



國小數學疑難問題之有效教學策略

國小數學疑難問題 之有效教學策略



新北市國教輔導團國小數學輔導小組 出版

新北市國教輔導團
國小數學輔導小組 出版

目錄

編者的話	1
教學疑難與有效策略之研發/鍾靜教授	3
疑難問題之有效教學策略案例	
【低年級】	
一年級-幾何-辨認平面圖形的迷思概念/李筱珊	7
一/二年級-數與量-基準量未知的比較型加減問題/詹婉華	11
二年級-數與量-乘法算式中單位量與單位數的意義/詹婉華	15
二年級-數與量-測量長度起始點不在刻度 0 上的測量問題/鄭惠娟	17
二年級-數與量-報讀月曆跨月的日期點數問題/李廣祺	21
【中年級】	
三年級-數與量-除法算式中除數、商及餘數之間的關係/胡錦芳	27
三年級-數與量-角的大小比較時常見迷思或錯誤概念/江珮瑤	29
三/四年級-數與量-時間(包含日期與時刻)加減跨日的計算問題/王麗如	33
四年級-代數-引入括號進行二步驟教學的併式記錄/馬恬舒	37
四年級-數與量-除數為二位數的估商教學/馬恬舒	41
四年級-幾何-周長與面積概念的混淆/李佳容	45
【高年級】	
五年級-數與量-小數的乘法直式算則中小數點的意義/林心怡	51
五年級-數與量-分數倍的意義/溫世展	55
五年級-數與量-積會愈乘愈大的迷思/周恒奇	57
五年級-幾何-找三角形的高/吳偉全	61
五年級-代數-連除兩數相當於除以此兩數之積/溫世展	65
六年級-數與量-小數的除法直式算則(含餘數)中小數點的意義/林心怡	67

編者的話

新北市國教輔導團國小數學領域輔導小組在 105 學年度申辦數學有效學習工作坊，依據新北市五年級學生數學能力檢測分析結果，針對學生在數學學習上表現不佳的學習內容，研發補救教學線上教學影片，提供教師教學應用，讓具有迷思概念或產生錯誤類型的學生觀看影片學習。教師進行個別指導，可與學生討論影片作答內容，協助釐清學生的數學概念，進行補救教學，學生亦可在家進行自學。

團員實際到教學現場進行教學輔導時，低、中、高年級學生常在某些概念上產生學習困難，亟需教師針對這些概念進行教學澄清、幫助學生理解，現場教師需要針對教學疑難問題應用更具體有效的教學策略。因此，本團從 105 年度起開始整理現場教學疑難問題，並於 106 學年度申請「亮點基地計畫」，邀請鍾靜教授針對這些數學概念及有效教學策略進行指導，歷經兩年多，最後彙整本專書《國小數學疑難問題之有效教學策略》，做為本團未來進行教學輔導或辦理相關研習，提供現場教師在教學上更有效的策略參考。

本書共收錄了低、中、高年級共 17 個教學案例，是本團整理現場教學疑難問題的第一冊，目前尚有其他案例的教學疑難問題教學策略仍在討論研發中。期未來能透過教學輔導與現場教師共同提出現場實際的教學疑難問題，討論出更有效的教學策略，增進數學課堂教學效能，提升學生學習成效！

教學疑難與有效策略之研發

國小老師在數學教學現場常有一些教學疑難，研習活動遇到輔導員就會請益；這些教學疑難問題重複性很高，有必要彙整並提供解決策略。早年，我擔任教育部數學領域央團召集人時，曾帶領央團教師先行研發案例，再號召各縣市國中、小輔導員分主題來撰寫，共集結 55 個案例，出版了《數學教學疑難問題與解決策略 I、II》專書。現在，新北市國小數學輔導團團長和團員也深具同感，欲將在輔導過程中經常碰到的教學問題，進行深入分析和探討；輔導員藉此過程專業成長外，也可協助或提升教師的數學教學知能。

數學教學疑難問題常因學生學習困難之處、學生有的迷思概念、教材或教學安排不當…等引起，要解決這些問題不是參照教科書，把相關教材以濃縮的方式撰寫呈現；現場教師看了只會覺得「我也是這樣教」、「這些我都教了」，而且教學時間有限，不可能從頭到尾依教材脈絡再教一次，再教一次也未必有效果。還有，很多相關的教學疑難問題，有其共同特性或核心概念；若是一例一個處理方式，沒讓老師了解關鍵教學部分，恐怕也無法劍及履及，學生學到的概念不能學習遷移。所以，當我發現在研發第一階段討論後，輔導員寫出來的案例就有上述二種狀態；我毅然要求重寫，第二階段要針對教學疑難問題寫出有效教學策略，它必須擺脫以多單元教材脈絡，及相關個例個別處理的冗長寫法。配合教學現場的需求和實務，這些案例最好 20~25 分鐘能教完，最多不能超過一節課 40 分鐘；期盼能以簡潔、有效、可行的教學策略，來協助現場老師解決教學疑難。

