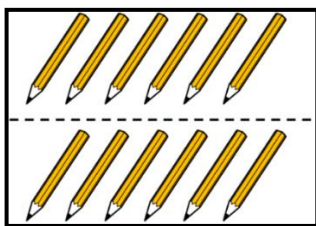
- (1) 1 個披薩平分成 8 片，取其中 2 片，學生誤以為取 $\frac{1}{2}$ 個披薩，可看出學生誤把部分量當成整體量，寫在分數的分母。學生要能掌握：1 個披薩 8 片是整體量，2 片是部分量。
- (2) 「如【圖 18-2】塗色部分佔圖形的幾分之幾？」



【圖 18-2】

學生無法將整個圖形當作整體量，而將圖形看成塗色部分和空白部分的比較結果。學生要能掌握：整個圖形是整體量，塗色部分的份數是部分量，未塗色部分的份數也是部分量。

- (3) 「一盒鉛筆有 12 枝，如【圖 18-3】，哥哥用掉全部的 $\frac{1}{2}$ 盒，問用掉幾枝鉛筆？」

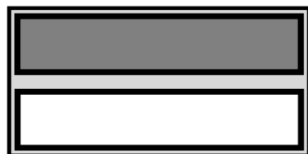


【圖 18-3】

學生可能會受到分數符號 $\frac{1}{2}$ 中的分子的影響回答 1 枝，也可能受到分母的影響回答

2 枝。學生要能掌握：「全部的 $\frac{1}{2}$ 」意指將整體量（12 枝）平分成 2 份，取其中 1 份（6 枝）的部分量與整體量的關係。

- (4) 「一盒巧克力有 2 條，小華吃掉 $\frac{1}{2}$ 盒，請用筆把小華吃掉的部份著顏色」，如【圖 18-4】的情形。學生要能掌握：整體量是 1 盒不是 1 條，以釐清全部內容物就是一個整體量。



【圖 18-4】

### 3. 異分母分數加法運算的常見錯誤

(1) 分子加分子，分母加分母： $\frac{2}{5} + \frac{3}{6} = \frac{2+3}{5+6} = \frac{5}{11}$ 。

(2) 分母相乘，分子直接相加： $\frac{2}{5} + \frac{3}{6} = \frac{2+3}{5 \times 6} = \frac{5}{30}$ 。

(3) 分母相乘，分子相乘： $\frac{3}{5} + \frac{2}{7} = \frac{3 \times 2}{5 \times 7} = \frac{6}{35}$ 。

### 4. 異分母分數減法運算的常見錯誤

(1) 整數減整數，分子減分子，分母減分母： $3\frac{4}{6} - 1\frac{3}{4} = 2\frac{1}{2}$ 。

(2) 分母通分後，分子卻用多的減少的：

$$\begin{aligned} 3\frac{4}{6} - 1\frac{3}{4} &= 3\frac{4 \times 2}{6 \times 2} - 1\frac{3 \times 3}{4 \times 3} \\ &= (3-1) + \left(\frac{8}{12} - \frac{9}{12}\right) \\ &= 2\frac{1}{12}。 \end{aligned}$$

(3) 分母相乘通分，分子卻沒有跟著擴分，直接用多的減少的：

$$3\frac{4}{6} - 1\frac{3}{4} = (3-1) + \left(\frac{4}{6 \times 4} - \frac{3}{4 \times 6}\right) = 2\frac{1}{24}。$$

## (三) 核心概念的教學重點

學生需掌握正確的分數概念，才能進行有意義的分數運算。以下將分數概念的教學到分數加減運算的教學，依序說明如下：

- 1. 認識整體量與部分量：**教師須釐清整體量 1 是什麼，把 1 分成 3 份，每份就是 $\frac{1}{3}$ （單位分數）。單位分數的意義是將整體量等分割成數份後所取出其中的一份，也就是說單位分數指的是分子是 1，分母是正整數的分數，例如： $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{4}$ 、……。它是學習分數加減乘除運算的先備基礎概念，因此，建立單位分數的概念非常重要。例如：一盒蛋糕有 8 塊，當學生知道 $\frac{3}{8}$ 盒是 3 個 $\frac{1}{8}$ 盒蛋糕所合起來的，那麼就能合理解釋「 $\frac{2}{8} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$ 」，而不會出現

$\frac{5}{16}$ 的迷思概念；延伸到學習「分數×整數」時，就能理解「 $\frac{2}{7} \times 3 = \frac{6}{7}$ 」，知道 $\frac{2}{7}$ 盒就是「2個 $\frac{1}{7}$ 盒」，「2個 $\frac{1}{7}$ 盒的3倍就是6個 $\frac{1}{7}$ 盒」，合起來就是 $\frac{6}{7}$ 盒，也就不會出現 $\frac{6}{21}$ 的迷思概念。所以，單位分數是建立分數起始的重要概念，明白單位分數才能在分數計算學習上做有意義的解釋。

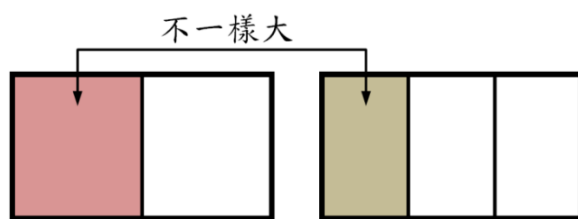
## 2. 認識通分的意義

- (1) **通分的定義**：通分是指把兩個異分母的分數，利用約分或擴分轉換成同分母分數的過程。
- (2) **通分的目的**：透過分數大小的比較活動，學生察覺當兩分數的分母相同（具有相同的單位分數）時，可以直接利用它們的分子決定大小；但是當兩分數的分母不同時（具有不同的單位分數），就無法直接透過分子決定大小，引發學生需要將異分母分數化為同分母分數的需求（計數的單位分數變成相同），此時才能依照分子決定大小。以此為先備經驗，進入異分母分數的加減計算，也會遇到相同的問題—不同的單位分數，表示不同大小的計數單位，也有化為同分母分數的需求。
- (3) **通分的方法**：可先求出各分母的最小公倍數，然後將各分數擴分或約分為分母為最小公倍數的等值分數。

## 3. 異分母分數的加減

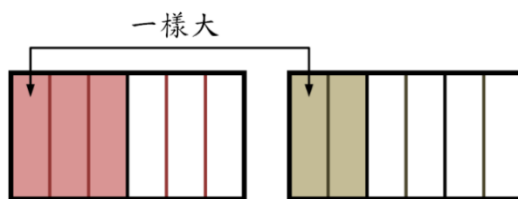
做一般異分母分數之比較與加減時，必須利用約分、擴分的方式，將兩異分母的分數通分為兩同分母之等值分數後，再做比較與加減。教師別太快進入公式算則，多一些概念性知識的教學，讓學生有充分的時間探索與思考而發現：因為兩個分數等份的份數不同，每一份單位分數不一樣大，所以不能直接將份數相加，因此要先通分，把它再等分成相同的份數，成為每小份等分的單位分數，才可以將份數相加。例如：有兩條相同的蛋糕，其中一條蛋糕哥哥吃了 $\frac{1}{2}$ 條，另一條蛋糕弟弟吃了 $\frac{1}{3}$ 條，他們共吃了幾條蛋糕？

教師可引導學生思考，如何將計數的單位分數變成一樣大小呢？可以在圖上做切割讓其計數的單位大小變成一樣大。首先，哥哥吃的蛋糕是平分成2大塊，弟弟是平分成3小塊，如【圖 18-5】：



【圖 18-5】

但是哥哥的1大塊蛋糕和弟弟的1小塊蛋糕不一樣大，所以接下來的目標是要將他們的分割後的蛋糕都要變成一樣大，所以要把哥哥的每1大塊蛋糕再平分成3份（變成6小份中的3小份），弟弟的每1小塊蛋糕平分成2份（變成6小份中的2小份），這時候哥哥和弟弟的蛋糕最後的切割份數都是6小份，如【圖 18-6】，且每小份都一樣大，因此就可以用同分母分數的概念進行加減計算。



【圖 18-6】

上圖的分數運算的過程：

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3} + \frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}。$$

先透過情境題去理解異分母分數加減的計算概念，讓學生形成異分母分數加減的計算規則，教師幫助學生熟練程序性知識，即是所謂的分母不同的分數相加（減）時，先通分化為同分母分數，再相加（減）。

**4. 培養分數數感：**透過觀察，可用約分或假、帶分數之間的換算以簡化計算。學生對於計算常會進入背公式的運算規則，而沒有做有意義的運算。例如題目  $\frac{9}{8} + \frac{7}{6}$ ，一般學生看到題目沒有思考更適當的策略就會直接採取算則，用通分的方法算出答案：

$$\frac{9}{8} + \frac{7}{6} = \frac{9 \times 6}{8 \times 6} + \frac{7 \times 8}{6 \times 8} = \frac{54}{48} + \frac{56}{48} = \frac{110}{48} = 2\frac{14}{48}。$$

若能先觀察題目中的分數，會發現假分數可以先轉換成帶分數，以簡化計算過程，如

$$\frac{9}{8} + \frac{7}{6} = 1\frac{1}{8} + 1\frac{1}{6} = 2 + \frac{1}{8} + \frac{1}{6} = 2\frac{14}{48}。$$

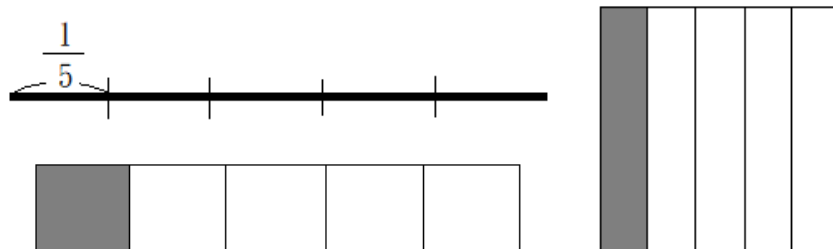
**5. 帶分數的加減法：**帶分數的加減法則較為繁複，因為它牽涉到整數的加減法則，亦牽涉到分數的加減法則，尤其在分數不夠減的情況之下，運算更為繁複，例如： $5\frac{2}{3} - 3\frac{6}{7}$ ，所以必須先將  $5\frac{2}{3}$  轉換成  $4\frac{5}{3}$ ，整數部分的計算為  $4 - 3$ ，分數部分的計算是  $\frac{5}{3} - \frac{6}{7}$ 。

#### （四）本題教學的加強重點

本題重點要先從圖片中找到所代表的分數數值，再進行通分做簡單異分母分數的比較。教師教學時，先協助學生釐清整體量是一個完整的正方形，灰色部分代表所佔有的部分量，所以要知道 A、B、C、D 四種等分方式的灰色部份所代表的分數數值是多少，必須先知道 A、B、C、D 四個等分方式的總分割數(分母)及灰色部分所佔的量(分子)。以本題為例，各圖片中灰色部份所代表的分數數值分別為：A 為  $\frac{8}{12}$ 、B 為  $\frac{16}{36}$ 、C 為  $\frac{11}{18}$ 、D 為  $\frac{5}{9}$ ，再透過約分、擴分的方式，將異分母的分數，變成同分母之等值分數後，做同分母分數間的比較。

#### 四、命題建議

（一）學習分數的圖形表徵時，建議不要只以圓形圖形來表徵，可以考量成長方形或長條等，因為圓形容易表徵二、四、八等分，不容易表徵成其他份數，以免導致學童在理解不是這些等份表徵方式時產生困難。如【圖 18-7】。



【圖 18-7】

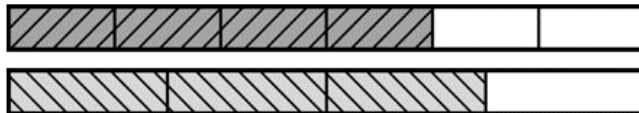
(二) 透過通分進行異分母分數的比較與加減計算時，為了避免計算過於複雜，可參考下列建議：

1. 分母不要剛好是倍數關係。
2. 避免只能相乘(兩分母互質)且數字又大的情況。
3. 乘以 2、3、4、5 就可以找到分母之公倍數(如 12 與 18)。

## 五、歷屆檢測試題參考

### (一) 104 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

姐姐將 2 條一樣長的紙帶，各自等分後塗上顏色（如下圖），兩條紙帶塗上顏色部分的長度相差多少？



- ①  $\frac{1}{2}$  條
- ②  $\frac{1}{4}$  條
- ③  $\frac{1}{8}$  條
- ④  $\frac{1}{12}$  條

選 項	1	2	3	4	其他	答 案：4
選項率	0.20	0.12	0.07	0.60*	0.00	鑑別度：0.69
						難易度：0.57
高分組	0.04	0.02	0.02	0.92	0.00	
低分組	0.38	0.26	0.12	0.23	0.01	

(二) 105 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

下列哪一個分數小於 $\frac{4}{8}$ ？

①  $\frac{2}{3}$   
②  $\frac{5}{7}$   
③  $\frac{3}{9}$   
④  $\frac{16}{32}$

---

選 項	1	2	3	4	其他	答案：3
選項率	0.13	0.08	0.68*	0.11	0.00	鑑別度：0.58 難易度：0.66
高分組	0.01	0.02	0.95	0.02	0.00	
低分組	0.28	0.15	0.37	0.20	0.00	

(三) 106 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

一個竹簍重 $3\frac{2}{3}$ 公斤，裝入一些柚子後，連竹簍共重 $11\frac{4}{7}$ 公斤，裝入的柚子是多少公斤？

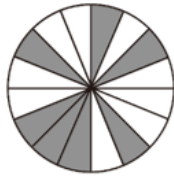
①  $15\frac{5}{21}$ 公斤  
②  $8\frac{2}{4}$ 公斤  
③  $8\frac{2}{21}$ 公斤  
④  $7\frac{19}{21}$ 公斤

---

選 項	1	2	3	4	其他	答案：4
選項率	0.07	0.12	0.18	0.61*	0.00	鑑別度：0.64 難易度：0.57
高分組	0.02	0.01	0.07	0.90	0.00	
低分組	0.17	0.30	0.28	0.25	0.00	

(四) 107 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

有甲、乙兩個相同的圓，甲被平分成 16 等分，乙被平分成 8 等分(如下圖)。甲、乙兩圓的灰色部分相差多少個圓？



(甲圓)



(乙圓)

- ①  $\frac{2}{16}$  個圓    ②  $\frac{3}{16}$  個圓    ③  $\frac{2}{8}$  個圓    ④  $\frac{6}{16}$  個圓

選 項	1	2	3	4	其他	答 案：2
選項率	0.11	0.67*	0.13	0.09	0.00	鑑別度：0.6 難易度：0.63
高分組	0.03	0.93	0.03	0.01	0.00	
低分組	0.23	0.33	0.26	0.18	0.00	

第 19 題 5-n-01

知識向度	數與計算	認知向度	程序執行				
對應分年細目	5-n-01 能熟練整數乘、除的直式計算。						
題目	對於「 $1003 \times 102$ 」的計算結果，下列敘述哪個正確？ ① 答案中的 1 代表 1 個十萬      ② 答案為七位數 ③ 答案中的百位數為 0            ④ 答案會出現三個 0						
答題表現 選項分析	選 項	1	2	3	4	其他	答案：1
	選項率	0.69*	0.09	0.12	0.10	0.00	鑑別度：0.57 難易度：0.64
	高分組	0.93	0.02	0.03	0.02	0.00	
	低分組	0.36	0.21	0.23	0.20	0.00	

一、試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.57，通過率為 0.69，難易度 0.64。

(二) 評量目標說明

本題旨在了解學生是否能利用直式計算解決四位數乘以三位數的乘法問題。

(三) 選項表現說明

1. 有 69% 的學生選擇正確選項①，顯示這些學生能正確完成計算，且能清楚了解乘積中每個數字所代表的位值。
2. 有 12% 的學生選擇選項③，這些學生在計算時，因乘數的十位數數字是 0，代表 0 個 10 乘以 1003，所得到的數為 0 個十，須在直式算式中的十位數記 0，但因未記錄，而直接將 1 個百乘以 1003 所得到的 1003 個百記錄成 1003 個十。
3. 有 10% 的學生選擇選項④，因為橫式中被乘數有兩個 0，乘數有一個 0，所以這些學生直接將兩者 0 的個數相加，故認為乘積有三個數字為 0。
4. 有 9% 的學生選擇選項②，因為被乘數為四位數，乘數是三位數，所以學生直接將兩者的位數相加，而認為乘積為七位數。

(四) 學生表現說明

1. 本題的命題為四位數乘以三位數(乘數中間有 0)的乘法問題的直式計算問題，主要在檢視學生能否在直式記錄中，第二層的十位數先記 0，再在百位數記錄 3。
2. 本題難易度為 0.64。本題通過率為 69%。有約七成的學生已能熟練四位數乘以三位數(乘數中間有 0)的直式計算，但仍有近三成的學生，對於多位數乘法概念並不清楚。從高分組與低分組學生的表現，92% 的高分組學生能正確回答問題，低分組學生只有 36% 回答正確，顯示低分組學生在處理多位數乘法的直式運算仍有待加強。

## 二、教材地位分析

### 97 課綱 (分年細目)

#### (一) 評量重點

5-n-01 能熟練整數乘、除的直式計算。

#### (二) 先備的知識

4-n-03 能熟練較大位數的乘除直式計算。

#### (三) 延伸的知識

6-n-07 能在具體情境中，對整數極小數在指定位數取概數（含四捨五入法），並作加、減、乘、除之估算。

### 十二年國教課綱 (學習內容)

#### (一) 評量重點

**N-5-1 十進位的位值系統：**「兆位」至「千分位」。整合整數與校數。理解基於位值系統可延伸表示更大的數和更小的數。熟練十進位系統「乘以十」、「除以十」所延伸的計劃如「 $300 \times 1200$ 」與「 $600000 \div 4000$ 」之處理。

#### (二) 先備的知識

**N-4-2 較大位數之乘除計算：**處理乘數與除數為多位數之乘除直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。

#### (三) 延伸的知識

**N-5-9 整數、小數除以整數 (商為小數)：**整數除以整數 (商為小數)、小數除以整數的意義。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。能用概數協助處理除不盡的情況。熟悉分母為 2、4、5、8 之真分數所對應的小數。

**N-6-5 解題：整數、分數、小數的四則應用問題：**二到三步驟的應用解題。含使用概數協助解題。

## 三、教學建議

#### (一) 評量核心概念

能解決四位數乘以三位數，且乘數的十位數數字為 0 的乘法問題。

#### (二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

##### ◎乘法問題：

1. **直式記錄錯誤：**僅留意「 $425000 \times 1600$ 」末尾的 0 有幾個，而忽略了前面的「 $425 \times 16$ 」答案中的 0 也要算進去。

2. **乘法計算判斷錯誤：**判斷「 $425 \times 16$ 」中的  $5 \times 6$ ，末尾多一個 0，而忽略了 425 中可以用質因數分解成  $17 \times 5 \times 5$ ，16 可以用質因數分解成  $2 \times 2 \times 2 \times 2$ 。其中將二數相乘的積要產生 0，需要一個 2 和 5 相乘來組成；因此  $425 \times 16$  可以組成 2 組的  $2 \times 5$ ，亦即會再產生 2 個 0。

##### ◎除法問題：

1. **無法估商：**或對於估商不夠熟悉：例如，在算式  $1281 \div 320$  的算式中，被除數為四位數 (1281)，除數為三位數 (320)，對於許多學生而言，以三位數進行估商實屬不易，因此容易出現錯誤。

2.對於商、被除數、餘數的位值未能充分掌握：續以  $1281 \div 320$  為例，經正確計算後，可以知道商為 4，餘數為 1；學生在進行計算時，可能對於以直式紀錄進行除法運算不熟悉，造成位值的記錄出現錯誤。

3.基本運算錯誤：進位之加法、退位之減法、被乘數的某數倍出現錯誤。例如  $6005 \div 137$  的算式中，學生進行第一次估商後，結果如下：

$$\begin{array}{r} 4 \\ 137 \overline{) 6005} \\ \underline{548} \\ 52 \end{array}$$

其中：除數乘以商得到 548，涉及乘法運算及進位問題；而  $600 - 548$  得到 52，則涉及了減法運算中的退位問題，如果學生對於基本的加、減、乘運算不熟悉或不熟練時，很容易出現運算錯誤。