專書《國小數學疑難問題之有效教學策略》的研發從 105 學年度起，透過三次團內會議針對國小學生的數學學習困難提出討論，共同擬定現場最常見的教學疑難問題，初步依據低、中、高年段整理。106 學年度起申請「亮點基地計畫」數學教學 Q & A-國小數學教學疑難問題與解決策略，邀請筆者針對這些案例的數學概念以及教學策略進行指導；從 106 學年度至 107 學年度間經歷兩個階段撰寫，總共安排了 12 次的工作坊，從全體逐案討論學生的錯誤概念，並提供教學建議及敘寫方向，再到分年段小組對撰寫內容進行反覆討論和修正，最後經由全體共同檢視和確認修改後較佳的案例。透過本專書彙編的 17 個案例，團員們本身除了在數學教學知能上精進外，也能到各校進行教學輔導時，提供現場老師這些疑難問題案例，協助數學教學上更有效的參考。

國立台北教育大學數學暨資訊教育學系退休教授

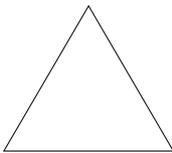
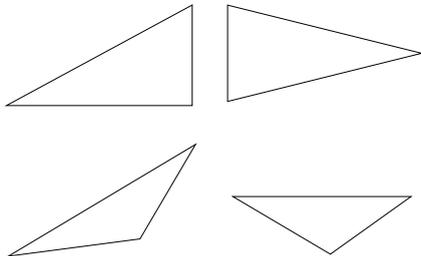
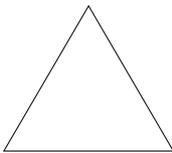
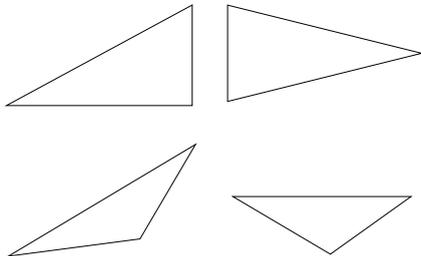
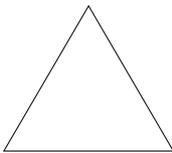
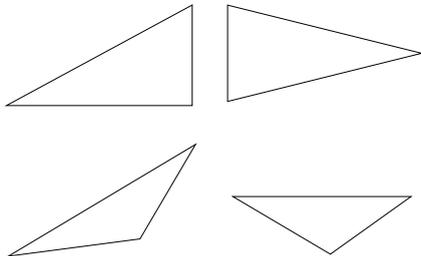
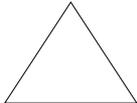
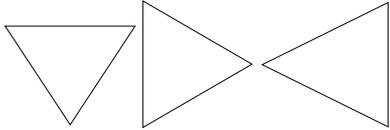
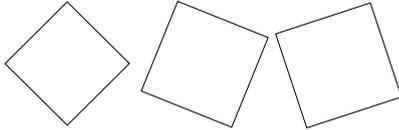
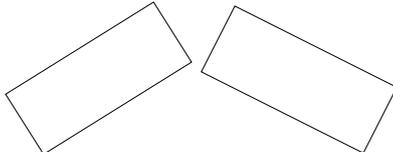
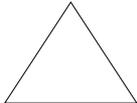
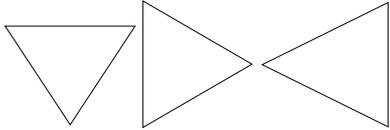
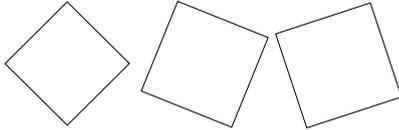
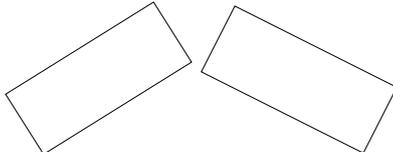
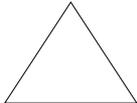
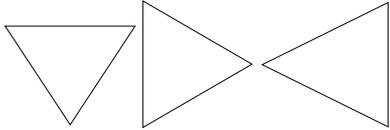
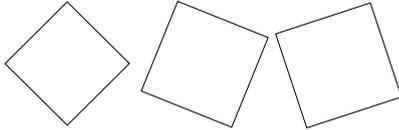
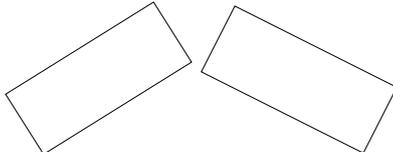
鍾 靜