### (三) 核心概念的教學重點

#### ◎乘法問題：

- 1.了解乘積有 0 的條件：積的末尾中有 0 出現代表積至少為 10 的倍數。而積要出現 10，除了直接為 0 外，就必須在被乘數或乘數中有 2 和 5 的因數。如  $10=2 \times 5$ ； $100=4 \times 25$ ； $1000=8 \times 125 \dots$ 。
- 2.判斷積是否有 0：可判斷被乘數和乘數有 2 和 5 的因數即可；判斷積是否有 2 個 0，可判斷被乘數和乘數有 4 和 25 的因數即可。將被乘數與乘數分別做質因數分解來找出  $2 \times 5$  有幾組，便知道二數的乘積有幾個 0。
- 3.多位數乘法教學(末尾有 0)：可以先將非 0 的部分先乘，然後再加上被乘數與乘數原本有 0 的個數即可。如  $24000 \times 1200$ 。

$$\begin{array}{r} 24\ 000 \\ \times 12\ 00 \\ \hline 48 \\ 12 \\ \hline 288\ 0000 \end{array}$$

把被乘數與乘數後面有 0 的部分放在最右邊

被乘數的 3 個 0 和乘數的 2 個 0 共 5 個 0

先算  $24 \times 12$

直式計算先把非 0 的數先對齊，左邊依照原來乘法：再把右邊的 0 加入即可

#### ◎除法問題：

- 1.了解數值的意義：在除法的計算過程中，學生無法辨別被除數、除數、商及餘數的關係，例如以算式「 $129 \div 15 = 8 \dots 9$ 」為例，「129」為被除數，「15」為除數，「8」為商，「9」為餘數。
- 2.了解除法直式計算的紀錄位置：同樣以算式「 $129 \div 15 = 8 \dots 9$ 」為例，各個數值在除法直式紀錄中的對應位置如下：

$$\begin{array}{r} 8 \longrightarrow \text{商} \\ \text{除數} \longleftarrow 15 \overline{) 129} \longrightarrow \text{被除數} \\ \underline{120} \\ 9 \longrightarrow \text{餘數} \end{array}$$

### 3.估商的策略

- (1) **累乘**：將除數乘以某數，直到逼近被除數。以算式「 $129 \div 15$ 」為例，以除數「15」進行估商，第一次估商取被除數的前二位，發現「 $12 < 15$ 」，因此後推一位，取「129」來以15進行第二次估商。學生得以累進加1的方式尋找某個數，用15乘以「某數」得到一個小於被除數且最接近被除數的積，例如： $15 \times 6 = 90$ ， $15 \times 7 = 105$ ， $15 \times 8 = 120$ （最接近被除數129）。
- (2) **取概數**：先將除數想成幾十，再估商。以算式「 $129 \div 15$ 」為例，學生可以四捨五入法將除數「15」取概數變成「20」，同時將被除數「129」取概數變成「130」，以「13個十是2個十的6倍至7倍之間」進行估商，並以實際的除數「15」 $\times 6 = 90$ ，來進行檢視，發現太少（餘數大於除數15），再以「15」 $\times 7 = 105$ ，來進行檢視，發現仍然太少（餘數仍大於除數15）；再以「15」 $\times 8 = 120$ ，來進行檢視，發現餘數小於除數15，則據此判斷8為最合適的商。

#### (四) 本題教學的加強重點

本題教學內涵說明如下：

##### 1.答案位數合理性的討論：

教師可讓學生討論當「四位數乘以三位數時，積可能為幾位數？」以四位數最小為1000，三位數最小為100，積為100000，為六位數；四位數最大為9999，三位數最大為999，積為9989001，為七位數。故「四位數乘以三位數時，積可能為六位數或七位數。」學生具有估算能力後，則可將本題「 $1003 \times 102$ 」估算成「 $1000 \times 100$ 」，積約等於100000，為六位數。

##### 2.乘數中間位數數字有0的教學：

在直式算式上方加入位值表，並讀成「2個1的3倍，有6個1，在個位記6……」「0個10的3倍，有0個10，在十位記0……」「1個百的3倍，有3個百，在百位記3……」。讓學生將數字結合位值概念，而非僅做九九乘法的背誦。

### 四、命題建議

本分年細目的基本學習表現如下：

5-ncp-01-1 能熟練四位數乘以三位數以內的乘法直式計算。

5-ncp-01-2 能熟練四位數除以三位數以內的除法直式計算。

5-ncp-01-3 能理解被乘數及乘數後面有多個0的計算問題。

5-ncp-01-4 能理解被除數及除數後面有多個0的計算問題。

- (一) 若評量內涵為5-ncp-01-1時，可設計「四位數乘以三位數，且乘數的十位數數字為0的乘法問題」，以檢核學生的位值概念，若以選擇題形式命題，則選項應以四個不同的直式記錄呈現，藉以清楚評量出學生是否能將數字記錄在正確的位置。
- (二) 若評量內涵為5-ncp-01-2時，可設計「四位數除以二位數，商為三位數且十位數數字為0的除法問題」，以檢核學生的位值概念，若以選擇題形式命題，則選項應以四個不同的直式記錄呈現，藉以清楚評量出學生是否能將數字記錄在正確的位置。

## 五、歷屆檢測試題參考

### (一) 104 學年度數學能力檢測第 7 題

關於這個直式計算，下面哪一個選項是對的？

$$\begin{array}{r}
 2\star \\
 19\square \overline{)453\diamond} \\
 \underline{388} \\
 65\diamond \\
 \underline{582} \\
 \triangle 9
 \end{array}$$

- ①  $\diamond=0$   
 ②  $\star=3$   
 ③  $\triangle=7$   
 ④  $\square=9$

選 項	1	2	3	4	其他	答案：2
選項率	0.10	0.48*	0.29	0.13	0.01	鑑別度：0.52 難易度：0.51
高分組	0.03	0.77	0.14	0.06	0.00	
低分組	0.16	0.25	0.39	0.19	0.01	

### (二) 106 學年度數學能力檢測第 25 題

小傑計算四位數除以三位數「 $5605 \div \square 65$ 」，得到商為「二位數」，除數可能是下列哪一個數？

- ① 865  
 ② 665  
 ③ 565  
 ④ 465

選 項	1	2	3	4	其他	答案：4
選項率	0.13	0.11	0.15	0.58*	0.00	鑑別度：0.62 難易度：0.58
高分組	0.04	0.03	0.04	0.89	0.00	
低分組	0.23	0.22	0.28	0.27	0.00	

(三) 107 學年度數學能力檢測第 19 題

算式「 $425000 \times 1600$ 」的積有幾個 0？						
① 2 個      ② 5 個      ③ 6 個      ④ 7 個						
選 項	1	2	3	4	其他	答案：4
選項率	0.02	0.22	0.32	0.44*	0.00	鑑別度：0.49 難易度：0.46
高分組	0.00	0.07	0.23	0.70	0.00	
低分組	0.05	0.40	0.34	0.21	0.00	

(四) 107 學年度數學能力檢測第 21 題

「甲地每公頃稻米產量為 4901 公斤，以每 12 公斤裝成一袋販售。」						
下列敘述哪個正確？						
① 最多可裝滿 48 袋稻米						
② 分裝完後會剩下 5 袋稻米						
③ 已經裝袋可供販售的稻米有 4896 公斤						
④ 若再多 5 公斤的稻米就可再裝滿一袋						
選 項	1	2	3	4	其他	答案：3
選項率	0.15	0.24	0.39*	0.22	0.00	鑑別度：0.49 難易度：0.43
高分組	0.05	0.13	0.68	0.14	0.00	
低分組	0.27	0.30	0.19	0.24	0.00	

第 20 題 5-n-21

知識向度	量與實測	認知向度	概念理解				
對應	5-n-21 能理解容量、容積和體積間的關係。						
題目	<p>「有一個魚缸，內部長、寬、高分別為40公分、30公分、28公分，原有水深24公分，放進一塊完全沉入水裡的水晶，水深變為26公分，水晶的體積是多少？」下列算式哪個正確？</p> <p>① <math>40 \times 30 \times (26 - 24)</math>            ② <math>40 \times 30 \times (28 - 26)</math>            ③ <math>40 \times 30 \times 24</math>            ④ <math>40 \times 30 \times 26</math></p>						
答題表現 選項分析	選 項	1	2	3	4	其他	答案：1
	選項率	0.76*	0.14	0.05	0.05	0.00	鑑別度：0.51 難易度：0.7
	高分組	0.95	0.05 <sup>-</sup>	0.00 <sup>+</sup>	0.00 <sup>+</sup>	0.00	
	低分組	0.44	0.27	0.14	0.14	0.00	
							<sup>+</sup> 代表數值不等於 0

一、試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.51、通過率為 0.76、難易度 0.7。

(二) 評量目標說明

本題旨在評量學生是否能瞭解沉入水中物體的體積，等於此物體所排開的水量。

(三) 選項表現說明

- 有 76% 的學生選擇正確選項①，顯示有近八成的學生能理解沉入水中物體的體積，等於此物體所排開的水量，並知道排開水量需要利用水位差來計算。
- 有 14% 的學生選擇選項②，這些學生可能知道沉入水中物體的體積，等於此物體所排開的水量，但誤以為水位差是長方體容器的高和原本水位高度相減而得。
- 有 5% 的學生選擇選項③，這些學生可能不清楚將物體沉入水中後，水位的變化與物體體積的關係，而誤以為原先的水量就等於沉入水中物體的體積。
- 有 5% 的學生選擇選項④，這些學生可能知道物體的體積與沉入水中後水位的變化有關，但卻未完全理解，誤以為升高後的水量就等於沉入水中物體的體積。

(四) 學生表現說明

- 本題的通過率為 0.76，顯示有近八成的學生能充分理解瞭解沉入水中物體的體積，等於此物體所排開的水量，並須利用水位差進行計算。因此需要利用上升水位與原先水位差計算投入物品後上升水的體積。根據學生作答情形，只有二成多的學生使用錯誤的數字計算水位差，或不清楚水位差與沉入水中物體體積的關係。
- 以組別來看，低分組有 24% 及高分組有 5% 的學生選擇錯誤選項②，這些學生雖然清楚沉入水中物體的體積，等於此物體所排開的水量，但對於水位差仍未充分理解。低分組有 14% 及

高分組有不到 1% 的學生選擇錯誤選項③，這些學生不清楚將物體放入水中後，水位的變化與物品體積的關係，誤以為魚缸內水的體積就等於放入水晶的體積。低分組有 14% 及高分組有不到 1% 的學生選擇錯誤選項④，這些學生雖然知道物體體積與水位上升有關，卻誤以為升高後的水量等於物體體積。

## 二、教材地位分析

### 97 課綱（分年細目）

#### （一）評量重點

5-n-21 能理解容量、容積和體積間的關係。

#### （二）先備的知識

3-n-15 能認識容量單位「公升」、「毫公升」（簡稱「毫升」）及其關係，並做相關的實測、估測與計算。

4-n-14 能以複名數解決量(長度、容量、重量)的計算問題。

4-n-19 能認識體積及體積單位「立方公分」。

5-n-20 能理解長方體和正方體體積的計算公式，並能求出長方體和正方體的表面積。(同 5-s-07)。

#### （三）延伸的知識

6-n-15 能理解簡單直柱體的體積為底面積與高的乘積。

### 十二年國教課綱（學習內容）

#### （一）評量重點

N-5-15 解題：容積。容量、容積和體積間的關係。知道液體體積的意義。

#### （二）先備的知識

N-3-15 容量：「公升」、「毫升」。實測、量感、估測與計算。單位換算。

N-4-12 體積與「立方公分」：以具體操作為主。體積認識基於 1 立方公分之正方體。

S-4-4 體積：以具體操作為主。在活動中認識體積的意義與比較。認識 1 立方公分之正方體，能理解並計數正方體堆疊的體積。

S-5-5 正方體和長方體：計算正方體和長方體的體積與表面積。正方體與長方體的體積公式。

#### （三）延伸的知識

S-6-4 柱體體積與表面積：含角柱和圓柱。利用簡單柱體，理解「柱體體積＝底面積×高」的公式。簡單複合形體體積。

## 三、教學建議

#### （一）評量核心概念

了解容量與體積的關係，並知道沉入水中物體的體積等於物體所排開的水量。

#### （二）學生常見的錯誤類型／迷思概念

##### 1. 混淆容積、容量、液量與體積概念：

(1) 學生誤以為容器的容積就是放入容器中物體的體積。

(2) 學生誤以為容器的容積是容器的原有容量與放入容器中物體的體積總合。

(3) 學生誤以為容器內的液量就是容量。

## 2.混淆沉入水中物體的體積與上升水位之間的關係：

(1) 學生誤以為上升後的水位高度之水量即為沉入水中物體的體積。

(2) 學生誤以為上升水位是指容器高度與水位高度之差。

## (三) 核心概念的教學重點




### 1.體積、容積、液量與容量之概念區辨

(1) **體積**：物體所佔空間的大小。

**容積**：某一具有確定三度空間的周界內的空間大小，通常此空間有容納物質可以隨時存取的功能。

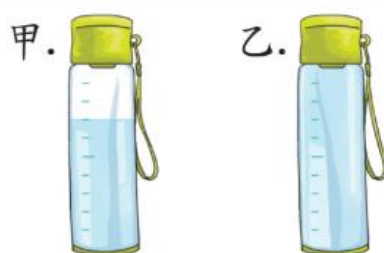
**液量**：指容器內液體的量。

**容量**：指容器可裝載的最大

類別	體積	容積	液量	容量
範例	紙箱的大小 20×30×50 (公分)。 	水壺可以用來裝多少的水。 	浴缸裡的水有多少。 	杯子裡面最多可裝125 ml的水。 

(2) 提供認知衝突情境引導學生思考上述各項概念間的關係：

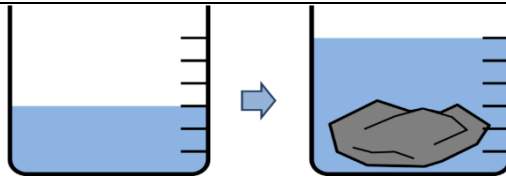
例如下圖兩個水壺的容量哪一個比較多？許多學生會認為水壺裡面裝水較多者容量較多，混淆了液量與容量的概念。



### 2.不規則物體的體積測量與計算

(1) 觀察物體投入量杯的刻度變化進行計算：

首先建立學生「一公升的水是 1000 立方公分」，也就是說「一毫升的水的體積等於一立方公分」的基本概念，接著透過排容原理，讓學生了解將一個立體物品放入量杯時，水上升的毫升數會和立體物品體積的立方公分數一樣。接著可以提供量杯及簡易小物品(如小石頭)讓學生觀察水位的變化，並計算出體積，例如水位原本在 300 毫升，投入小石頭後上升到 600 毫升，表示小石頭的體積是 300 立方公分如下圖。



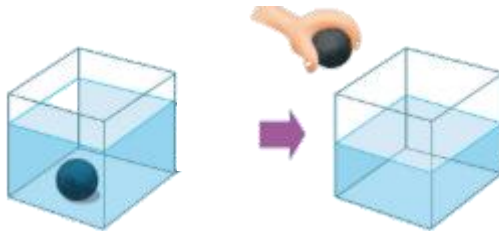
(2) 觀察物體投入無刻度透明容器的水位變化進行計算：

教師可準備一透明長方體容器，裝水後請學生計算原本的水量，投入物品後計算水位上升後的水量，接著求出水量差額即為物品體積，讓學生發現計算水量時需要知道的資訊是長方體容器的長、寬，以及水的高度，容器的高和水量無關，再引導學生發現簡便的算法是用長 $\times$ 寬 $\times$ 水量差，即可計算出物品體積。

#### (四) 本題教學的加強重點

##### 1. 透過圖示討論解題之必要資訊：

教師提供圖示如下，與學生討論若要知道沉入水中物體的體積，需要知道哪些資訊，引導學生思考只需要知道容器的長、寬，以及水面上升前及上升後的高度即可，讓學生發現容器的高在計算時不需要使用。



##### 2. 澄清如何找出水位差：

教師可以提供圖示，標註容器高度、水面上升前及上升後的高度，詢問學生若將容器高度減掉水面上升前(或上升後)的高度，則計算出來的是什麼的長度，藉以再次澄清水位差與容器高度無關，計算時不需要使用。

#### 四、命題建議：

本條目在這五年的命題類型，包含容器底面積與水面上升高度的關係、透過水位變化求體積、容積相減等三種類型，其中透過水位變化求體積的通過率為最高，達到七成多，表示學生對於直接求不規則物品的體積較為精熟。而其他兩種類型的通過率皆都只有五成多，學生對於相關概念的應用問題表現不佳，可以增加此類型的命題。下面給予兩個命題參考範例：

- 爸爸買了一個長方體魚缸，內部的長是 20 公分、寬是 15 公分、高是 16 公分。將 1500 毫升的水倒入塑膠盒中，接著放入一座假山後，水深是 7 公分。這座假山的體積是多少立方公分？  
 ①4800 立方公分    ②2700 立方公分    ③2100 立方公分    ④600 立方公分
- 安安為了省水在馬桶水箱內部放磚塊，馬桶水箱內部的長 45 公分、寬 30 公分、高 40 公分，放入一塊長 20 公分、寬 12 公分、高 7 公分的磚塊後，水箱內部的容積是多少立方公分？  
 ①55680 立方公分    ②54000 立方公分    ③52320 立方公分    ④1680 立方公分

## 五、歷屆檢測試題參考：

### (一) 104 學年度第 23 題

有一個正方體水槽，內部每邊長為 40 公分，放入一個長 15 公分、寬 40 公分、高 15 公分的長方體後，水槽內部剩下的容積是多少立方公分？

- ① 600 立方公分
- ② 9000 立方公分
- ③ 55000 立方公分
- ④ 64000 立方公分

選 項	1	2	3	4	其他	答案：3
選項率	0.11	0.20	0.59*	0.09	0.01	鑑別度：0.68 難易度：0.58
高分組	0.01	0.05	0.92	0.02	0.00	
低分組	0.22	0.36	0.24	0.17	0.02	

### (二) 105 學年度第 14 題

在一個寬為 50 公分、長為 100 公分的長方體水族箱中，將一個完全沉入水中的造景假山取出後，水族箱水位高度從 40 公分變成 38 公分，這座造景假山的體積是多少立方公分？

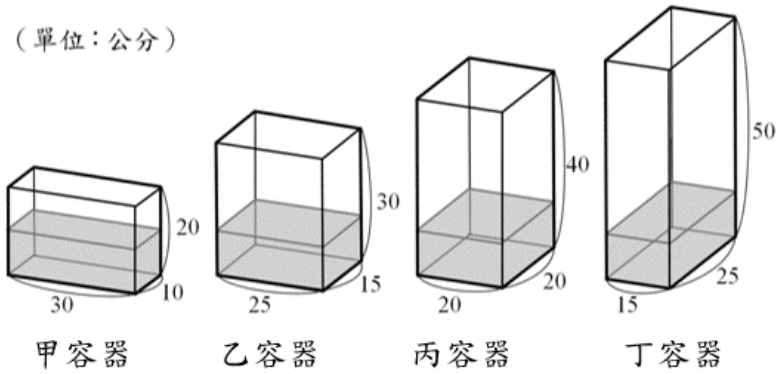
- ① 10000 立方公分
- ② 190000 立方公分
- ③ 199962 立方公分
- ④ 200000 立方公分

選 項	1	2	3	4	其他	答案：1
選項率	0.74*	0.11	0.06	0.09	0.00	鑑別度：0.5 難易度：0.72
高分組	0.97	0.02	0.00	0.01	0.00	
低分組	0.47	0.22	0.14	0.17	0.00	

(三) 106 學年度第 26 題

下面有甲、乙、丙、丁四個裝水的透明長方體容器，水深皆是 10 公分。分別丟入體積都是 50 立方公分的石頭，而且都完全沉入水中，哪一個容器的水位上升最多？

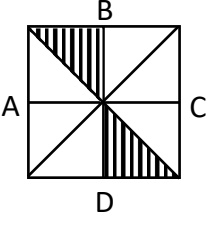
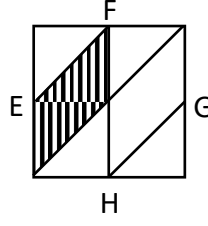
(單位：公分)



- ① 甲容器
- ② 乙容器
- ③ 丙容器
- ④ 丁容器

選 項	1	2	3	4	其他	答案：1
選項率	0.53*	0.10	0.20	0.15	0.02	鑑別度：0.34 難易度：0.54
高分組	0.71	0.03	0.18	0.08	0.00	
低分組	0.37	0.18	0.22	0.23	0.00	

第 21 題 5-s-05

知識向度	幾何	認知向度	概念理解				
對應分年細目	5-s-05 能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。						
題目	<p>有甲、乙兩個大小一樣的正方形(如下圖)，甲正方形各邊中間的點是 A、B、C、D，乙正方形各邊中間的點是 E、F、G、H。哪個斜線部分的面積比較大？</p> <p>① 甲的斜線面積比較大                      ② 乙的斜線面積比較大                      ③ 甲、乙的斜線面積一樣大                      ④ 甲、乙的斜線面積無法比較</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  <p>(甲)</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>(乙)</p> </div> </div>						
答題表現 選項分析	選 項	1	2	3	4	其他	答案：3
	選項率	0.11	0.19	0.61*	0.09	0.00	鑑別度：0.53 難易度：0.6
	高分組	0.04	0.06	0.86	0.04	0.00	
	低分組	0.20	0.35	0.33	0.12	0.00	

一、試題分析

(一) 數據解析：

本題鑑別度為 0.53，通過率為 0.61，難易度 0.6。

(二) 評量目標說明：

本題評量學生是否理解平行四邊形、三角形面積的求法以及彼此間的關係。

(三) 選項表現說明：

1. 本題正確答案為選項③，通過率為 0.61，顯示 6 成以上的學生已經掌握三角形及平行四邊形面積的求法，在沒有給予邊長及高的情況下，能運用切割重組的方法比較三角形及平行四邊形面積的大小。
2. 有 19.38% 的學生選擇選項②，學生認為平行四邊形斜線面積看起來比較大，所以乙的斜線面積比較大，因此選擇選項②。
3. 有 11.29% 的學生選擇選項①，學生認為 2 個三角形的面積比 1 個平行四邊形面積大，所以甲的斜線面積比較大，因此選擇選項①。
4. 有 8.3% 的學生選擇選項④，學生認為沒有給予邊長或高因此無法計算出三角形及平行四邊形的面積，所以無法比較，因此選擇選項④。

(四) 學生表現說明：

1. 本題的命題設計主要希望了解學生，對於三角形面積公式和平行四邊形面積之間的關係是否完全理解。因此，在題目中並沒有給予任何邊長的數據，藉以瞭解學生是否能在沒有任何邊

長數據的情形下，藉由三角形面積公式的和平行四邊形面積之間的關係，判別甲、乙兩圖斜線部分面積的大小。

- 2.本題的通過率為 60.63%，整體來說尚未達到精熟程度。但高分組答對率為 85.86%，低分組的答對率為 33.23%。顯示高分組的學生對於「三角形面積公式和平行四邊形面積之間的關係」已能充分掌握住。不過低分組的學生，答對率偏低，顯示出有不少學生，除了對「三角形面積公式和平行四邊形面積之間的關係」此一概念尚未充分掌握之外，也可能因為習慣於在給定邊長數據的情形下計算面積，因此當題目沒有給予任何數據時便認定無法計算比較。

## 二、教材地位分析

### 97 課綱（分年細目）：

#### （一）評量重點：

5-s-05 能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。（同 5-n-18）

#### （二）先備的知識：

4-n-18 能理解長方形和正方形的面積公式與周長公式。（同 4-s-09）

4-s-07 能認識平行四邊形和梯形。

#### （三）延伸的知識：

6-s-05 能理解簡單直柱體的體積為底面積與高的乘積。

### 十二年國教課綱（學習內容）：

#### （一）評量重點：

S-5-2 三角形與四邊形的面積：操作活動與推理。利用切割重組，建立面積公式，並能應用。

#### （二）先備的知識：

N-3-14 面積：「平方公分」。實測、量感、估測與計算。

S-4-3 正方形與長方形的面積與周長：理解邊長與周長或面積的關係，並能理解其公式與應用。簡單複合圖形。

S-4-7 三角形：以邊與角的特徵認識特殊三角形並能作圖。如正三角形、等腰三角形、直角三角形、銳角三角形、鈍角三角形。

S-4-8 四邊形：以邊與角的特徵（含平行）認識特殊四邊形並能作圖。如正方形、長方形、平行四邊形、菱形、梯形。

#### （三）延伸的知識：

S-6-4 柱體體積與表面積：含角柱和圓柱。利用簡單柱體，理解「柱體體積＝底面積×高」的公式。簡單複合形體體積。

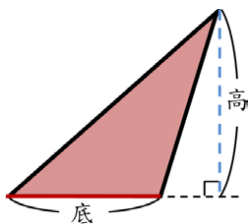
## 三、教學建議

#### （一）評量核心概念：

能運用切割重組的方式比較平行四邊形、三角形面積的大小。

#### （二）學生常見的錯誤類型／迷思概念：

- 1.無法找出在三角形外的高：學生遇到求三角形面積時，對於如何畫出三角形的高不是非常清楚。如果可以從頂點順利做垂直線段到底邊，便能找出三角形的高。但如果是如【圖 21-1】的三角形，便無法找出三角形的高，因此也無法順利求出三角形的面積。

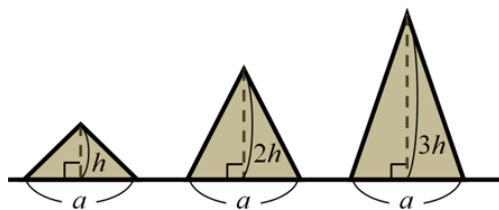


【圖 21-1】

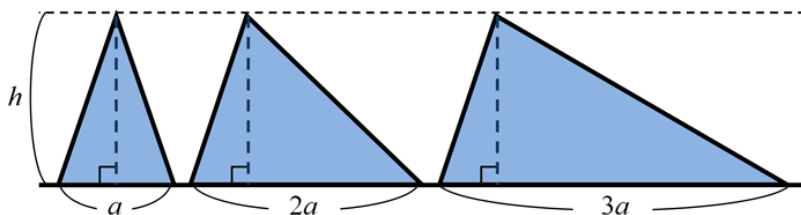
- 2.不清楚三角形面積公式的由來：三角形面積公式為底 $\times$ 高 $\div 2$ ，學生列式時因為不知道三角形面積公式的由來，常常在計算「底 $\times$ 高」之後會忘記「 $\div 2$ 」。計算時導致無法正確算出三角形的面積。

**(三) 核心概念的教學重點：**

- 1.國小五年級的學生，對於平行四邊形面積公式的由來及意義應該較易熟悉。一般來說，可以利用切割及拼湊的方式將三角形，變形成平行四邊形後導出三角形面積公式，並探討三角形的高及底，改變後面積會如何改變及其之間的關係。
- 2.學生知道三角形的面積公式為「底 $\times$ 高 $\div 2$ 」之後，再和學生探討當三角形的底不變，高增加幾倍，三角形的面積就會變為原來面積的幾倍，如【圖 21-2】；三角形的高不變，底增加幾倍，三角形的面積就會變為原來面積的幾倍如【圖 21-3】。



【圖 21-2】



【圖 21-3】

**(四) 本題教學的加強重點：**

建議教師可以參考下列步驟協助學生解題：

- 1.先複習「平行四邊形面積公式及三角形面積公式」的由來。
- 2.再利用切割重組的方式在沒有給定邊長數據情形下比較甲、乙兩圖三角形面積及平行四邊形面積的大小。

**四、命題建議**

- (一) 老師可以修改圖形，改成甲圖為四個三角形，乙圖為二個平行四邊形，讓學生判別甲、乙的斜線面積大小關係為何？

(二) 如果是開放性的題型，老師可考慮給予甲圖的三角形，讓學生在乙圖畫出和甲圖同樣面積大小的平行四邊形。

### 五、歷屆試題

(一) 國家教育研究院 104 年協助縣市辦理學生學習能力檢測—國小五年級數學科試題

下列有甲、乙、丙、丁四個圖，哪個圖的灰色面積與右圖長方形的面積不同？

甲圖      乙圖      丙圖      丁圖  
(單位：公分)

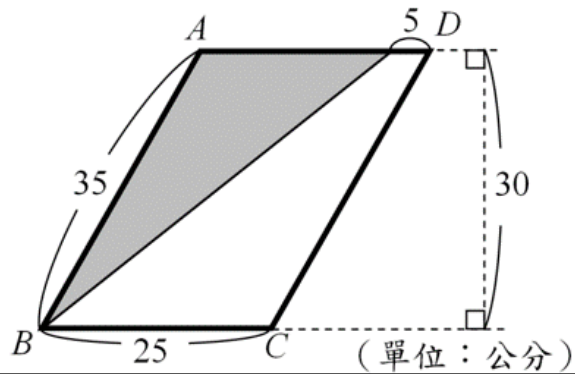
- ① 甲
- ② 乙
- ③ 丙
- ④ 丁

選 項	1	2	3	4	其他	答案：4
選項率	0.09	0.08	0.15	0.68*	0.01	鑑別度：0.5
高分組	0.02	0.02	0.04	0.92	0.00	難易度：0.67
低分組	0.16	0.16	0.25	0.42	0.01	

(二) 國家教育研究院 105 年協助縣市辦理學生學習能力檢測—國小五年級數學科試題

一個平行四邊形  $ABCD$  中，灰色三角形（如下圖）的面積是多少平方公分？

- ① 300 平方公分
- ② 350 平方公分
- ③ 600 平方公分
- ④ 700 平方公分



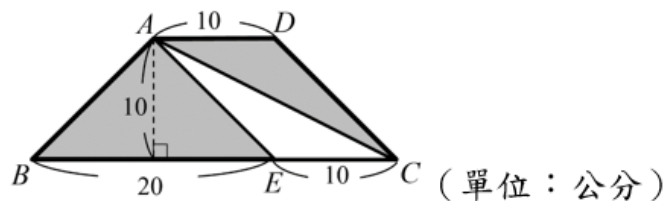
選 項	1	2	3	4	其他	答案：1
-----	---	---	---	---	----	------

選項率	0.34*	0.31	0.18	0.17	0.00	鑑別度：0.45 難易度：0.28
-----	-------	------	------	------	------	----------------------

高分組	0.61	0.22	0.12	0.06	0.00
低分組	0.16	0.35	0.24	0.26	0.00

(三) 106 學年度新北市國小五年級數學能力檢測試題

有一個梯形  $ABCD$  (如下圖)，灰色部分的面積是多少平方公分？



- ① 100 平方公分
- ② 150 平方公分
- ③ 300 平方公分
- ④ 350 平方公分

選 項	1	2	3	4	其他	答案：2
-----	---	---	---	---	----	------

選項率	0.12	0.64*	0.16	0.08	0.00	鑑別度：0.6 難易度：0.61
-----	------	-------	------	------	------	---------------------

高分組	0.04	0.91	0.03	0.02	0.00
低分組	0.21	0.31	0.31	0.17	0.00

第 22 題 5-n-16

知識向度	量與實測	認知向度	程序執行																												
對應分年細目	5-n-16 能認識重量單位「公噸」、「公噸」及「公斤」的關係並做相關計算																														
題目	一隻河馬重1.6公噸，一隻初生的長頸鹿重50公斤，兩者重量相差多少？(1公噸=1000公斤) ① 1.1公噸 ② 1.595 公噸 ③ 1公噸10公斤 ④ 1公噸550公斤																														
答題表現 選項分析	<table border="1"> <thead> <tr> <th>選 項</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> <th>其他</th> <th>答案：4</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>選項率</td> <td>0.07</td> <td>0.07</td> <td>0.06</td> <td>0.80*</td> <td>0.00</td> <td>鑑別度：0.5 難易度：0.71</td> </tr> <tr> <td>高分組</td> <td>0.02</td> <td>0.02</td> <td>0.00<sup>+</sup></td> <td>0.96</td> <td>0.00</td> <td></td> </tr> <tr> <td>低分組</td> <td>0.16</td> <td>0.20</td> <td>0.18</td> <td>0.46</td> <td>0.00</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：4	選項率	0.07	0.07	0.06	0.80*	0.00	鑑別度：0.5 難易度：0.71	高分組	0.02	0.02	0.00 <sup>+</sup>	0.96	0.00		低分組	0.16	0.20	0.18	0.46	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：4																									
選項率	0.07	0.07	0.06	0.80*	0.00	鑑別度：0.5 難易度：0.71																									
高分組	0.02	0.02	0.00 <sup>+</sup>	0.96	0.00																										
低分組	0.16	0.20	0.18	0.46	0.00																										
*代表數值不等於0																															

一、試題分析

(一) 數據解析：

本題鑑別度為 0.5，通過率為 0.80，難易度 0.71。

(二) 評量目標說明：

本試題主要在測驗學童是否清楚 1 公噸=1000 公斤的概念，並加入小數做計算。

(三) 選項表現說明：

1. 有 80% 的學生選擇選項④，知道 1.6 公噸=1600 公斤，「1600-50=1550 公斤」，進行正確的單位換算，並完成計算。
2. 有 7% 的學生選擇選項①，在計算 50 公斤=0.5 公噸時，理解成 1 公噸=100 公斤，導致 50 公斤=0.5 公噸，計算變成「1.6-0.5=1.1 公噸」。
3. 有 7% 的學生選擇選項②，對於重量單位中公噸換成公斤理解成 1 公噸=10000 公斤，故換算成 50 公斤=0.005 公噸，因而解出「1.6-0.005=1.595 公噸」。
4. 有 6% 的學生選擇選項③，在計算 1.6 公噸=1 公噸 60 公斤時，將 0.6 公噸理解成 1 公噸=100 公斤，因此 0.6 公噸=60 公斤，計算變成「1 公噸 60 公斤-50 公斤=1 公噸 10 公斤」。

(四) 學生表現說明：

1. 本題命題是重量單位中的大單位減小單位，且已經給予學生公噸與公斤之間的關係，希望學生無須強記單位換算的內容，直接依照條件來解決問題，藉此可以看出學生對於單位換算的概念是否理解，並且檢視學生是否能以小數呈現。
2. 本題通過率約為 80%，高分組學生通過率高達 96.41%，顯示高分組學生，對於重量單位，掌握清楚並能解題。但是，低分組學生通過率僅 46.43%，顯示低分組的學生對於重量單位

的換算具有困難。從學生的選項通過率來看，學生多受到長度單位換算的影響，認為「1公噸=100公斤」，即使題目已經標註「1公噸=1000公斤」，仍無法順利解題。

## 二、教材地位分析

### 97課綱（分年細目）

#### （一）評量重點

5-n-16 能認識重量單位「公噸」、「公噸」及「公斤」間的關係，並做相關計算。

#### （二）先備的知識

3-n-16 能認識重量單位「公斤」、「公克」及其關係，並做相關的實測、估測與計算。

4-n-14 能以複名數解決量（長度、容量、重量）的計算問題。

#### （三）延伸的知識

6-n-11 能理解常用導出量單位的記法，並解決生活中的問題。

### 十二年國教課綱（學習內容）

#### （一）評量重點

N-5-13 重量：「公噸」。生活實例之應用。含與「公斤」的換算與計算。使用概數。

#### （二）先備的知識

N-3-16 重量：「公斤」、「公克」。實測、量感、估測與計算。單位換算。

#### （三）延伸的知識

N-6-8 解題：基準量與比較量。比和比值的應用。含交換基準時之關係。

## 三、教學建議

#### （一）評量核心概念

用公噸和公斤的重量單位做加、減、乘、除的計算。

#### （二）學生常見的錯誤類型／迷思概念

##### 1. 重量單位「公噸」、「公噸」及「公斤」間的關係

（1）不理解重量單位小數倍單名數換算：大單位化成小單位：學生不理解 1.6 公噸是多少公斤。

（2）不理解重量單位小數倍複名數換算

A. 大單位化成小單位：學生不理解 1.6 公噸是多少公噸多少公斤。

B. 小單位聚成大單位：學生不理解 1 公噸 10 公斤是多少公噸。

（3）不理解重量的二階單位換算：學生不清楚將小單位的量，改用大單位來表示時，應該如何處理，如「270 公斤」化成「2 公噸 70 公斤」；或是將大單位描述的量，改用小單位來表示時，該如何處理。如 12345 公斤換成 123 公噸 45 公克或 123.45 公噸，或 2.75 公噸換成 275 公克。

##### 2. 相關的計算

（1）加減法時，容易沒有注意到 1 公噸=1000 公斤，而造成計算錯誤。例如 5.1 公噸-3 公噸 2 公斤，誤計算成  $5.1-3.2=1.9$  公噸。或是計算成  $5.1-3.02=2.08$  公噸。

(2) 乘除法時，容易沒有注意到 1 公噸=1000 公斤，而造成計算錯誤。例如  $5.08 \text{ 公噸} \times 2 =$  ( ) 公噸，誤計算成 11.6 公噸。

### (三) 核心概念的教學重點

#### 1. 以定位板輔助 1 公噸=1000 公斤的概念建立

學生必須先建立 1 公噸等於 1000 公斤的起始概念。並學會繪製運用定位板：

公噸			公斤
1	0	0	0

公噸			公斤
千位	百位	十位	個位
1	0	0	0

 $\Rightarrow$ 

公噸			公斤
1	0	0	0

#### 2. 在定位板上熟練不同類型的單位換算

教師首先讓學生練習填寫 1000 公斤以內的數於重量定位板上。

- (1) 讓學生練習填寫 1 公噸、2 公噸、3 公噸……，等於多少公斤的數於重量定位板上。
- (2) 學生精熟練習填寫 1234 公斤類型、1230 公斤類型、1200 公斤類型、1034 公斤類型、1030 公斤類型等於多少噸多少公斤？（由簡到難）。
- (3) 讓學生精熟練習填寫二階單位換算，例如：「1 公噸 234 公斤類型」、「1 噸 230 公斤類型」、「1 公噸 200 公斤類型」、「1 公噸 34 公斤類型」……，各會等於多少公斤？

#### 3. 定位板「小數」之應用：例如 $3245 \text{ 公斤} = 3.245 \text{ 公噸}$ 。

公噸			公斤
千位	百位	十位	個位
3	2	4	5

公噸			公斤
個位	十分位	百分位	千分位
3	2	4	5

學生需理解定位板種各位值的倍數關係，進而能夠熟練抽象的單位換算。

#### 4. 重量的計算問題

(1) 重量加法和減法問題：重量單位換算完後，利用重量單位定位版進行加減法直式計算。

#### (2) 重量的乘法和除法問題

利用乘法解決大單位化為小單位的問題，利用除法解決小單位聚為大單位的問題。

題目：3 公噸 = ( ) 公斤。

解題：「1 公噸是 1000 公斤，3 公噸是多少公斤？」教師可以幫助學生利用算式「 $1000 \times 3 = 3000$ 」，算出 3 公噸是 3000 公斤。

題目：4.6 公噸 = ( ) 公斤。

解題：「1 公噸是 1000 公斤，0.6 公噸是多少公斤？」教師幫助學生利用算式「 $0.6 =$

$\frac{6}{10}$ ， $1000 \div 10 = 100$ ， $100 \times 6 = 600$ 」，算出 0.6 公噸是 600 公斤。4 公噸 =  $1000 \times 4 = 4000$  公斤， $4000 + 600 = 4600$  公斤。

題目：5000 公斤 = ( ) 公噸。

解題：「1 公噸是 1000 公斤，5000 公斤是多少公噸？」教師幫助學生利用算式「 $5000 \div 1000 = 5$ 」，算出 5000 公斤可以換 5 公噸。

題目：5.89 公噸相當於幾公噸幾公斤？

解題：5.89 公噸 = 5 公噸 + 0.89 公噸，其中 0.89 公噸 =  $1000 \text{ 公斤} \times 0.89 = 890$  公斤，所以 5.89 公噸 = 5 公噸 890 公斤。

#### (四) 本題教學的加強重點

##### 1. 重量單位小數倍複名數換算

###### (1) 大單位換成小單位

方法1：0.142 公噸是 1 公噸的 0.142 倍，1 公噸是 1000 公斤，所以 0.142 公噸 =  $1000 \times 0.142 = 142$  公斤。0.142 公噸也就是 142 公斤。