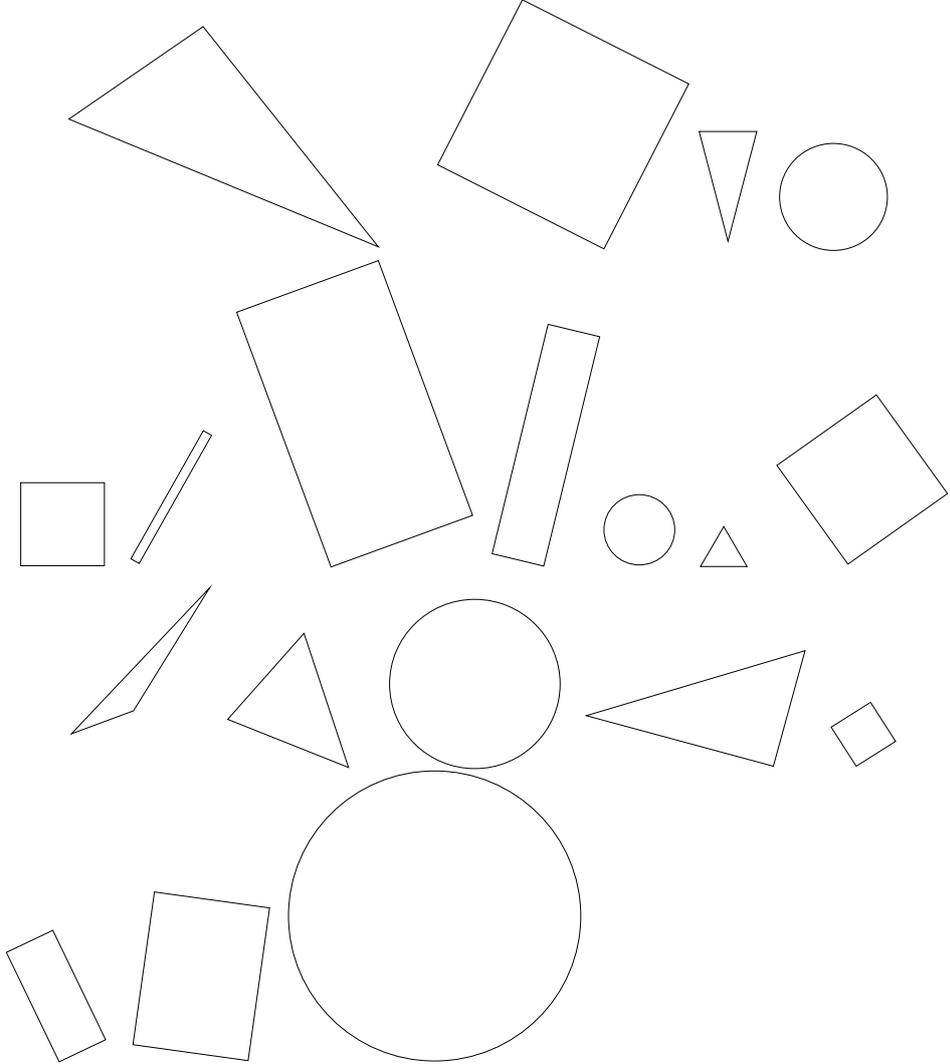
國小數學疑難問題 之有效教學策略

低年級



新北市國小教學問題分析與教學策略

主題	<input checked="" type="checkbox"/> 數與量 <input type="checkbox"/> 幾何 <input type="checkbox"/> 代數 <input type="checkbox"/> 統計與機率													
教學年級	一年級													
提供者	李筱珊	服務學校	昌平國小											
社群成員	新北市國小數學輔導團													
教學問題	學生在辨認平面圖形概念時，容易受到邊長變化及旋轉變化而產生迷思。													
問題分析	<p>一、學生在辨認平面圖形概念時，容易受到邊長變化而產生迷思，誤以為僅有和教科書舉例之形狀長相類似才是此形狀，長相不類似的則認為非屬該圖形(如下表)：</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th style="width: 10%;"></th> <th style="width: 45%;">教科書常見標準圖例</th> <th style="width: 45%;">學生易迷思辨識不出的圖例</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="writing-mode: vertical-rl;">三角形</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="writing-mode: vertical-rl;">長方形</td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>				教科書常見標準圖例	學生易迷思辨識不出的圖例	三角形			長方形				
		教科書常見標準圖例	學生易迷思辨識不出的圖例											
	三角形													
	長方形													
<p>二、學生在辨認平面圖形概念時，容易受到圖形旋轉變化而產生迷思，誤以為僅有擺放為正的三角形才是三角形，擺放為正的正方形才是正方形，擺放為正的長方形才是長方形(如下表)：</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th style="width: 10%;"></th> <th style="width: 45%;">教科書常見標準圖例</th> <th style="width: 45%;">學生易迷思辨識不出的圖例</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="writing-mode: vertical-rl;">三角形</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="writing-mode: vertical-rl;">正方形</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="writing-mode: vertical-rl;">長方形</td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>				教科書常見標準圖例	學生易迷思辨識不出的圖例	三角形			正方形			長方形		
	教科書常見標準圖例	學生易迷思辨識不出的圖例												
三角形														
正方形														
長方形														

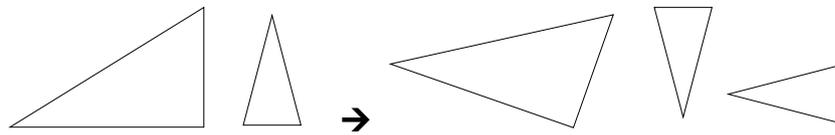
<p>相關 能力指標</p>	<p>97 課綱(分年細目)： 1-s-02 能辨認、描述與分類簡單平面圖形與立體形體。</p> <p>十二年國教課綱(學習內容)： S-1-2 形體的操作：以操作活動為主。描繪、複製、拼貼、堆疊。</p>
<p>教學策略</p>	<p>欲幫助學生在辨認平面圖形概念時，減少受邊長變化、旋轉變化以及視覺混淆而產生迷思，宜從「分類操作活動」加強學生認識圖形的概念。教師提供學生進行分類活動的圖例應考量以下兩個面向：</p> <p>一、提供「多元例」圖形讓學生進行分類活動</p> <p>教師應事前準備多元的圖形，每一類大約 4 至 6 個。三角形應包含邊(等邊、不等邊)、角(鈍角、銳角、直角)與面積(大、小)不同之三角形；正方形應包含大、小不同之正方形；長方形應包含胖、瘦，且有大有小之長方形；圓形應包含大、小不同之圓形。於學生分類活動時，引導並幫助學生建立基本圖形的多元心象，消除學生對於圖卡特徵的刻板印象。例如：</p> 

二、透過擺放時的旋轉變化來呈現圖形

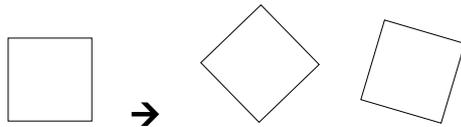
提供多元例讓學生進行分類活動後，將已分類的圖形展示於黑板上，其中「三角形、正方形與長方形」展示時，教師應注意擺放時要以不同的旋轉方式呈現平面圖形，已減少學生因視覺混淆(僅有和教科書舉例之形狀長相類似才是此形狀)而產生迷思。

例如：

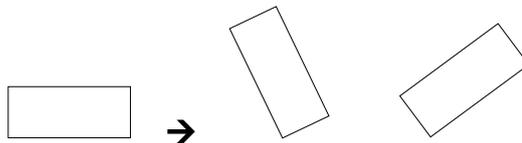
(一) 三角形



(二) 正方形



(三) 長方形



(備註：若學生未能辨認擺放位置不同的正方形，則由教師以動態方式表徵正方形：用  先確認學生已理解它是正方形，接著將擺正的正方形旋轉一個小角度 ，再問學生此圖形是什麼形？讓學生能了解  是由原本擺正的正方形旋轉而來的。最後再轉大一點的角度，最後呈現 ，讓學生了解此圖形旋轉後仍是原本擺正的正方形。)