方法2：1 公噸是 1000 公斤，將 0.142 記成  $\frac{142}{1000}$ ，再利用算式「 $1000 \div 1000 = 1$ ， $1 \times 142 = 142$ 」，算出 0.142 公噸和 142 公斤一樣重，所以 0.142 公噸是 142 公斤。

###### (2) 小單位換成大單位

方法1：以 107 公斤為例，1 公噸是 1000 公斤，107 公斤是 1000 公斤的 0.107 倍（ $107 \div 1000 = 0.107$ ），1 公噸的 0.107 倍是 0.107 公噸。所以 107 公斤是 0.107 公噸。

方法2：每 1000 公斤是 1 公噸，用算式「 $107 \div 1000 = \frac{107}{1000} = 0.107$ 」，算出 107 公斤和 0.107 公噸一樣重。

##### 2. 定位板「小數」之應用

學生必須先建立 1 公噸等於 1000 公斤的起始概念。並學會繪製定位板（如下表）的能力。

1 公噸 = 1000 公斤

公噸			公斤
千位	百位	十位	個位

公噸			公斤
個位	十分位	百分位	千分位

步驟1：教師首先讓學生練習填寫 1000 公斤以內的數於定位板上。

例如：107 公斤 = ? 公噸

公噸			公斤
千位	百位	十位	個位
	1	0	7

公噸			公斤
個位	十分位	百分位	千分位
0	1	0	7

步驟2：讓學生練習填寫 1 公噸、2 公噸、3 公噸、.....，等於多少公噸的數於定位板上。例如：3 公噸 = 3000 公斤，3000 公斤 = 3 公噸

公噸				公斤
千位	百位	十位	個位	
3	0	0	0	

公噸				公斤
個位	十分位	百分位	千分位	
3	0	0	0	

步驟3：學生練習填寫 0.142 公噸：

公噸				公斤
千位	百位	十位	個位	
	1	4	2	

公噸				公斤
個位	十分位	百分位	千分位	
0	1	4	2	

步驟4：學生精熟練習填寫 3 公噸 500 公斤、3 公噸 50 公斤、3 公噸 5 公斤是多少公噸？例如：3 公噸 5 公斤 = 3005 公斤 = 3.005 公噸

公噸				公斤
千位	百位	十位	個位	
3	0	0	5	

公噸				公斤
個位	十分位	百分位	千分位	
3	0	0	5	

步驟5：學生精熟練習反推 5.7 公噸是多少公噸多少公斤。例如：

公噸				公斤
千位	百位	十位	個位	
5	7	0	0	

公噸				公斤
個位	十分位	百分位	千分位	
5	7	0	0	

### 3. 重量單位的減法計算

(1) 小數倍複名數換算，利用大單位換成小單位後再計算：先將 5.7 公噸換成是 5 公噸 700 公斤後，再將 5 公噸 700 公斤和 3 公噸 5 公斤中公噸和公斤數字位置對齊定位板，算出答案 2 公噸 695 公斤。

	公噸				公斤
	5	7	0	0	
—	3	0	0	5	
	2	6	9	5	

(2) 小數倍複名數換算，利用小單位聚成大單位後再計算：先將 3 公噸 5 公斤換成是 3.005 公噸後，再將 5.7 公噸和 3.005 公噸的數字位置對齊定位板，算出答案為 2.695 公噸。

#### 四、命題建議

本條細目重點在於認識重量單位的關係，建議教師在命題時，可以參考下列二則建議：

- (一) 在總結性評量中可於情境中運用不同單位進行計算，讓學生熟練單位之間的轉換與計算。
- (二) 從本題表現可發現低分組學生需要較多的操作練習，建議教師可以非選題的方式命題，以獨立繪製定位板的方式，檢視學生是否確實理解 1 公噸=1000 公斤的概念。

例：在下方格子中繪製出定位板，在定位板中標示並寫出 5.7 公噸 = ( ) 公斤

--

公噸			公斤
5	.	7	

公噸			公斤
5	7	0	0

#### 五、歷屆試題

##### (一) 104 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

藍鯨是世界上最大的動物，剛出生的小藍鯨體重約 2.7 公噸。小藍鯨的生長速度很快，體重每天增加 90 公斤，小藍鯨出生 3 天後的體重大約多少公噸？（1 公噸=1000 公斤）

- ① 2.79 公噸
- ② 2.97 公噸
- ③ 5.4 公噸
- ④ 8.37 公噸

選 項	1	2	3	4	其他	答案：2
選項率	0.10	0.71*	0.12	0.07	0.00	鑑別度：0.59 難易度：0.66
高分組	0.02	0.95	0.03	0.00	0.00	
低分組	0.24	0.36	0.22	0.17	0.01	

(二) 105 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

一隻大象重 5.7 公噸、一隻小象重 3 公噸 5 公斤，大象和小象的體重相差多少？（1 公噸=1000 公斤）

- ① 2 公噸 695 公斤
- ② 2 公噸 2 公斤
- ③ 2.65 公噸
- ④ 2.2 公噸

選 項	1	2	3	4	其他	答案：1
選項率	0.68*	0.13	0.05	0.13	0.00	鑑別度：0.54 難易度：0.67
高分組	0.94	0.01	0.01	0.04	0.00	
低分組	0.40	0.28	0.11	0.21	0.00	

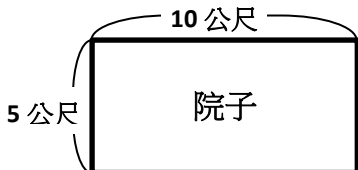
(三) 106 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

舉重選手郭婞淳參加 2017 臺北世大運 58 公斤級賽事，以抓舉 107 公斤、挺舉 0.142 公噸的成績破大會紀錄，勇奪金牌為國爭光。本次郭婞淳抓舉和挺舉成績的總重量是多少？（1 公噸=1000 公斤）

- ① 0.249 公噸
- ② 1.212 公噸
- ③ 107.142 公斤
- ④ 165.142 公斤

選 項	1	2	3	4	其他	答案：1
選項率	0.79*	0.06	0.09	0.03	0.00	鑑別度：0.53 難易度：0.72
高分組	0.99	0.00	0.01	0.00	0.00	
低分組	0.45	0.19	0.25	0.11	0.00	

第 23 題 5-n-02

知識向度	數與計算	認知向度	概念理解																															
對應分年細目	5-n-02 能在具體情境中，解決三步驟問題，並能併式計算。																																	
題目	<p>在長10公尺、寬5公尺的長方形院子的四周圍上柵欄，總共花了18000元，一公尺長的柵欄是多少元？</p> <p>① <math>18000 \div (10 \times 5) = 360</math>            ② <math>18000 \div (10 \times 2 + 5 \times 2) = 600</math>            ③ <math>18000 \div (10 + 5) \times 2 = 2400</math>            ④ <math>18000 \div 10 \times 5 = 9000</math></p> 																																	
答題表現 選項分析	<table border="1"> <thead> <tr> <th>選 項</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> <th>其他</th> <th>答案：2</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>選項率</td> <td>0.38</td> <td>0.47*</td> <td>0.11</td> <td>0.04</td> <td>0.00</td> <td>鑑別度：0.56 難易度：0.5</td> </tr> <tr> <td>高分組</td> <td>0.18</td> <td>0.78</td> <td>0.04</td> <td>0.00<sup>+</sup></td> <td>0.00</td> <td></td> </tr> <tr> <td>低分組</td> <td>0.46</td> <td>0.22</td> <td>0.19</td> <td>0.13</td> <td>0.00</td> <td></td> </tr> </tbody> </table> <p><sup>+</sup>代表數值不等於0</p>						選 項	1	2	3	4	其他	答案：2	選項率	0.38	0.47*	0.11	0.04	0.00	鑑別度：0.56 難易度：0.5	高分組	0.18	0.78	0.04	0.00 <sup>+</sup>	0.00		低分組	0.46	0.22	0.19	0.13	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：2																												
選項率	0.38	0.47*	0.11	0.04	0.00	鑑別度：0.56 難易度：0.5																												
高分組	0.18	0.78	0.04	0.00 <sup>+</sup>	0.00																													
低分組	0.46	0.22	0.19	0.13	0.00																													

一、試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.56，通過率為 0.46，難易度 0.5。

(二) 評量目標說明

本題旨在了解學生能在具體情境中，將三步驟問題併式紀錄。

(三) 選項表現說明

- 有 47% 的學生選擇正確選項②，顯示這些學生能理解題意，將算式記錄為「總金額÷周長公尺數」，且計算正確。
- 有 38% 的學生選擇選項①，這些學生未能理解題意，誤將算式記錄為「總金額÷面積」，或雖能理解題意，但卻在列式時混淆周長和面積的算法而列式錯誤。
- 有 11% 的學生選擇選項③，這些學生在計算周長時利用(長+寬)×2 來表示，但忽略了原本正確的併式要加上雙括號，列式為  $18000 \div [(10+5) \times 2]$ ，才能正確計算答案為 600。但此學習階段中，學生沒有雙括號的相關學習經驗，因此學生在忽略選項③沒加括號時，原列式需由左至右計算，答案應該是 2400。
- 有 4% 的學生選擇選項④，這些學生能理解題意，但在計算周長時，不但誤算成面積，並且在列式時未將「 $10 \times 5$ 」加括號先算，而形成由左至右計算，故得到的答案為 9000。

(四) 學生表現說明

- 本題主要在評量學童是否能在三步驟的具體情境中，運用長方形周長公式，依題意併式記錄，計算並求出解答。併式記錄時除了要熟悉四則運算的規約(括號先算、先乘/除後加/減、由左至右計算)，還要能正確計算。

2.本題難易度為 0.5。本題通過率為 46%。只有不到五成的學生能正確利用長方形周長公式及使用四則運算規約進行併式計算，卻有超過五成的學生忽略四則運算規約及誤用長方形面積公式。從高分組與低分組學生的表現，78%的高分組學生能正確回答問題，低分組學生中只有 22% 回答正確，卻有 48% 誤用長方形面積公式做紀錄及解題，顯示低分組學生在進行三步驟問題併式紀錄時，對具體情境的理解仍有待加強。

## 二、教材地位分析

### 97 課綱（分年細目）

#### （一）評量重點

5-n-02 能在具體情境中，解決三步驟問題，並能併式計算。

#### （二）先備的知識

4-n-04 能在具體情境中，解決兩步驟問題，並學習併式的記法與計算。

#### （三）延伸的知識

6-n-05 能在具體情境中，解決分數的兩步驟問題，並能併式計算。

6-n-08 能在具體情境中，解決小數的兩步驟問題，並能併式計算。

### 十二年國教課綱（學習內容）

#### （一）評量重點

N-5-2 解題：多步驟應用問題。除「平均」之外，原則上為三步驟解題應用。

R-5-1 三步驟問題併式：建立將計算步驟併式的習慣，以三步驟為主。介紹「平均」。與分配律連結。

#### （二）先備的知識

R-4-1 兩步驟問題併式：併式是代數學習的重要基礎。含四則混合計算的約定（由左往右算、先乘除後加減、括號先算）。學習逐次減項計算。

R-4-2 四則計算規律（I）：兩步驟計算規則。加減混合計算、乘除混合計算。在四則混合計算中運用數的運算性質。

#### （三）延伸的知識

N-6-5 解題：整數、分數、小數的四則應用問題。二到三步驟的應用解題。含使用概數協助解題。

## 三、教學建議

#### （一）評量核心概念

能在具體情境中解決三步驟問題並能併式計算。

#### （二）學生常見的錯誤類型／迷思概念

1.未能有效讀取題目訊息：學生沒有先閱讀題意、了解題意的習慣，認為題目中出現的數字都會在解題中使用，甚至養成依照題目中數字出現的順序來依序列式的習慣。

2.誤解題意：將求單位量的語意(4 盒鳳梨酥共有 48 個)誤為求總量的語意(4 盒鳳梨酥，每盒有 48 個)。

3.併式錯誤：使用分年細目 5-n-02 的命題為例，是由三個式子「 $48+96=144$ 、 $144-16=128$ 、 $128\div 8=16$ 」所合併，學生可能在合併時遺漏括號使用，造成併式錯誤的情形，如本題的選項①。

4.未正確使用四則運算規約：

- (1) 誤以為「先乘/除，後加/減」的規約是乘優於除、加優於減，因此出現加法或乘法先算的錯誤情形，例如  $56-10+6=56-16$  或是  $100\div 4\times 5=100\div 20$ 。
- (2) 只記得「由左至右計算」而遺漏「先乘/除，後加/減」，例如  $24+6\times 8=30\times 8$ 。
- (3) 不清楚括號使用的時機，列出沒有括號的算式，例如本題的選項①。

5.逐次減項有誤：以算式 $(45-5)\times 30\div 2$ 為例，學生可能寫出下列作法： $(45-5)\times 30\div 2=40\times 30=1200\div 2=600$ ，忽略每次的減項中仍須保持等號兩邊相等。

### (三) 核心概念的教學重點

多步驟的問題情境下，學生要從過去經驗過的多步驟解題策略，進展到能運用併式的方式來表示題意並進行計算，其教學的順序如下：

- 1.閱讀多步驟情境問題：教師可以提供多種具體情境的題目，題目中可以包含一些多餘的訊息，引導學生分析哪些訊息與解題相關，並討論題意、澄清題意。
- 2.口頭說明先算什麼、再算什麼：在理解題意之後，學生應能清楚說出先算及後算的內容，以分年細目 5-n-02 的命題為例，學生應說出「先算總共有多少個鳳梨酥、再算小明吃掉 16 個後剩下幾個，最後算平分成 8 盒每盒有幾個」，教師應鼓勵學生不要急著列式，先溝通釐清解題的脈絡更為重要。
- 3.依題意列出多步驟算式再進行併式：以分年細目 5-n-02 的命題為例，應列出三個式子「 $48+96=144$ 、 $144-16=128$ 、 $128\div 8=16$ 」，再併為兩個式子「 $48+96-16=128$ 」，最後併為一個式子「 $(48+96-16)\div 8=16$ 」，若學生已有能力直接寫出併式，可省略上述步驟。
- 4.呈現併式錯誤類型：以分年細目 5-n-02 的命題為例，學生可能會併式為「 $48+96-16\div 8=16$ 」，教師可觀察學生出現的不同錯誤類型即時提出討論，讓學生再次理解四則運算規約的重要性。
- 5.逐次減項解題：以分年細目 5-n-02 的命題為例，逐次減項做法如下

$$\begin{aligned}(48+96-16)\div 8 \\ &= (144-16)\div 8 \\ &= 128\div 8 \\ &= 16\end{aligned}$$

### (四) 本題教學的加強重點

在進行三步驟問題的教學時，教師可參考上述第(三)點核心概念的教學重點進行教學，或可在評量之後進行下述活動：

- 1.進行長方形周長和面積公式的澄清。本題高分組有近二成學生將兩者混淆，低分組學生更有接近六成的比例，此一錯誤比例可作為中年級老師在進行此概念教學時的參考。
- 2.列式記錄後再依四則運算規約檢核是否符合題意。本題選項③忽略原列式需由左至右計算，但題意是先利用 $(10+5)\times 2$ 算出周長，再用 18000 除以周長。

3. 求出算式答案做檢核：計算選項②及選項③的結果，幫助學生釐清： $18000 \div (10 \times 2 + 5 \times 2)$  是 18000 除以周長，而  $18000 \div (10 + 5) \times 2$  是 18000 除以(長+寬)後再乘以 2，兩者計算的結果是不相同的。

#### 四、命題建議

併式的能力是國中學習代數的重要基礎，學生需學會將各種四則運算三步驟問題的計算步驟併為一式。

##### (一) 依評量目的

若評量目的為「三步驟問題如何併式」時，則重點放在併式在四則運算規約下計算順序要符合題意，情境中，儘量不出現另一新概念，例如本題的長方形周長公式，避免混淆評量重點。命題型式可以如下：

1. 選擇題：可不要求學生計算出正確答案，從選項設計來判斷併式是否正確即可。如新北市數學能力檢測 105 學年度選擇題第 17 題、106 學年度選擇題第 10 題和 107 學年度選擇題第 9 題。
2. 非選題：另可以非選題形式命題，將三步驟算式併成一個算式，檢核學生是否懂得利用括號來使題意和運算規約相符合。如新北市 107 學年度非選題第 2 題。

若評量目的為「三步驟問題的併式計算」時，則重點放在應用四則運算規約逐次減項計算出正確答案，命題型式可以如下：

1. 選擇題：學生將三步驟的問題情境用四則運算規約計算出正確答案，如新北市 104 學年度選擇題第 1 題，但未能評量出學生是否有將三步驟問題併式的能力。
2. 計算題：單純檢核學生是否能正確應用四則運算規約。

##### (二) 依評量內容

除了簡單問題（學生能在心中順暢安排計算順序），還應包含以下兩類問題：

1. 平均問題：平均是處理資料時常見的運算，處理平均問題時也不妨處理超過三筆以上的資料，重點在於熟悉平均的計算與併式。
2. 和分配律相關的問題。

## 五、歷屆檢測試題參考

### (一) 104 學年度數學能力檢測第 1 題

撲滿裡面有 45 元，哥哥每天存進 3 元，妹妹每天存進 2 元，11 天後撲滿裡總共有多少元？

- ① 55 元
- ② 78 元
- ③ 100 元
- ④ 550 元

選 項	1	2	3	4	其他	答案：3
選項率	0.11	0.03	0.81*	0.05	0.00	鑑別度：0.42 難易度：0.76
高分組	0.02	0.00	0.97	0.00	0.00	
低分組	0.22	0.08	0.55	0.14	0.00	

### (二) 105 學年度數學能力檢測第 17 題

「有 2 位家長請全班喝飲料，飲料每杯 45 元；因為訂了 30 杯，所以老闆每杯便宜 5 元。這 2 位家長每人平均要付多少元？」下列哪一個算式能算出正確答案？

- ①  $(45 - 5) \times 30 \div 2$
- ②  $(45 - 5 \times 30) \div 2$
- ③  $(45 \times 30 - 5) \div 2$
- ④  $45 \times 30 - 5 \div 2$

選 項	1	2	3	4	其他	答案：1
選項率	0.73*	0.10	0.13	0.05	0.00	鑑別度：0.44 難易度：0.72
高分組	0.93	0.03	0.04	0.01	0.00	
低分組	0.50	0.17	0.23	0.10	0.00	

(三) 106 學年度數學能力檢測第 10 題

「小明和姊姊買了一件 2999 元的洋裝和一個 1895 元的皮包，送給媽媽當作生日禮物。爸爸幫忙付了 2000 元後，姊弟兩人還要各自分攤多少元？」下列哪一個算式能算出正確答案？

- ①  $(2999 + 1895) \div 2 - 2000$
- ②  $(2999 + 1895 - 2000) \div 2$
- ③  $(2999 + 1895) \div 2 + 2000$
- ④  $(2999 + 1895 + 2000) \div 2$

選 項	1	2	3	4	其他	答案：2
選項率	0.09	0.84*	0.03	0.04	0.00	鑑別度：0.38 難易度：0.79
高分組	0.01	0.98	0.01	0.00	0.00	
低分組	0.21	0.60	0.09	0.10	0.00	

(四) 107 學年度數學能力檢測第 9 題

「媽媽買了 4 盒鳳梨酥有 48 個，爸爸買了 12 盒鳳梨酥有 96 個，小明先吃了 16 個，剩下的平分成 8 盒，平分後每盒有幾個鳳梨酥？」下列哪個算式可以算出正確答案？

- ①  $48 + 96 - 16 \div 8$
- ②  $(48 + 96 - 16) \div 8$
- ③  $(48 \div 4 + 96 \div 12 - 16) \div 8$
- ④  $(48 \times 4 + 96 \times 12) \div 8$

選 項	1	2	3	4	其他	答案：2
選項率	0.10	0.73*	0.11	0.06	0.00	鑑別度：0.51 難易度：0.68
高分組	0.02	0.94	0.04	0.00	0.00	
低分組	0.21	0.43	0.20	0.17	0.00	

(五) 107 學年度數學能力檢測非選題第 2 題

2. 老師出了一個數學題目：「飲料店周年慶特價，水果茶、珍珠奶茶每杯都是 28 元，媽媽買了 12 杯水果茶、8 杯珍珠奶茶，付了 600 元找回多少元？」

全班討論的做法如下：


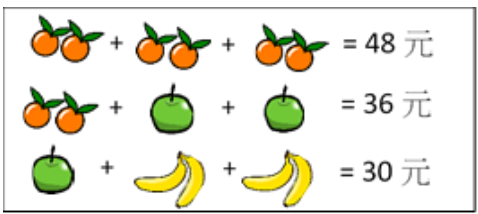
$$\begin{aligned} 12+8 &= 20 \text{ (杯)} \\ 28 \times 20 &= 560 \text{ (元)} \\ 600-560 &= 40 \text{ (元)} \end{aligned} \quad \text{答：找回 40 元}$$

小萱將全班討論的做法用一個算式記成：

$$600-28 \times 12+8=40 \quad \text{答：找回 40 元}$$

你覺得小萱的算式正確嗎？為什麼？把你的想法寫下來。

第 24 題 5-a-04

知識向度	代數	認知向度	概念理解																														
對應分年細目	5-a-04 能將整數單步驟的具體情境問題列成含有未知數符號的算式，並能解釋算式、求解及驗算。																																
題目	<p>水果店計價方式如下圖。瑜瑜結帳時拿了</p>  <p>，一共要付多少錢？</p> <p>① 46 元 ② 41 元 ③ 36 元 ④ 23 元</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">  </div>																																
答題表現 選項分析	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th>選 項</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> <th>其他</th> <th>答案：2</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>選項率</td> <td>0.26</td> <td>0.44*</td> <td>0.25</td> <td>0.05</td> <td>0.00</td> <td>鑑別度：0.41 難易度：0.45</td> </tr> <tr> <td>高分組</td> <td>0.19</td> <td>0.65</td> <td>0.15</td> <td>0.01</td> <td>0.00</td> <td></td> </tr> <tr> <td>低分組</td> <td>0.30</td> <td>0.24</td> <td>0.33</td> <td>0.13</td> <td>0.00</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>					選 項	1	2	3	4	其他	答案：2	選項率	0.26	0.44*	0.25	0.05	0.00	鑑別度：0.41 難易度：0.45	高分組	0.19	0.65	0.15	0.01	0.00		低分組	0.30	0.24	0.33	0.13	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：2																											
選項率	0.26	0.44*	0.25	0.05	0.00	鑑別度：0.41 難易度：0.45																											
高分組	0.19	0.65	0.15	0.01	0.00																												
低分組	0.30	0.24	0.33	0.13	0.00																												

一、試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.41，通過率為 0.44，難易度 0.45。

(二) 評量目標說明

本題旨在評量學生能將情境問題用符號表示未知數。

(三) 選項表現說明

- 有 44% 的學生選擇正確選項②，顯示四成多的學生可以理解情境問題，能依情境問題了解圖示代表未知數，依序正確計算出各項水果的單價後再求出提問的水果總價。
- 有 26% 的學生選擇選項①，顯示大部分的學生可以理解情境問題，並能依情境問題了解圖示代表未知數，依序正確計算出櫻桃單價為 8 元、蘋果為 10 元、香蕉為 5 元，最後可能忽略提問水果的香蕉只有一根，誤以為三種水果的數量皆為 2，因此計算： $8 \times 2 + 10 \times 2 + 5 \times 2 = 46$ ，故而答①。
- 有 25% 的學生選擇選項③，顯示學生忽略情境問題的算式中代表未知數圖示的水果數量各不相同，例如算式二中的蘋果為 1 顆，提問算式中的蘋果則為 2 顆，因此學生將各算簡化為算式一：三組櫻桃相加，算出一組櫻桃為 16 元；算式二：一組櫻桃和兩組蘋果相加，算出一組蘋果為 10 元；算式三：一組蘋果和兩組香蕉相加，算出一組香蕉為 10 元；提問算式：一組櫻桃+一組蘋果+一組香蕉，故計算： $16 + 10 + 10 = 36$ ，故而答③。而在這情境問題中，命題教師也希望高分組學生能透過未知數的比較，從第二式中的兩個櫻桃加上兩個蘋果就已經 36 元，推測出提問的兩個櫻桃與兩個蘋果再加上一個香蕉的總價絕對會超過 36 元，因此可直接刪去答案③。

- 4.有 5%的學生選擇選項④，顯示少數學生雖然能理解情境問題，並能依情境問題了解圖示代表未知數，依序正確計算出櫻桃單價為 8 元、蘋果為 10 元、香蕉為 5 元，但最後卻被提問的三種未知數圖像的不同數量所混淆，通通視為一個，因此求出  $8+10+5=23$ ，故答案④。

#### (四) 學生表現說明

- 1.本題的命題設計主要是希望能瞭解學生對於「整數單步驟且含有未知數」的情境問題中能理解題意並依序計算出各算式中圖示代表的未知數，藉以檢驗學生對於加法情境中被加數與加數同時為未知數時，是否能正確依序解出各項未知數。需注意的是有部分學生可能會因題意列式中同時出現兩種以上圖示代表的未知數，而認為該題無法計算，但只要依序計算出各列式中圖示代表的未知數，該題型仍屬於整數單步驟解題。
- 2.本題通過率為 0.44，顯示約四成學生已能掌握對於「單步驟且含有未知數」的題目中如何從圖示代表未知數加法情境列式中解出該未知數數值並正確求出題意提問，但還是有將近六成的學生，可能對圖示代表未知數的情境容易混淆或是未知數的四則運算並不理解。從高分組與低分組學生的表現來看，只有 65%的高分組學生能正確回答問題，表示較抽象的未知數情境對高分組學生而言仍有一定的難度。而低分組學生有高達 76%無法正確回答，顯示低分組學生對於用圖示代表未知數的情境問題較無法理解題意並依序計算出未知數的數值，或是容易對於情境中圖示代表未知數的數量感到混淆。

## 二、教材地位分析

### 97 課綱 (分年細目)

#### (一) 評量重點

5-a-04 能將整數單步驟的具體情境問題列成含有未知數符號的算式，並能解釋算式、求解及驗算。

#### (二) 先備的知識

2-a-04 能理解加減互逆，並運用於驗算與解題。

#### (三) 延伸的知識

6-a-01 能理解等量公理。

### 十二年國教課綱 (學習內容)

#### (一) 評量重點

R-5-3 以符號表示數學公式：國中代數的前置經驗。初步體驗符號之使用，隱含「符號代表數」「符號與運算符號的結合」的經驗。應併入其他教學活動。

#### (二) 先備的知識

R-4-3 以文字表示數學公式：理解以文字和運算符號聯合表示的數學公式，並能應用公式。可併入其他教學活動 (如 S-4-3)。

#### (三) 延伸的知識

R-6-3 數量關係的表示：代數與函數的前置經驗。將具體情境或模式中的數量關係，學習以文字或符號列出數量關係的關係式。

## 三、教學建議

#### (一) 評量核心概念

整數單步驟含未知數的情境問題中，能理解情境問題，並依題意列出含有未知數的算式。

## (二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

### 1. 不瞭解未知數代表的意義因此無法用符號來表示未知數：

學生認為不同的文字符號和數字代表的意義不同，因此無法理解或使用文字符號來表示未知數。學生不理解文字符號表示未知數的意義。

### 2. 對等號表示左右兩邊是相等的意義不了解，無法以符號表示未知數來列式：

學生習慣以數字列式解題的算術思維，所以算式中的運算符號代表要執行的運算動作，而運算的結果(未知數)皆在等號右邊，故未知數表示運算的結果，因此學生不理解以符號代表未知數列出未知數在左邊的算式的意義。

### 3. 基本四則運算的理解及應用於解題成效不佳：


學生能理解題目的情境脈絡、以未知數為代表符號後進行正確列式，唯對於整數四則混合計算的算則未能熟稔，另外對於加減互逆或乘除互逆的關係亦未能明確了解，因此造成解題錯誤。

## (三) 核心概念的教學重點

### 1. 藉由圖像表徵幫助理解未知數的意義：

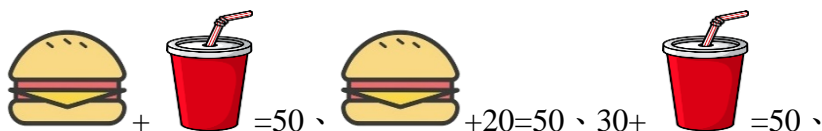
可用圖象表徵題意，使題目中抽象的數量關係藉由直觀的方式表達，有助於學生的思考，幫助解決問題。例如：一個漢堡 30 元，一杯可樂 20 元，總共多少錢？依情境列式： $30+20=( )$ ，若題目改為：一個漢堡 30 元，加一杯可樂共付了 50 元，一杯可樂多少錢？



學生可以依題意以圖示列式： $30+$    $=50$ ，圖示還可以用更簡潔的文字、符號來代替未知數，因此也可以列式為： $30+\text{可樂}=50$ 、 $30+\square=50$ 、 $30+\star=50$ ...透過將情境題的未知數以圖像表徵，慢慢過渡到以文字或符號表徵，讓學生理解未知數代表的意義。

### 2. 透過具體情境讓學生理解等號也可以表示左右兩邊的量相等：

承接上題情境的算式  $30+20=50$ ，可以用圖像代表未知數列出下列算式表示情境中的數量關係：



藉由具體情境及圖像表徵讓學生觀察發現以理解等號代表左右兩邊的量相等的意義。

### 3. 避免運算錯誤：

因為算式中出現文字符號，讓學生有陌生感，因而造成對四則混合計算的規約使用錯誤，因此除了強化學生對於文字符號的意義理解以外，應加強學生對於四則運算規約的使用。（有括號先計算；先乘除、後加減；由左至右計算）。

## (四) 本題教學的加強重點

### 1. 瞭解未知數圖示所代表的意義

如算式一： = 48 元

教師可以詢問學生圖示中的水果所代表的意義為何？讓學生能依圖示說出算式表示的意義為：「兩個櫻桃加兩個櫻桃加兩個櫻桃等於 48 元。」櫻桃圖示代表不知道的數字，此數字即為櫻桃的價格。

如算式二： = 36 元

讓學生依圖示說出算式二的意義為：「兩個櫻桃加一個蘋果加一個蘋果等於 36 元」，櫻桃及蘋果圖示表示兩者未知的價格，即未知數。依此類推讓學生理解圖示及算式表示的意義。

### 2. 加強未知數的逆向運算能力：

如算式一：三組櫻桃 48 元，利用乘除互逆可算出一組櫻桃(兩個)為 16 元，即一個櫻桃 8 元。

再將算式一算出的櫻桃價格代入算式二，利用加減及乘除互逆可算出蘋果一個 10 元。依此類推，確認學生理解圖示及算式意義後，藉由簡化未知數的計算步驟以引導學生逐步算出每一種水果的價格再正確回答問題。

### 3. 檢驗答案的合理性：

學生會使用符號列出算式求得答案，要培養學生能將答案代入原算式，檢驗答案的合理

性，藉以判斷是否為正解。如本題問題算式  明顯比算式二為

 = 36 元



多了一根香蕉，因此價格絕對高於 36 元，因此選項③、

④可以刪去。

## 四、命題建議：

(一) 將提問的未知數圖示數量統一或減少圖示種類來進行命題：

例一：為了避免未知數圖示數量的不同所造成學生在解題上的混淆，教師可將提問改為



「 = ?」或是「 = ?」

例二：多步驟且含有未知數符號的運算對於部分學生來說難度仍偏高，因此建議教師可減少未知數的圖示與計算步驟，讓學生對於題型不會因感到疑惑、恐而放棄。可將題型改為：

 = 48 元

 = 36 元

「瑜瑜結帳時拿了 ，一共要付多少錢？」

或「 和 ，哪一種水果比較貴？」

(二) 命題參考：

本指標隱含「符號代表數」、「符號與運算符號的結合」的經驗，透過情境問題學習以符

號代表未知數，利用加減互逆的概念，求得正解，不宜做純符號的運算。

## 五、歷屆試題：

### (一) 106 學年度第 23 題

判斷下列哪個選項中  $y$  所代表的數與其他選項不同？

- ①  $y - 28 = 40$
- ②  $y + 28 = 40$
- ③  $40 - y = 28$
- ④  $28 + y = 40$

選 項	1	2	3	4	其他	答案：1
選項率	0.66*	0.10	0.17	0.05	0.00	鑑別度：0.62 難易度：0.62
高分組	0.93	0.03	0.03	0.01	0.00	
低分組	0.31	0.18	0.37	0.14	0.00	

### (二) 107 學年度第 02 題

下列哪一個敘述可以用「 $60 \div x = 12$ 」的算式來表示？

- ① 60 位學生分組，每組有幾位學生，才可分成 12 組？
- ② 姐姐有卡片 60 張，送給妹妹幾張後，姐姐還有 12 張卡片？
- ③ 一張門票 60 元，買了 12 張共要付幾元？
- ④ 老師把獎卡平分給 12 人，每人拿到 60 張獎卡，老師原有幾張獎卡？

選 項	1	2	3	4	其他	答案：1
選項率	0.88*	0.10	0.17	0.05	0.00	鑑別度：0.31 難易度：0.83
高分組	0.98	0.01	0.006	0.004	0.00	
低分組	0.67	0.17	0.06	0.10	0.00	

第 25 題 5-a-01

知識向度	代數	認知向度	概念理解																														
對應分年細目	5-a-01 能在具體情境中，理解乘法對加、減法的分配律，並運用於簡化計算。																																
題目	「 $19998 \times 27$ 」的計算結果和下列哪個算式相等？ ① $19998 \times 30 - 3$ ② $20000 \times 27 - 2 \times 27$ ③ $19998 \times 20 + 7$ ④ $20000 - 2 \times 27$																																
答題表現 選項分析	<table border="1"> <thead> <tr> <th>選 項</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> <th>其他</th> <th>答案：2</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>選項率</td> <td>0.14</td> <td>0.58*</td> <td>0.12</td> <td>0.16</td> <td>0.00</td> <td>鑑別度：0.71 難易度：0.56</td> </tr> <tr> <td>高分組</td> <td>0.02</td> <td>0.92</td> <td>0.01</td> <td>0.05</td> <td>0.00</td> <td></td> </tr> <tr> <td>低分組</td> <td>0.28</td> <td>0.21</td> <td>0.27</td> <td>0.24</td> <td>0.00</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>					選 項	1	2	3	4	其他	答案：2	選項率	0.14	0.58*	0.12	0.16	0.00	鑑別度：0.71 難易度：0.56	高分組	0.02	0.92	0.01	0.05	0.00		低分組	0.28	0.21	0.27	0.24	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：2																											
選項率	0.14	0.58*	0.12	0.16	0.00	鑑別度：0.71 難易度：0.56																											
高分組	0.02	0.92	0.01	0.05	0.00																												
低分組	0.28	0.21	0.27	0.24	0.00																												

一、試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.71，通過率為 0.58，難易度 0.56。

(二) 評量目標說明

本題是評量學生是否理解乘法對加、減法的分配律，並運用於簡化計算。

(三) 選項表現說明

1. 有 58% 的學生選擇正確選項②，表示約有近六成的學生能理解乘法對減法的分配律，並運用於簡化計算。
2. 有 16% 的學生選擇選項④，這些學生可能對減法的分配律未能充分理解，且忽略先乘除後加減的算則，若減法先算需加括號，因此選擇錯誤選項④。
3. 有 14% 的學生選擇選項①，這些學生可能對減法的分配律未能充分理解，且忽略先乘除後加減的算則，若減法先算需加括號，因此選擇錯誤選項①。
4. 有 12% 的學生選擇選項③，這些學生可能對加法的分配律未能充分理解，且忽略先乘除後加減的算則，若加法先算需加括號，因此選擇錯誤選項③。

(四) 學生表現說明

1. 本題是評量學生是否理解乘法對加、減法的分配律，並運用於簡化計算，約六成學生能正確運用減法分配律簡化計算。
2. 本題難易度為 0.56。有近六成的學生能理解乘法對加法的分配律，並運用於簡化計算，但仍約有四成的學生無法正確解題。從高分組與低分組學生的表現來看，約 92% 的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生則只有 21% 回答正確。低分組約八成學生對加法或減法的分配律不熟悉，且容易忽略四則運算如先乘除後加減，加或減先算需加括號等算則。

## 二、教材地位分析

### 97 課綱 (分年細目)

#### (一) 評量重點

5-a-01 能在具體情境中，理解乘法對加法的分配律，並運用於簡化計算。

#### (二) 先備的知識

4-a-02 能在四則混合計算中，應用數的運算性質。

#### (三) 延伸的知識

5-a-03 能熟練運用四則運算的性質，做整數四則混合計算。

6-a-04 能利用常用的數量關係，列出恰當的算式，進行解題，並檢驗答案的合理性。

### 十二年國教課綱 (學習內容)

#### (一) 評量重點

R-5-2 四則計算規律 (II)：乘除混合計算。「乘法對加法或減法的分配律」。將計算規律應用於簡化混合計算。熟練整數四則混合計算。

#### (二) 先備的知識

R-4-1 兩步驟問題併式：併式是代數學習的重要基礎。含四則混合計算的約定（由左往右算、先乘除後加減、括號先算）。學習逐次減項計算。

R-4-2 四則計算規律 (I)：兩步驟計算規則。加減混合計算、乘除混合計算。在四則混合計算中運用數的運算性質。

#### (三) 延伸的知識

R-6-1 數的計算規律：小學最後應認識 (1) 整數、小數、分數都是數，享有一樣的計算規律。(2) 整數乘除計算及規律，因分數運算更容易理解。(3) 逐漸體會乘法和除法的計算實為一體。併入其他教學活動。

## 三、教學建議

#### (一) 評量核心概念

利用乘法對加、減法的分配律以簡化計算過程。

#### (二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. 對於併式的過程及方式不了解：併式的目的在於簡化計算，例如「購買 7 元的夾子 18 個，購買 7 元的直尺 12 把，一共要花費多少元？」若先計算夾子價錢，再計算直尺價錢，而後加總夾子和直尺的錢之三步驟計算較為麻煩，可以先計算夾子和直尺的數量，再計算總金額之兩步驟計算較為簡便，最後更可以利用「括號先算」、「先乘除、後加減」等算則併式，舉例如下：

(1) 三步驟計算： $7 \times 18 = 126$ ， $7 \times 12 = 84$ ， $126 + 84 = 210$ 。

(2) 兩步驟計算： $18 + 12 = 30$ ， $7 \times 30 = 210$

(3) 併式計算： $7 \times (18 + 12) = 210$ ，若學生不了解這個併式過程及括號先算的意義時，就無法理解各種四則運算的算則，而只是一味的從左至右逐項運算，即  $7 \times 18 = 126$ ， $126 + 12 = 138$ 。

2.對於四則運算的規則不清楚：學生習慣由左至右進行運算，或是將看起來比較好算的部份先算，而造成計算錯誤，舉例如下：

(1) 「 $35-5\times 4=120$ 。」學生由左至右計算，因此先算  $35-5=30$ ，再算  $30\times 4$ ，因此計算錯誤。

(2) 「 $25\times 7-5=50$ 。」學生先算比較好算的  $7-5$ ，再算  $25\times 2$ ，因此計算錯誤。

3.誤以為分配律的反推算式就是結合律：因為  $8\times(3+2)=8\times 3+8\times 2$  是乘法對加法的分配律，學生誤以為  $8\times 3+8\times 2=8\times(3+2)$  就是乘法對加法的結合律，其實  $8\times 3+8\times 2=8\times(3+2)$  只是分配律的反推算式，仍然屬於分配律。

4.誤將分配律運用於除法：因為乘法對加、減法有分配律，而以為除法對加、減法也有分配律。因為乘法對加、減法有左右分配律，所以可以說乘法對加、減法的分配律成立；而除法對加減法只有右分配律，即  $(12+6)\div 3=12\div 3+6\div 3$ ，但是左分配不成立  $36\div(9+3)\neq 36\div 9+36\div 3$ ，所以除法對加、減法的分配律不成立。

### (三) 核心概念的教學重點

#### 1.理解題意後從多步驟列式過渡到併式

教師應利用多步驟問題讓學生從理解題意後有次序的一一系列式解題，待學生能熟練解決多步驟問題後再開始學習併式。教學時需同時呈現多步驟算式，再慢慢過渡到併式記錄問題。

例如：「小明口袋有 1 個 10 元硬幣和 6 個 5 元硬幣，請問小明共有多少元？」學生理解題意後多步驟解題算式可能為： $5\times 6=30$ ， $10+30=40$ ；引導學生併式為  $10+5\times 6=(\quad)$ 。

#### 2.再次澄清併式中的四則運算規約

承上第 1 點列出併式後，需運用四則運算規約求出答案，此時可討論因為乘或除是連加或連減的簡化記錄形式，因此運算位階高於加或減，所以約定「先乘除後加減」。

#### 3.應用具體情境幫助學生認識乘法對加法的分配律

乘法對加法有右分配律及左分配律，乘號在加號右邊時，例如： $(6+4)\times 5=6\times 5+4\times 5$ ，稱為乘法對加法的右分配律；乘號在加號左邊時，例如： $8\times(7+3)=8\times 7+8\times 3$ ，稱為乘法對加法的左分配律。

教師應用具體的情境讓學生理解乘法對加法的分配律為何會成立，情境題的數字可以設計成用分配律計算更容易，以產生使用分配律的需求，以下為左分配律的情境，例如：「一打鉛筆有 12 枝，小明有黃色鉛筆 8 打，小華有紅色鉛筆 2 打，兩人共有幾枝鉛筆？」引導學生發現  $12\times 8+12\times 2=(\quad)$  比較不容易計算，若能利用分配律改成  $12\times(8+2)=12\times 10=120$ ，計算較為簡便。

#### 4.應用具體情境幫助學生認識乘法對減法的分配律

乘法對減法亦有左、右分配律，乘號在減號右邊時，例如： $(8-5)\times 9=8\times 9-5\times 9$  稱為乘法對減法的右分配律；乘號在減號左邊時，「 $10\times(9-4)=10\times 9-10\times 4$ 」稱為乘法對減法的左分配律。

教師應用具體的情境讓學生理解乘法對減法的分配律為何會成立，情境題的數字可以設計成容易使用分配律進行計算，以產生使用分配律的需求，以下為左分配律的情境，例如：「一打鉛筆有 12 枝，小明有黃色鉛筆 8 打，小華有紅色鉛筆 2 打，小明比小華多幾枝鉛筆？」引導學生發現  $12\times 8-12\times 2=(\quad)$  比較不容易計算，若能利用分配律改成  $12\times(8-2)=12\times 6=72$ ，計算較為簡便。

## 5.應用四則運算規約釐清除法對加、減法無分配律

除法對加、減法僅有右分配律，無左分配律，所以除法對加、減法的分配律不成立。教師可讓學生嘗試計算「 $36 \div 9 + 36 \div 3$ 」的答案和「 $36 \div (9 + 3)$ 」是否相同，可以發現前者的答案是16，而後者是3，因此除法對於加法無分配律。

### (四) 本題教學的加強重點

1.利用具體情境幫助學生理解併式的意義：學生可能對於多步驟問題的併式過程不熟悉，因此對於分配律的算式亦不理解。因此可以透過具體情境讓學生理解算式的意義，例如：商店的掃地機器人推出促銷活動，每台特價19998元，促銷期間共賣出27台，銷售總額共是多少？

$$19998 \times 27$$

算法一

簡化計算的多步驟算式：

$$20000 \times 27 = 540000 \quad \rightarrow \text{先假設每台20000元，乘以27台}$$

$$2 \times 27 = 54 \quad \rightarrow \text{每台扣2元，乘以27台}$$

$$540000 - 54 = 539946$$

$$20000 \times 27 \quad 2 \times 27 \quad \text{把54替換為} 2 \times 27$$

把540000替換為 $20000 \times 27$

因此多步驟算式可併式為：

$$\begin{aligned} & 20000 \times 27 - 2 \times 27 \\ & = 540000 - 54 \\ & = 539946 \end{aligned}$$

$$19998 \times 27$$

算法二

簡化計算的多步驟算式：

$$19998 \times 20 = 399960 \quad \rightarrow \text{先算20台的總額}$$

$$19998 \times 7 = 139986 \quad \rightarrow \text{再算7台的總額}$$

$$399960 - 139986 = 5669946$$

$$19998 \times 20 \quad 19998 \times 7 \quad \text{把139986替換為} 19998 \times 7$$

把399960替換為 $19998 \times 20$

因此多步驟算式可併式為：

$$\begin{aligned} & 19998 \times 20 + 19998 \times 7 \\ & = 399960 + 139986 \\ & = 539946 \end{aligned}$$

透過銷售掃地機器人的情境讓學生理解從多步驟算式，以替換法逐步併式的過程，學生對抽象的併式意義才能理解。

2.應用具體情境幫助學生理解以乘法對加減法的分配律再次簡化計算的意義：承上題情境之算式與併式，可以讓學生理解乘法對加減法的分配律以簡化計算：

承上算式一：乘法對減法的分配律

$$\begin{aligned} & 19998 \times 27 \\ & = (20000 - 2) \times 27 \\ & = 20000 \times 27 - 2 \times 27 \\ & = 540000 - 54 \\ & = 539946 \end{aligned}$$

承上算式二：乘法對加法的分配律

$$\begin{aligned} & 19998 \times 27 \\ & = 19998 \times (20 + 7) \\ & = 19998 \times 20 + 19998 \times 7 \\ & = 399960 + 139986 \\ & = 539946 \end{aligned}$$

#### 四、命題建議

從本題對應能力指標「5-a-01 能在具體情境中，理解乘法對加、減法的分配律，並運用於簡化計算」可得知評量重點如下，可作為命題方向之參考：

(一) 從具體情境中理解分配律：包含情境的命題可以幫助學生進行語意轉換，便於思考與討論，除下面例題外，可參考「五、歷屆檢測題參考」之 105-107 學年度數學能力檢測命題，三題皆不需要實際計算，重點在評量學生是否能理解與應用乘法對加法的分配律。

例：龍眼一斤 240 元、小番茄一斤 260 元，媽媽買了龍眼和小番茄各 5 公斤，要付多少元？

(二) 利用分配律簡化計算：除本題及下面例題外，可參考「五、歷屆檢測題參考」之 104 學年度數學能力檢測命題，在評量學生是否能利用分配律以簡化計算。

例：下面哪個算式是正確的？

①  $1025 \times 4$

$$= (1000 + 25) \times 4$$

$$= 1000 \times 4 + 25$$

②  $1025 \times 4$

$$= (1000 + 25) \times 4$$

$$= 1000 \times 4 + 25 \times 4$$

③  $1025 \times 4$

$$= (1000 + 25) \times 4$$

$$= 1000 + (25 \times 4)$$

④  $1025 \times 4$

$$= (1000 + 25) \times (5 - 1)$$

$$= 1000 \times 5 - 25 \times 1$$

## 五、歷屆檢測試題參考

### (一) 104 學年度數學能力檢測第 18 題

下列哪一個算式的答案和「 $199 \times 98 - 97 \times 96$ 」的答案相同？

- ①  $(200 - 1) \times 98 - (100 - 3) \times 96$
- ②  $199 \times (100 - 2 + 100 - 3) \times 96$
- ③  $199 \times 1 \times 96$
- ④  $19405 \times 96$

選 項	1	2	3	4	其他	答案：1
選項率	0.77*	0.12	0.06	0.04	0.01	鑑別度：0.51 難易度：0.72
高分組	0.97	0.01	0.01	0.00	0.00	
低分組	0.46	0.27	0.14	0.11	0.01	

### (二) 105 學年度數學能力檢測第 7 題

「學校開闢三塊長方形菜園，第一塊菜園的長為 3 公尺、寬為 2 公尺；第二塊菜園的長為 3 公尺、寬為 4 公尺；第三塊菜園的長為 3 公尺、寬為 5 公尺。這三塊菜園的面積共是多少平方公尺？」下列哪一個算式能算出正確答案？

- ①  $(3 + 3 + 3) \times (2 + 4 + 5)$
- ②  $3 \times 2 + 4 + 5$
- ③  $3 \times (2 \times 4 \times 5)$
- ④  $3 \times (2 + 4 + 5)$

選 項	1	2	3	4	其他	答案：4
選項率	0.30	0.04	0.16	0.49*	0.00	鑑別度：0.53 難易度：0.5
高分組	0.18	0.01	0.04	0.77	0.00	
低分組	0.39	0.10	0.28	0.24	0.00	

(三) 106 學年度數學能力檢測第 7 題

「媽媽買了豆干 3 串、金針菇 3 包、烤玉米 3 支。媽媽共花了多少元？」下列哪一個算式能算出正確答案？

豆干	魚板	烤玉米	豬血糕	金針菇
1 串	1 串	1 支	1 串	1 包
13 元	20 元	39 元	20 元	26 元

- ①  $(13 + 26 + 39) \times 3$   
 ②  $13 + 26 + 39 \times 3$   
 ③  $(13 \times 26 \times 39) \times 3$   
 ④  $(13 + 26 + 39) \times (3 + 3 + 3)$

選 項	1	2	3	4	其他	答案：1
選項率	0.89*	0.02	0.02	0.06	0.00	鑑別度：0.23 難易度：0.87
高分組	0.98	0.00	0.00	0.01	0.00	
低分組	0.75	0.06	0.06	0.12	0.00	

(四) 107 學年度數學能力檢測第 5 題

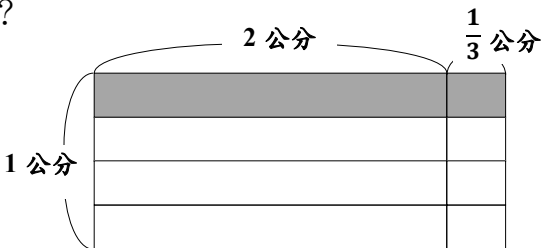
爸爸帶了一些錢去飲料店，買了珍珠奶茶與鮮奶茶各 4 杯，剩下 180 元。爸爸帶多少錢出門？下列哪個算式正確？

品項名稱	珍珠奶茶	鮮奶茶
每杯價格(元)	60	45

- ①  $60 \times 4 + 45 \times 4$   
 ②  $60 + 45 \times 4 + 180$   
 ③  $(60 + 45) \times 4$   
 ④  $(60 + 45) \times 4 + 180$

選 項	1	2	3	4	其他	答案：4
選項率	0.06	0.05	0.06	0.84*	0.00	鑑別度：0.39 難易度：0.79
高分組	0.01	0.00	0.01	0.98	0.00	
低分組	0.14	0.11	0.15	0.60	0.00	

第 26 題 5-n-08

知識向度	數與計算	認知向度	程序執行																															
對應	5-n-08 能理解分數乘法的意義，並熟練其計算，解決生活中的問題。																																	
題目	<p>下列哪個算式可以算出下圖的灰色面積？</p> <p>① <math>2 \times 1 + \frac{1}{3} \times 1</math></p> <p>② <math>2\frac{1}{3} \times 1</math></p> <p>③ <math>2 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3}</math></p> <p>④ <math>2 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}</math></p> 																																	
答題表現 選項分析	<table border="1"> <thead> <tr> <th>選 項</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> <th>其他</th> <th>答案：4</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>選項率</td> <td>0.18</td> <td>0.13</td> <td>0.20</td> <td>0.48*</td> <td>0.00</td> <td>鑑別度：0.7 難易度：0.5</td> </tr> <tr> <td>高分組</td> <td>0.05</td> <td>0.03</td> <td>0.07</td> <td>0.85</td> <td>0.00</td> <td></td> </tr> <tr> <td>低分組</td> <td>0.32</td> <td>0.26</td> <td>0.26</td> <td>0.16</td> <td>0.00</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>						選 項	1	2	3	4	其他	答案：4	選項率	0.18	0.13	0.20	0.48*	0.00	鑑別度：0.7 難易度：0.5	高分組	0.05	0.03	0.07	0.85	0.00		低分組	0.32	0.26	0.26	0.16	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：4																												
選項率	0.18	0.13	0.20	0.48*	0.00	鑑別度：0.7 難易度：0.5																												
高分組	0.05	0.03	0.07	0.85	0.00																													
低分組	0.32	0.26	0.26	0.16	0.00																													

一、試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.70，通過率為 0.48，難易度 0.50。

(二) 評量目標說明

本題以面積表徵的情境下，評量學生是否能運用長方形的面積公式結合分數概念(部分與整體的概念)來解決分數乘法問題。

(三) 選項表現說明

1. 有 48% 的學生選擇④顯示這些學生具有明確的「部分與整體」的分數概念，且知道長方形面積公式的算法，並已能熟練分數的乘法。
2. 有 20% 的學生選擇選項③，顯示這些學生能明確辨別左側灰色區域的面積長度為 2 公分，也能明確辨別此一部份的寬邊長度僅佔全部的「 $\frac{1}{4}$ 」；但是在判別右側灰色區域的寬度時發生錯誤，未能留意其寬的長度同樣佔全部寬邊長度的「 $\frac{1}{4}$ 」。
3. 有 18% 的學生選擇選項①，顯示學生依照圖示將灰色區域的面積視為獨立的 2 個部分，唯在判定寬邊的長度時，未能明確辨別灰色區域圖形的寬為「 $\frac{1}{4}$ 」。
4. 有 13% 的學生選擇選項②，顯示這些學生能明確辨別灰色區域的面積長度為「 $2 + \frac{1}{3}$ 」，唯在辨別圖形的寬邊時，未能留意或未能辨別灰色區域圖形的寬為「 $\frac{1}{4}$ 」。

#### (四) 學生表現說明

- 1.本題命題設計的選項皆是對於分數中「部分—整體」概念的理解，藉以判定灰色區域的寬邊長度，並能知道長方形的面積算法，列出正確算式。
- 2.本題的通過率為48%，顯示只有約五成的學生能正確判斷灰色區域圖形的寬邊長度僅佔全部的 $\frac{1}{4}$ ，並能以正確的算式表示所給定的情境。從高分組與低分組學生的表現來看，高分組學生答對率為85%，表示高分組學生多能理解及運用此運算規則。而低分組學生答對率卻只有16%，選擇其他選項的比率皆超過26%，顯示這些學生對於分數基本意義「部分—整體」概念未能掌握，且對於帶分數的意義亦未能有明確的心像。綜上可知低分組學生對於分數的基本概念不甚理解，教師在教學時應特別注意如何讓學生理解後進一步能熟練應用於解題。

## 二、教材地位分析

### 97 課綱 (分年細目)

#### (一) 評量重點

5-n-08 能理解分數乘法的意義，並熟練其計算，解決生活中的問題。

#### (二) 先備的知識

4-n-08 能認識真分數、假分數與帶分數，熟練假分數與帶分數的互換，並進行同分母分數的比較、加、減與整數倍的計算。

5-a-01 能在具體情境中，理解乘法對加法的分配律，並運用於簡化計算。

#### (三) 延伸的知識

5-n-09 能理解除數為整數的分數除法的意義，並解決生活中的問題。

6-n-04 能理解分數除法的意義及熟練其計算，並解決生活中的問題。

### 十二年國教課綱 (學習內容)

#### (一) 評量重點

N-5-5 **分數的乘法**：整數乘以分數、分數乘以分數的意義。知道用約分簡化乘法計算。處理乘積一定比被乘數大的錯誤類型。透過分數計算的公式，知道乘法交換律在分數也成立。

#### (二) 先備的知識

N-4-5 **同分母分數**：一般同分母分數教學（包括「真分數」、「假分數」、「帶分數」名詞引入）。假分數和帶分數之變換。同分母分數的比較、加、減與整數倍。

R-5-2 **四則計算規律 (II)**：乘除混合計算。「乘法對加法的分配律」。將計算規律應用於簡化混合計算。熟練整數四則混合計算。

#### (三) 延伸的知識

N-5-7 **分數除以整數**：分數除以整數的意義。最後將問題轉化為乘以單位分數。

N-6-3 **分數的除法**：整數除以分數、分數除以分數的意義。最後理解除以一數等於乘以其倒數之公式。

## 三、教學建議

#### (一) 評量核心概念

分數乘以分數的問題。

## (二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

### 1. 分數×整數

(1) 真分數×整數時，和擴分的算法混淆，將分子和分母同乘以整數，例如： $\frac{2}{3} \times 5 = \frac{2 \times 5}{3 \times 5} = \frac{10}{15}$ 。也有可能誤將分母乘以整數，例如：

$$\frac{2}{3} \times 5 = \frac{2}{3 \times 5} = \frac{2}{15}。$$

(2) 帶分數×整數時，只將帶分數的整數乘以倍數，例如： $1\frac{2}{3} \times 5 = 5\frac{2}{3}$ ；或只將帶分數的分子乘以倍數，例如： $1\frac{2}{3} \times 5 = 1\frac{10}{3}$ ；或誤將帶分數的整數、分子和分母全部乘以倍數，

$$\text{例如：} 1\frac{2}{3} \times 5 = 5\frac{10}{15}。$$

### 2. 整數×分數

(1) 約分錯誤，誤將整數和分子約分，例如： $12 \times \frac{4}{5} = 12^3 \times \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$ 。

(2) 受分數×分數的口訣「分子1乘以分子2，分母1乘以分母2」影響，誤將整數同乘以分母和分子，例如： $6 \times \frac{5}{7} = \frac{6 \times 5}{6 \times 7} = \frac{30}{42} = \frac{5}{7}$ ，結果計算的結果還是乘數 $\frac{5}{7}$ 。

(3) 受整數乘法經驗影響，以為「乘積一定比被乘數大」。

## (三) 核心概念的教學重點

分數乘法的一般教學程序，依序是**分數乘以整數**、**整數乘以分數**，最後是**分數乘以分數**。學生較易背誦分數乘法法則，但對分數乘法概念的理解，會有難以理解的困境。避免學生只是背公式計算，例如做分數乘以整數時，使用口訣「整數乘以分數的分子」，為了避免落於只是數字符號的操弄而已，因此教師教學要特別著重概念性的理解，學生才能做有意義的計算。

教學活動要先複習四年級已經學過得真（假）分數的整數倍、單位分數的整數倍的題型，再進入到帶分數的整數倍的題型。分數計算的教學最好在一開始可以輔以圖形表徵以幫助學生理解分數四則運算的概念。

### 1. 分數乘以整數（倍）

真（假）分數乘以整數教學，可以從三個不同的概念導入，一個是套用分數的加法概念、一個是從單位分數的觀點切入、另一個是訴諸內容物的觀點引入，舉例如下：「一包糖果有54顆，一位小朋友分得 $\frac{2}{9}$ 包，3位小朋友共分得幾包？」

(1) 以同分母分數的連加活動解題：題意是在問「3個 $\frac{2}{9}$ 是多少？」也可說成「 $\frac{2}{9}$ 的3倍是多少？」，因此， $\frac{2}{9} \times 3 = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{2+2+2}{9} = \frac{2 \times 3}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ 。

(2) 以單位分數為計數單位的方式解題： $\frac{2}{9}$ 是2個 $\frac{1}{9}$ ，「2個 $\frac{1}{9}$ 」的3倍，共是 $2 \times 3$ 個 $\frac{1}{9}$ ，6個 $\frac{1}{9}$ 是 $\frac{6}{9}$ ， $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ 。所以， $\frac{2}{9} \times 3$ （分母9、分子 $2 \times 3$ ） $= \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ 。

(3) 單位分數的內容物是整數個，訴諸內容物的解題策略：學生可以算出一個小朋友分得

$\frac{2}{9}$ 包就是 12 顆，3 個小朋友共分得 36 顆，而 36 顆是把一包平分成 9 份中的 6 份，或把一包平分成 54 份中的 36 份，而得到的結果是  $\frac{6}{9}$ 包 =  $\frac{36}{54}$ 包。在一開始接觸分數整數倍的情境提時，學生可以使用分數的原始意義和整數的乘法解題能力即可以進行解題。

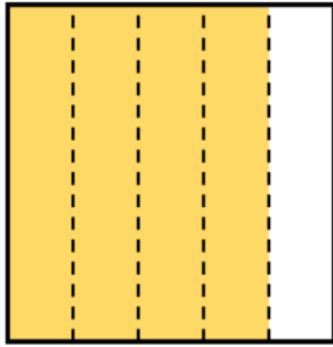
- (4) **布題討論**：教師可以布不同的情境題給學生思考，再讓學生思考討論發現計算的法則，當分數乘以整數時，用整數去乘分數的分子得到的積當作新分子，而新分母仍是原分母： $\frac{b}{a} \times c = \frac{b \times c}{a}$ 。

學生通常喜愛一看到帶分數的乘法，立即將題目中的帶分數全部轉換為假分數處理計算，但時常是將計算過程變為更複雜。計算  $9\frac{1}{5} \times 4$ ，若學生採用的解題策略是帶分數轉換成假分數再來做乘法的運算， $9\frac{1}{5} \times 4 = \frac{46}{5} \times 4 = \frac{46 \times 4}{5} = \frac{184}{5} = 36\frac{4}{5}$ ，可以清楚看見分子乘以整數（ $46 \times 4$ ）之後數字變大了，最後還要再轉為帶分數的繁雜計算，容易造成計算錯誤或計算沒有效率。為了簡便計算，如果學生直接採用分配律的概念解題，就會變得輕鬆許多，如  $9\frac{1}{5} \times 4 = 9 \times 4 + \frac{1}{5} \times 4 = 36 + \frac{4}{5} = 36\frac{4}{5}$ 。

2. **整數×分數(倍)**：這是學生第一次接觸「分數倍」，可以從整數倍的情境開始，再自然帶入不到 1 倍的「分數倍」情境，「分數倍」即是「部分整體」的概念。例如：「一盒糖果有 12 顆  $\frac{1}{4}$  盒是幾顆？」、「 $\frac{2}{4}$  盒是幾顆？」、「 $\frac{2}{4}$  盒是幾顆？」，以引導學生思考：因為不到 1 倍，所以乘積會小於被乘數。
3. **分數×分數(倍)**：同前面分數乘以整數倍問題的延伸，但是因為變成分數倍，學生的理解變得困難。教師還可以利用「面積表徵」及「線段表徵」、字面意義的方式來幫助學生理解分數×分數(倍)的概念，以引導學生發現「分母乘以分母，分子乘以分子」的算則。

#### (1) 面積表徵

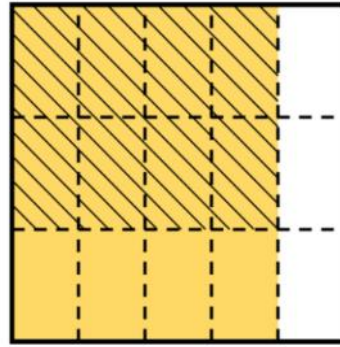
以面積的圖象表徵來幫助學生理解分數乘以分數倍的概念。例如：「一塊地有  $\frac{4}{5}$  公畝，其中的  $\frac{2}{3}$  種玉米，請問種玉米的部份是幾公畝？」若把全部長方形面積當作 1 公畝所以黃色部份面積即  $\frac{4}{5}$  公畝，如【圖 26-1】；斜線部份種玉米： $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$  公畝，如【圖 26-2】，所以種玉米的部份是  $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4 \times 2}{5 \times 3} = \frac{8}{15}$  公畝。



全部面積：1 公畝

黃色部分： $\frac{4}{5}$  公畝

【圖 26-1】

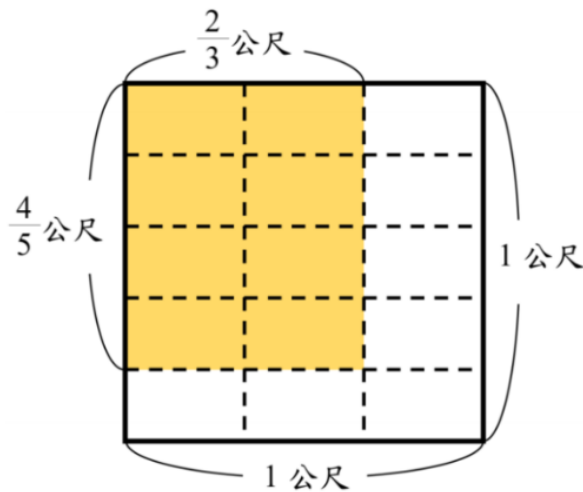


黃色部分： $\frac{4}{5}$  公畝

斜線部分種玉米： $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$  公畝

【圖 26-2】

另一種面積表徵方式是在以邊長 1 公尺，面積為 1 平方公尺的正方形土地中，取一塊邊長只有  $\frac{4}{5}$  公尺，及  $\frac{2}{3}$  公尺的長方形土地，面積是多少平方公尺？

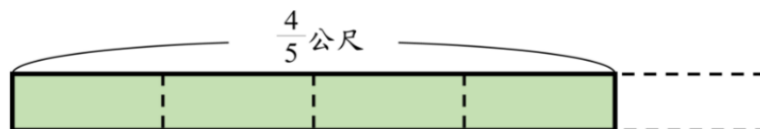


【圖 26-3】

如上【圖 26-3】，所以面積還是  $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4 \times 2}{5 \times 3} = \frac{8}{15}$  (平方公尺)。

## (2) 線段表徵

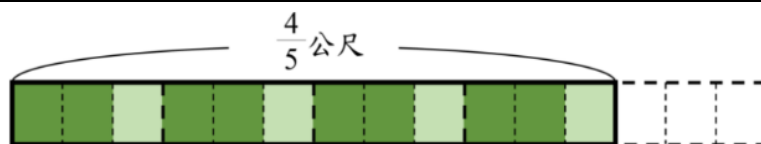
以線段的圖象表徵來幫助學生理解分數乘以分數倍的概念，例如：一條緞帶長  $\frac{4}{5}$  公尺，如【圖 26-4】，剪下其中的  $\frac{2}{3}$  做一個蝴蝶結，請問做蝴蝶結的緞帶長幾公尺？



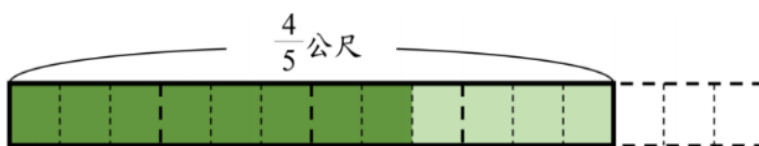
【圖 26-4】

每個  $\frac{1}{5}$  皆取其中的  $\frac{2}{3}$ ，如【圖 26-5】，則做蝴蝶的緞帶長度即為深綠色長度的總和：

$$\left(\frac{1}{5} \times \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} \times \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} \times \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} \times \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{15}。$$



【圖 26-5】



【圖 26-6】

所以【圖 26-6】深綠色部份的總長度為  $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4 \times 2}{5 \times 3} = \frac{8}{15}$  公尺。

#### (四) 本題教學的加強重點

本題主要的教學重點是透過情境內容，先澄清題意，再引導學生認識分數概念中部分與認識整體的比較。本題情境內容中，應引導學生判別灰色區域的面積與整個圖形面積的關係，例如本題中灰色部分面積的長為  $(2 + \frac{1}{3})$  公分，與整個長方形面積的長度相同，但其寬邊的長度僅占整個長方形面積寬邊長度的  $\frac{1}{4}$ ，因此無論是否將灰色區域的面積進行切割成二個常邊分別為 2 公分、 $\frac{1}{3}$  公分的長方形，其寬邊的長度與整個長方形面積的寬邊相比較，皆是全部寬邊長度的  $\frac{1}{4}$  而已。

#### 四、命題建議

本題主要在評量學生能否理解分數乘法意義，並熟練其計算，解決生活中的問題。特別是結合長方形的面積公式，以及使用圖示的方式來檢驗學生對於分數意義：「部分—整體」的觀念來做檢驗，故建議未來評量設計時，可多運用圖示的方式來輔助命題，讓學生能明確辨別分數乘法的意義，而非僅停留在「口訣式的計算」情形。

## 五、歷屆檢測試題參考

### (一) 104 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

「粉刷 1 面牆需要 2 桶油漆，媽媽想粉刷  $1\frac{1}{3}$  面牆，需要多少桶油漆？」下列哪一個算式是錯誤的？

- ①  $1\frac{1}{3} \times 2 = \frac{4}{3} \times 2$
- ②  $1\frac{1}{3} \times 2 = 1 + \frac{1}{3} \times 2$
- ③  $1\frac{1}{3} \times 2 = (1 + \frac{1}{3}) \times 2$
- ④  $1\frac{1}{3} \times 2 = 1 \times 2 + \frac{1}{3} \times 2$

選 項	1	2	3	4	其他	答案：2
選項率	0.12	0.50*	0.17	0.20	0.00	鑑別度：0.68 難易度：0.53
高分組	0.02	0.87	0.05	0.05	0.00	
低分組	0.21	0.19	0.28	0.31	0.01	

### (二) 105 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

下列哪一個算式的計算結果在  $\frac{1}{3}$  和  $\frac{4}{6}$  之間？

- ①  $\frac{4}{6} \times \frac{6}{4}$
- ②  $\frac{4}{6} \times \frac{4}{6}$
- ③  $\frac{1}{3} \times \frac{4}{6}$
- ④  $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$

選 項	1	2	3	4	其他	答案：2
選項率	0.09	0.41*	0.29	0.20	0.00	鑑別度：0.58 難易度：0.46
高分組	0.03	0.75	0.13	0.09	0.00	
低分組	0.15	0.18	0.40	0.28	0.00	

(三) 106 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

綁一個蝴蝶結要用  $4\frac{3}{7}$  公分的緞帶，全班共有 12 位小朋友，每人要綁一個蝴蝶結，老師要準備多長的緞帶？

- ①  $4\frac{36}{84}$  公分  
 ②  $9\frac{1}{7}$  公分  
 ③  $48\frac{36}{84}$  公分  
 ④  $53\frac{1}{7}$  公分

選 項	1	2	3	4	其他	答 案
選 項 率	0.08	0.08	0.29	0.53*	0.00	鑑別度：0.66 難易度：0.53
高 分 組	0.02	0.02	0.11	0.86	0.00	
低 分 組	0.17	0.18	0.46	0.19	0.00	

(四) 107 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

一瓶沙拉油是  $\frac{5}{6}$  公升，用去了  $\frac{2}{3}$  瓶後，還剩下多少公升？

- ①  $\frac{5}{18}$  公升    ②  $\frac{8}{18}$  公升    ③  $\frac{5}{9}$  公升    ④  $\frac{6}{9}$  公升

選 項	1	2	3	4	其他	答 案
選 項 率	0.32*	0.16	0.30	0.21	0.00	鑑別度：0.15 難易度：0.34
高 分 組	0.42	0.09	0.36	0.13	0.00	
低 分 組	0.27	0.25	0.27	0.22	0.00	

第 27 題 5-n-13

知識向度	數與計算	認知向度	概念理解				
對應	5-n-13 能將分數、小數標記在數線上						
題目	<p>有甲、乙兩條數線(如下圖)，下列敘述哪個正確？</p> <p>① <math>A=1.2</math></p> <p>② <math>B=2\frac{1}{4}</math></p> <p>③ <math>C=\frac{3}{6}</math></p> <p>④ <math>D=0.8</math></p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> <p>甲</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>乙</p> </div> </div>						
答題表現 選項分析	選 項	1	2	3	4	其他	答案：3
	選項率	0.25	0.15	0.52*	0.08	0.00	鑑別度：0.64 難易度：0.53
	高分組	0.07	0.05	0.85	0.03	0.00	
	低分組	0.42	0.23	0.21	0.14	0.00	

一、試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.64，通過率為 0.52，難易度 0.53。

(二) 評量目標說明

本題是檢測學生是否理解小數與分數在數線上的對應位置，學生能明確辨別各點位於數線上的等分情形，並藉以檢驗數線上標記的各個點的位置是否正確，並評量學生是否能在數線上做分數、小數的轉換與比較大小。

(三) 選項表現說明

- 有 52% 的學生選擇③，顯示這些學生能明確辨別各數線上的等分情形，並能知道各點在數線上所代表的數值，掌握分數、小數的轉換及在數線上標示位置的能力。
- 有 25% 的學生選擇選項①，這些學生認為數線上的每一格皆為 0.1，忽略了甲數線是 5 等分間距的數線，每一格的間距是 0.2。
- 有 15% 的學生選擇選項②，學生未能辨別數線甲上面 2 和 3 之間的隔線有五個，而以間隔數四條來做判定，而 B 點在 2 之後的第一條隔線上，所以將 B 點判斷為  $2\frac{1}{4}$ 。
- 有 8% 的學生選擇選項④，學生誤以為每一格皆為 0.1，且 D 在乙數線上的第 8 格，所以認為 D 是 0.8。

#### (四) 學生表現說明

- 1.本題的命題設計主要希望了解學生是否能正確辨別數線上的等分情形，並能以分數或小數的形式找出各點所代表的位值。
- 2.本題的通過率為 52%，顯示有一半的學生能明確辨別數線上的等分情形。從高分組與低分組學生的表現來看，高分組學生答對率為 85%，表示高分組學生多能了解數線上，在不同的等分情形，照出各點所代表的位值。而低分組學生答對率卻只有 21%，甚至有 42%的低分組的學生選擇選項①，顯示這些學生無法在數線上找出正確的等分情形，而低分組選擇選項③、選項④的學生合計有將近有 35%，可見仍有許多學生將等分點的個數誤認為各點所代表的位值。

## 二、教材地位分析

### 97 課綱 (分年細目)

#### (一) 評量重點

5-n-13 能將分數、小數標記在數線上。

#### (二) 先備的知識

3-n-09 能由長度測量的經驗來認識數線，標記整數值與一位小數，並在數線上做大小比較、加、減的操作。

4-n-10 能將簡單分數標記在數線上。

#### (三) 延伸的知識

7-n-08 能理解數線，數線上兩線的距離公式，及能藉數線上數的位置驗證數的大小關係。

### 十二年國教課綱 (學習內容)

#### (一) 評量重點

N-4-8 數線與分數、小數：連結分小數長度量的經驗。以標記和簡單的比較與計算，建立整數、分數、小數一體的認識。

#### (二) 先備的知識

N-3-11 整數數線：認識數線，含報讀與標示。連結數序、長度、尺的經驗，理解在數線上做比較、加、減的意義。

#### (三) 延伸的知識

N-7-5 數線：擴充至含負數的數線；比較數的大小；絕對值的意義；以  $|a-b|$  表示數線上兩點  $a$ 、 $b$  的距離。

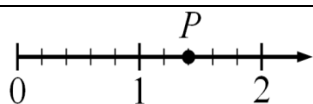
## 三、教學建議

#### (一) 評量核心概念

能將數線上的值以分數、小數正確標示。(簡單分數與一位小數)

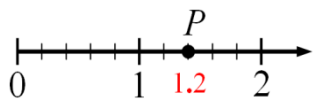
#### (二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

- 1.誤認為數線間距必為 10 等分：以為兩數之間的數線等分段數一定是 10 等分，也就是每個間距為  $\frac{1}{10}$ 、0.1，忽略以其他分數表示的等分間距數。例如【圖 27-1】中點  $P$  值應為  $1\frac{2}{5}$  或 1.4：

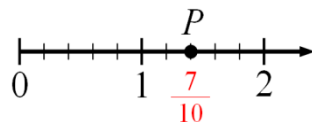


【圖 27-1】

但學生容易標示錯誤為 1.2，如【圖 27-2】；或以為全部數線平分為 10 等分，故標示為  $\frac{7}{10}$ ，如【圖 27-3】。

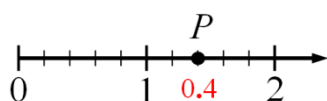


【圖 27-2】

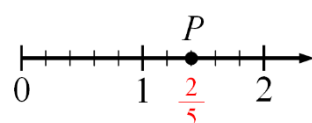


【圖 27-3】

2. 忽略數線上的參考點數值：學生在判斷數線等分段數後，在標示數值時容易只標示出分數或小數的值，因為學生習慣從 0 開始的數線，以致於忽略了帶分數或帶小數的整數值。例如【圖 27-4】中點  $P$  學生容易標示錯誤為 0.4；或  $\frac{2}{5}$ ，如【圖 27-5】。

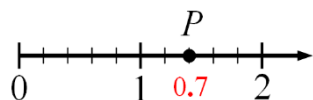


【圖 27-4】

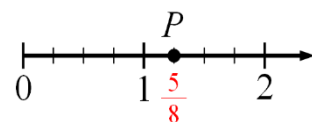


【圖 27-5】

3. 將數線全長當成 1 個單位：學生不了解數線上兩數間等距分割的意義。例如【圖 27-6】中的點  $P$ ，學生以為在第 7 格就是 0.7，故標示為 0.7；或以為全部數線平分為 8 等分，故標示為  $\frac{5}{8}$ ，如【圖 27-7】。

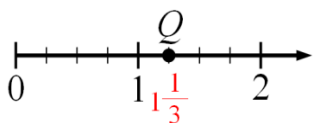


【圖 27-6】



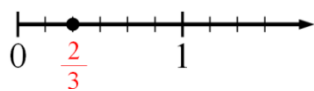
【圖 27-7】

4. 誤認為兩數之間分段處的隔線數即為間距數：學生只數兩數之間的分段隔線數，導致錯數總分段數。例如【圖 27-8】中點  $Q$  值應為  $1\frac{1}{4}$ ，學生以為 1 和 2 之間是 3 等分，所以標示為  $1\frac{1}{3}$ 。



【圖 3-8】

5. 受數線兩數之間的等分段數影響：學生因為對分數的概念不了解，所以在標示數線上的分數值容易受等分段數影響而錯誤。例如：請學生標示出  $\frac{2}{3}$  的位置，因為學生對  $\frac{2}{3}$  在數線上的意義不了解，看到分子 2 就以為要標示在第 2 格，因此只從等分段數判斷而標示在  $\frac{2}{6}$  的位置上，如【圖 27-9】。另外，學生也可能沒有注意到數線的單位長為 2，只看等分段數為 4，因此將  $\frac{1}{2}$ 、1、 $1\frac{1}{2}$  標示為  $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{2}{4}$ 、 $\frac{3}{4}$ ，如【圖 27-10】。



【圖 27-9】

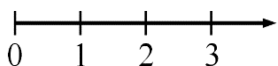


【圖 27-10】

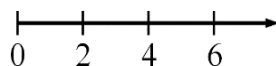
- 6.受分數或小數之數字大小影響：學生因為對分數與小數之間的對應關係不清楚，因此在判斷分小數的大小時，易受分數或小數之數字大小影響，以為數字越大的分小數值越大，數字越小的分小數值越小，如： $1.7 > 1\frac{4}{5}$ ， $1.7 = 1\frac{1}{7}$ 。

### (三) 核心概念的教學重點

- 1.數線的基本概念：數線的學習要從整數開始，小學常使用的導入情境為長尺（測量）。經由測量讓學生了解數線的基本性質，如以0為基準點（起點）、刻度上的數字代表從0開始的長度、數線具方向性(大數在右，小數在左)、單位長度從1開始，如【圖 27-11】，之後不一定為1，如【圖 27-12】數線的單位長度為2：

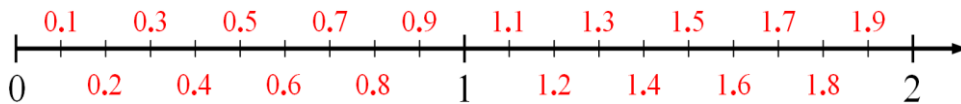


【圖 27-11】

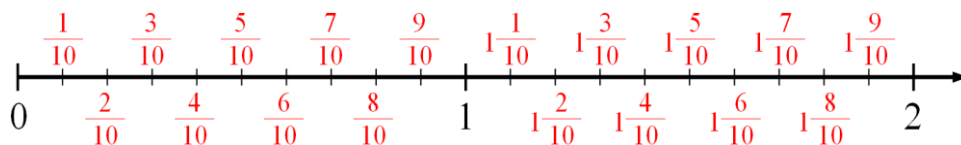


【圖 27-12】

- 2.十等分數線：小數與分數的數線的教學可以從10等分開始，讓學生實際操作10等分的分段與0.1、0.2……的小數數值標示，如【圖 27-13】；另一條數線讓學生操作10等分後則讓學生練習分數數值標示，如【圖 27-14】。這樣的操作讓學生更容易連結等值分數的概念以理解分數、小數彼此有一致的關係，之後再進行分數和小數並置在同一條數線上的教學。注意這些教學活動進行時，所有數線之單位1必須一樣長。

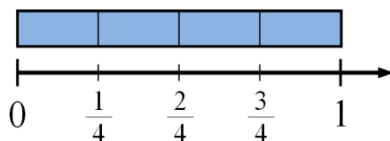


【圖 27-13】



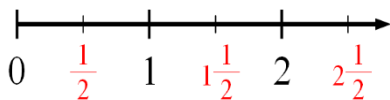
【圖 27-14】

- 3.非十等分數線：讓學生進行非10等分的間距標示。可以結合長條圖的等分練習，再連結到數線的分數標示，如【圖 27-15】。

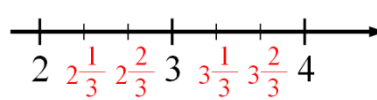


【圖 27-15】

接著練習在兩數之間進行分母5以下的等分練習與數值標示，如【圖 27-16】、【圖 27-17】。經由實際操作讓學生對於間距等分的意義能了解，且更能具備等分間距的數感。



【圖 27-16】



【圖 27-17】

### (四) 本題教學的加強重點

本題希望學生遇到「以數線形式來表示位值」的情形時，能以分數或小數的方式，正確辨別各點所代表的位值。

- 1.以本題為例，教師應先引導學生確認二條數線中不同的等分方式：甲數線為5等分、乙數線為6等分。
- 2.確認每一等分所代表的值：例如甲數線每一等分代表的值為 $\frac{1}{5}$ 或0.2，乙數線每一等分所代表的值為 $\frac{1}{6}$ 。
- 3.學生能以小數或分數的形式表示甲、乙數線中A、B、C、D點所代表的位值：A為 $1\frac{2}{5}$ 或1.4；B為 $2\frac{1}{5}$ 或2.2；C為 $\frac{3}{6}$ ；D為 $1\frac{2}{6}$ 。

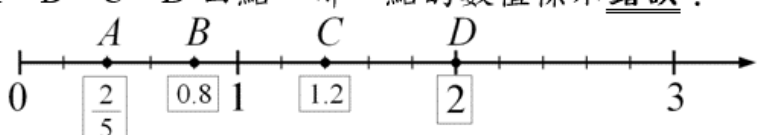
#### 四、命題建議

- (一)本題學生在作答時可能有多種解題方式，教師可採用非選題的作答方式，讓學生呈現其答題歷程，更能掌握學生對分數、小數的轉換及在數線上的標示等概念是否理解，或了解學生的迷思何在。
- (二)近幾年試題多以數線方式呈現，不同的選項放入學生容易產生的迷思，可以了解學生學習困難的地方。106學年度的數線為4等份，學生最不熟悉，因此答對率也最低。今年的試題則同時並列二條數線，且使用不同的等分方式藉以測驗學生是否真的明白各個點所代表的位值。

#### 五、歷屆檢測試題參考

##### (一) 104 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

數線上有 A、B、C、D 四點，哪一點的數值標示錯誤？

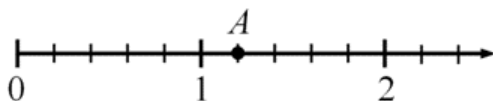


① A  
② B  
③ C  
④ D

選 項	1	2	3	4	其他	答案：3
選項率	0.14	0.29	0.53*	0.04	0.00	鑑別度：0.72 難易度：0.53
高分組	0.02	0.07	0.89	0.01	0.00	
低分組	0.30	0.42	0.18	0.09	0.01	

(二) 105 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

下面有一條數線， $A$  點的位置代表多少？

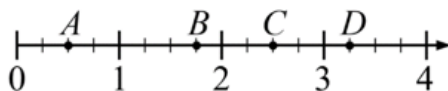


- ① 0.6
- ② 1.1
- ③  $1\frac{1}{6}$
- ④  $1\frac{1}{5}$

選 項	1	2	3	4	其他	答案：4
選項率	0.04	0.29	0.05	0.62*	0.00	鑑別度：0.61 難易度：0.62
高分組	0.01	0.06	0.01	0.92	0.00	
低分組	0.07	0.52	0.09	0.32	0.00	

(三) 106 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

在數線上有  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  四個點（如下圖）。哪一個選項是正確的？



- ①  $A=0.2$
- ②  $B=\frac{6}{8}$
- ③  $C=2.5$
- ④  $D=\frac{16}{5}$

選 項	1	2	3	4	其他	答案：3
選項率	0.30	0.17	0.38*	0.15	0.00	鑑別度：0.47 難易度：0.41
高分組	0.07	0.17	0.64	0.12	0.00	
低分組	0.54	0.15	0.17	0.14	0.00	

(四) 107 學年度新北市五年級數學能力檢測試題

已知數線上有四個點，下列哪個點的位置最接近 2？

- ① 1.7      ②  $1\frac{4}{5}$       ③ 2.1      ④  $2\frac{1}{2}$

選 項	1	2	3	4	其他	答案：3
選項率	0.06	0.14	0.71*	0.09	0.00	鑑別度：0.44 難易度：0.69
高分組	0.00	0.06	0.91	0.03	0.00	
低分組	0.15	0.21	0.47	0.17	0.00	

第 28 題 5-n-04

知識向度	數與計算	認知向度	概念理解																														
對應分年細目	5-n-04 能理解因數和倍數。																																
題目	老師從數字牌 1~50 中隨機抽出一張數字牌後，分別給三位同學看過。 A 同學說：這張牌是 2 和 3 的倍數。 B 同學說：這張牌的因數共有 6 個耶！ C 同學說：1~50 的數字牌中有 2 張牌是它的倍數。 這張牌的數字是什麼？ ① 6            ② 12            ③ 18            ④ 24																																
答題表現 選項分析	<table border="1"> <thead> <tr> <th>選 項</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> <th>其他</th> <th>答案：3</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>選項率</td> <td>0.12</td> <td>0.27</td> <td>0.33*</td> <td>0.28</td> <td>0.00</td> <td>鑑別度：0.33 難易度：0.37</td> </tr> <tr> <td>高分組</td> <td>0.02</td> <td>0.25</td> <td>0.54</td> <td>0.19</td> <td>0.00</td> <td></td> </tr> <tr> <td>低分組</td> <td>0.23</td> <td>0.27</td> <td>0.21</td> <td>0.29</td> <td>0.00</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>					選 項	1	2	3	4	其他	答案：3	選項率	0.12	0.27	0.33*	0.28	0.00	鑑別度：0.33 難易度：0.37	高分組	0.02	0.25	0.54	0.19	0.00		低分組	0.23	0.27	0.21	0.29	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：3																											
選項率	0.12	0.27	0.33*	0.28	0.00	鑑別度：0.33 難易度：0.37																											
高分組	0.02	0.25	0.54	0.19	0.00																												
低分組	0.23	0.27	0.21	0.29	0.00																												

一、試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.33，通過率為 0.33，難易度 0.37。

(二) 評量目標說明

本題為因數、倍數的變化問題，旨在評量學生在具體情境中，能否透過題目中的 ABC 三條線索逐步推敲，找到正確的數。

(三) 選項表現說明

1. 有 33% 的學生選擇正確選項③，顯示只有三成五的學生能掌握題目的線索，逐步透過因數、倍數概念思考並與選項中的答案相比對，進而找到符合題意的數。
2. 有約 28% 的學生選擇④，24 是 2 和 3 的公倍數也符合 1~50 之內的數有 24、48 兩張牌，但學生忽略 24 的因數有 1、2、3、4、6、8、12、24 共 8 個並不符合題意，顯示學生對因數的概念未能完全掌握清楚。
3. 有約 27% 的學生選擇②，12 是 2 和 3 的公倍數且有 6 個因數但學生忽略 12 在 1~50 之內的倍數有 12、24、36、48 共 4 個並不符合題意，顯示學生對倍數的概念未能完全掌握清楚。
4. 有約 12% 的學生選擇①，顯示學生知道 6 是 2 的倍數同時也是 3 的倍數，並可能將有 6 個因數想成此數是 6，未能將此答案逐一核對是否符合所有同學提供的線索。

(四) 學生表現說明

1. 本題的命題設計主要想了解學生對於因數、倍數的概念是否完全清楚。透過題目的對話線索與選項的答案逐一比對確認，找到符合條件的數。題目中 A 提供線索為此數是 2 的倍數且是 3 的倍數；B 提供線索為此數有 6 個因數；C 提供線索為此數在 1~50 以內有 2 個倍數。

本題對於學生較困難的是，同時要考慮因數、倍數這 2 個概念，逐一檢視線索才能找到正確答案。

2. 本題通過率為 0.33。顯示只有 3 成多的學生能掌握在具體情境中，透過倍數、因數的概念逐步檢視選項中的答案，找到符合題意線索的數。有近六成三的學生無法順利解題。從高分組與低分組學生的表現來看，高分組的學生也只有 53% 能正確回答問題，而低分組學生也只有 21% 回答正確，其中選項④近三成的低分組學生選擇，表示低分組的學生對於因數的概念不夠瞭解，而高分組約有 25% 的學生選擇選項②，部分原因可能是忽略 C 線索 1-50 以內有 2 個此數的倍數，未能清楚理解題意。

## 二、教材地位分析

### 97 課綱（分年細目）

#### （一）評量重點

5-n-04 能理解因數和倍數。

#### （二）先備的知識

2-n-06 能理解乘法的意義，使用 $\times$ 、 $=$ 做橫式紀錄與直式紀錄，並解決生活中的問題。

3-n-05 能理解除法的意義，運用 $\div$ 、 $=$ 做橫式紀錄（包括有餘數的情況），並解決生活中的問題。

#### （三）延伸的知識

5-n-05 能認識兩數的公因數、公倍數、最大公因數與最小公倍數。

### 十二年國教課綱（學習內容）

#### （一）評量重點

N-5-3 公因數和公倍數：因數、倍數、公因數、公倍數、最大公因數、最小公倍數的意義。

#### （二）先備的知識

N-2-6 乘法：乘法的意義與應用。在學習乘法過程，逐步發展「倍」的概念，做為統整乘法應用情境的語言。

N-3-6 解題：乘除應用問題。乘數、被乘數、除數、被除數未知之應用解題。連結乘與除的關係。(R-3-1)

#### （三）延伸的知識

N-6-1 20 以內的質數和質因數分解：小於 20 的質數與合數。2、3、5 的質因數判別法。以短除法做質因數的分解。

N-6-2 最大公因數與最小公倍數：質因數分解法與短除法。兩數互質。運用到分數的約分與通分。

## 三、教學建議

#### （一）評量核心概念

能求算因數與倍數。

#### （二）學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. 專有名詞意義不清楚或概念混淆：「整除與被整除」的意義和「因數與倍數」有何關係並不清楚；以因數的定義來說，對於「甲數能整除乙數」或「甲數能被乙數整除」的敘述中，誰

除以誰，哪個是因數或哪個是倍數，分不清楚；因數與倍數是兩個互逆的概念，若甲是乙的因數，乙則是甲的倍數，學生難以理解甲、乙兩數之間的關係。

- 2.認為數字大小與因數個數有關：學生容易誤以為數字愈大，因數個數愈多。例如：「判斷49和12誰的因數個數比較多？」學生容易因為 $49 > 12$ ，得到49的因數個數比較多。
- 3.找因數容易遺漏：當數字較大又有很多因數時，會沒有耐心逐一尋找而會有遺漏，同時除法的計算能力不好也會受影響。例如：找出72的因數，會因為72數字比較大且因數比較多，容易遺漏幾個因數；另一種是出現49屬於比較刁鑽的數字，容易遺漏7這個因數。
- 4.判別因數、倍數關係混淆：混用其他倍數的判別法去判斷因數、倍數關係。例如：無法判別「4的倍數」與「尾數是4的數的倍數」。

### (三) 核心概念教學重點

#### 1. 因數問題：幫助學生建立因數的概念，可以有以下教學布題：

- (1) 在長方形排列問題中，探討給定總量的長方形的可能排法：例如先給定一個總量（以6個和12個全等的小正方塊為例），要求學童將小正方塊排成長方形（不可排成中空），窮盡所有的排法，讓學童經驗給定總量長方形可以有不同的排法。

布題一：「6個全等的小正方塊，可以排列成怎樣的長方形？」每排出一種長方形，就請學生將排法用乘法紀錄下來。可以排列成 $1 \times 6$ 、 $2 \times 3$ 、 $3 \times 2$ 、 $6 \times 1$ ，共4種。

布題二：「12個全等的小正方塊，可以排出怎樣的長方形？」可以排列成 $1 \times 12$ 、 $2 \times 6$ 、 $3 \times 4$ 、 $4 \times 3$ 、 $6 \times 2$ 、 $12 \times 1$ ，共6種。

教師宣告：排列長方形邊上方塊的個數：「1、2、3、6」是6的「因數」，和「1、2、3、4、6、12」是12的「因數」。

- (2) 在等分除的情境中，給定總量要求學童回答可能的等分組方式，幫助學童掌握總量可以由哪些單位量組成的意義。

例如：透過問題「有18位小朋友，全部分組玩遊戲，每組的人數要一樣多，一組可以有多少位小朋友，分分看？」請學童使用除法算式紀錄解題過程。

$$18 \div \boxed{1} = \boxed{18}$$

$$18 \div \boxed{2} = \boxed{9}$$

$$18 \div \boxed{3} = \boxed{6}$$

$$18 \div \boxed{6} = \boxed{3}$$

$$18 \div \boxed{9} = \boxed{2}$$

$$18 \div \boxed{18} = \boxed{1}$$

透過詢問「18除以2，全部分完且沒有剩下，所以2是18的因數」，引入因數的意義。帶領學生探討18的因數有哪些時，將18當成被除數，依序除以1、2、3、...、18，發現其中1、2、3、6、9、18皆可以被18整除，所以1、2、3、6、9、18都是18的因數。

教師多舉例類似情境題讓學生解題，從學生找因數記錄下來的除法算式中，帶領學生發現「 $m \div a = b$ 」和「 $m \div b = a$ 」兩個除法算式的記錄皆可以找到 $a$ 和 $b$ 兩個因數，因此，在列出除法算式紀錄解題的過程，我們可省略「 $m \div b = a$ 」這個除法算式。

#### 2. 倍數問題

現階段的學生有比較多倍的問題的解題經驗，經常使用倍的語言，因此，透過乘法未知

的乘法算式填充題「 $2 \times (\quad) = 10$ 」，這條式子的含意是 2 的 5 倍是 10，所以 10 是 2 的 5 倍，引入倍數的意義：「10 是 2 的 5 倍，所以 10 是 2 的倍數」。學生有能力求出某數的倍數，例如我們要探討 5 的倍數，即可用乘以正整數的方式引導學生算出 5 的 1 倍、2 倍、3 倍……，依序為 5、10、15……，而這些數即為 5 的倍數。

另外，在學過除法之後，老師們同樣可帶領學生以除法觀點來探討倍數的觀念，因為「被除數 $\div$ 除數=商」，所以在驗算的過程：被除數=商 $\times$ 除數，因此，我們可以帶領學生探討：被除數也是商和除數的倍數。例如我們將  $18 \div 3 = 6$  的除法算式進行驗算，即可發現  $18 = 3 \times 6$ ，其中 18 也是 3 和 6 的倍數。

要解決這些困難與迷思，國內學者研究後提出建議：教學前，宜讓學生建立乘除法的意義並熟練乘除計算技能；教學時，宜設計富有生活化、情境化的情境（謝哲仁&林榮貴（2006）。國小可操作視覺化之數學因數與倍數單元電腦活動輔助學習設計之研究。《理工研究學報》，40（1），23-45。），引導學生正確瞭解題意，以簡單明確的文字來定義因倍數，且讓學生有操作具體物聯結因數與倍數意義的機會，及教導學童運算的技巧以協助演算與意義的連結（黃國勳&劉祥通（2003）。五年級學童學習因數教材困難之探討。《科學教育研究與發展》。季刊，30、52-70）。

#### （四）本題教學重點

##### 1. 透過題目線索連結數字與因倍數之間的關係

線索 A：「這張牌是 2 和 3 的倍數」。此句話代表這個數同時是 2 和 3 的倍數，透過列舉法：

2 的倍數：	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3 的倍數：		3	6	9		12		15	18

可以讓學生觀察發現此數一定是 6 的倍數。

線索 B：「這張牌的因數共有 6 個耶！」表示這個數的因數只有 6 個。部分學生會混淆 6 的倍數與有 6 個因數，誤認為此數是 6，此時老師應列出 6 的因數有 1、2、3、6 這四個因數，6 的倍數透過列舉，則可發現 6 的倍數有無限多個。

線索 C：「1~50 的數字牌中有 2 張牌是它的倍數。」代表這個數的 1 倍和 2 倍小於或等於 50，但這個線索轉化成倍的語言對於孩子是有困難，此時教師可以列出數字 1~50：

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

詢問學生，根據這句話可以找出幾個此數的倍數，連結此數的 1 倍與 2 倍是在 1~50 中可以找到的。

教師澄清題意中的 3 個線索，連結背後提供的因數及倍數概念，讓學生從中得知，此數一定是 6 的倍數，它的 1 倍、2 倍小於等於 50，以及有 6 個因數。

##### 2. 強調情境轉換與因數倍數解題技巧的應用

將問題情境提供的 3 個線索

（1）此數是 6 的倍數

(2) 此數的因數有 6 個

(3) 此數的 1 倍、2 倍小於或等於 50

本題的解題技巧是學生根據這 3 個線索發現：第 1 個線索無法刪去選項中的任何 1 個答案，再引導學生發現第 2 個線索與第 3 個線索中，第 3 個線索 50 以內此數的 1 倍、2 倍比較好處理，因為可利用乘法解決問題，符合此線索的數只剩選項中的 18 與 24，再利用只有 6 個因數的線索，透過乘法方式或除法，找出 18 的因數有 1、2、3、6、9、18，此數就是 18，而選項 24 的因數有 1、2、3、4、6、8、12、24 共 8 個因數，可在檢查時有時間再去驗証，以節省作答時間。

#### 四、命題建議

本題是第一次檢測卷將因數、倍數混合一起考，所以學生必須逐一根據題目的線索，推敲找到完全符合題目條件的數，與課本習作只考單一因數、倍數概念的題目不同，對於這樣的思考過程是困難的，如果要降低困難度提升鑑別度，可採下列方式：

(一) 全部改成只提供倍數的線索，只考倍數的概念

將題目中的 A 同學說：這張牌是 2 的倍數。

將題目中的 B 同學說：這張牌是 3 的倍數。

將題目中的 C 同學說：1~50 數字牌，只有 2 張是它的倍數。

選項① 6 ② 12 ③ 18 ④ 30

(二) 全部改成只提供因數的線索，只考因數的概念

將題目中的 A 同學說：此數的因數有 9。

將題目中的 B 同學說：此數能整除 36。

將題目中的 C 同學說：1~50 數字牌，只有 6 張是它的因數。

選項① 6 ② 9 ③ 18 ④ 36

(三) 可以將本題改成半開性的非選試題問學生，你是怎麼知道並推敲出答案的，這樣才可以清楚知道學生是因數概念不好還是倍數概念出現了問題，教師再根據學生的迷思概念去做補救教學。

## 五、歷屆檢測試題參考

### (一) 104 學年度數學能力檢測第 3 題

有一個在 100~200 之間的三位數，個位數字是 8，這個三位數一定是下列哪一個數的倍數？

- ① 8
- ② 6
- ③ 4
- ④ 2

選 項	1	2	3	4	其他	答案：4
選項率	0.16	0.10	0.13	0.61*	0.01	鑑別度：0.61 難易度：0.61
高分組	0.04	0.02	0.02	0.91	0.00	
低分組	0.24	0.19	0.26	0.30	0.01	

### (二) 106 學年度數學能力檢測第 13 題

有一群學生人數未滿 50 人，要進行分組，如果 4 人一組、9 人一組，都剛好分完。還可以用幾個人一組的方式，也剛好分完？

- ① 5 人一組
- ② 6 人一組
- ③ 7 人一組
- ④ 8 人一組

選 項	1	2	3	4	其他	答案：2
選項率	0.22	0.62*	0.08	0.06	0.00	鑑別度：0.61 難易度：0.6
高分組	0.05	0.92	0.02	0.01	0.00	
低分組	0.42	0.28	0.17	0.13	0.00	

(三) 107 年度數學能力檢測第 7 題

下列有關因數與倍數的敘述哪個正確？

- ① 7 是 35 的因數    ② 5 是 35 的公因數  
③ 5 是 35 的倍數    ④ 35 是 7 的公倍數

選 項	1	2	3	4	其他	答案：1
選項率	0.57*	0.10	0.16	0.17	0.00	鑑別度：0.66 難易度：0.57
高分組	0.90	0.02	0.03	0.05	0.00	
低分組	0.25	0.19	0.30	0.26	0.00	