新北市國小教學問題分析與教學策略

主題	<input checked="" type="checkbox"/> 數與量 <input type="checkbox"/> 幾何 <input type="checkbox"/> 代數 <input type="checkbox"/> 統計與機率		
教學年級	低年級		
提供者	詹婉華	服務學校	中正國小
社群成員	新北市國小數學輔導團		
教學問題	學生對於基準量未知的比較型問題，常常受到問題中「多」、「少」敘述影響，無法正確解題		
問題分析	<p>低年級的比較型問題可分為基準量未知、比較量未知及差量為之三類，對學生而言，基準量未知的題型最難。</p> <p>對於差量未知及比較量未知的題型，學生可用直接用減法解題，而面對基準量未知的題型，學生必須了解比較量和基準量的關係，當比較量比基準量多時，需運用減法解題，當比較量比基準量少時，需運用加法解題。</p> <p>當學生不清楚問題中基準量與比較量的關係，往往會以題目中的「多」、「少」進行解題，看到「多」認為要用加法，看到「少」認為要用減法。</p> <p>一、基準量未知，題目中文字描述為「少」，但須用加法解題者學生錯誤類型（例1）： 「紅茶有 5 瓶，紅茶比綠茶少 3 瓶，綠茶有幾瓶？」的問題，學生會受到題目中「少」的影響，而用 $5-3=2$，回答綠茶有 2 瓶。</p> <p>二、基準量未知，題目中文字描述為「多」，但須用減法解題者學生錯誤類型（例2）： 「綠茶有 5 瓶，綠茶比紅茶多 3 瓶，紅茶有幾瓶？」的問題，學生會受到題目中「多」的影響，而用 $5+3=8$，回答紅茶有 8 瓶。</p>		
相關能力指標	<p>97 課綱(分年細目)： 1-n-04 能從合成、分解的活動中，理解加減法的意義，使用 +、-、= 做橫式紀錄與直式紀錄，並解決生活中的問題。</p> <p>十二年國教課綱(學習內容)： N-2-3 解題：加減應用問題。加數、被加數、減數、被減數未知之應用解題。連結加與減的關係。(R-2-4)</p>		
教學策略	<p>一、利用圖示理解題意中「甲比乙多」、「甲比乙少」的意義</p> <p>(一)利用圖示解決「差量未知」的比較型問題</p> <p>1. 「甲比乙多」的文字題</p> <p>(1)「桌上有紅茶 5 瓶，綠茶 3 瓶，紅茶比綠茶多幾瓶？」</p> <p>(2)用○畫出紅茶與綠茶的瓶數，進行紅茶瓶數與綠茶瓶數的一一對應，知道拿走 2 瓶紅茶，紅茶和綠茶就會一樣多。</p>		

2. 「甲比乙少」的文字題

- (1) 「桌上有 8 瓶綠茶，綠茶比紅茶少 3 瓶，紅茶有幾瓶？」
- (2) 先畫○代表 8 瓶綠茶，綠茶比紅茶少，也就是紅茶比較多，畫出紅茶多的瓶數，找出紅茶的數量。

綠茶 ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ () () ()

(3) 以加法算式解題。 $8+3=11$ 紅茶 11 瓶

二、應用「語意轉換」簡化題意幫助解題

(一) 以「差量未知」的比較型問題，讓學生了解「甲比乙多」就是「乙比甲少」，「甲比乙少」就是「乙比甲多」，並進行解題

1. 先布「甲比乙多」的文字題，再布「乙比甲少」的文字題

- (1) 「桌上有紅茶 5 瓶、綠茶 3 瓶，紅茶比綠茶多幾瓶？」
- (2) 理解紅茶比較多，以減法解題。
 $5-3=2$ 綠茶比紅茶少 2 瓶
- (3) 「桌上有紅茶 5 瓶，綠茶 3 瓶，綠茶比紅茶少幾瓶？」
- (4) 協助學生將「綠茶比紅茶少幾瓶」轉換為「紅茶比綠茶多幾瓶」。
- (5) 理解紅茶比較多，運用減法解題。
 $5-3=2$ 紅茶比綠茶多 2 瓶

2. 以不同的文字題，確認學生能進行差量未知的「甲比乙少」就是「乙比甲多」的語意轉換。

(二) 運用語意轉換解決「基準量未知」的比較型問題

1. 先布「甲比乙多」的比較量未知文字題，再布「乙比甲少」的基準量未知文字題

- (1) 「桌上有 8 瓶綠茶，紅茶比綠茶多 5 瓶，紅茶有幾瓶？」
- (2) 理解題意，知道綠茶的瓶數及紅茶比較多，以加法算式解題。
 $8+5=13$ 紅茶有 13 瓶
- (3) 「桌上有 8 瓶綠茶，綠茶比紅茶少 5 瓶，紅茶有幾瓶？」
- (4) 協助學生做「乙比甲少」就是「甲比乙多」的語意轉換。
「綠茶比紅茶少 5 瓶」就是「紅茶比綠茶多 5 瓶」
- (5) 運用加法解題。 $8+5=13$ 紅茶有 13 瓶

2. 先布「甲比乙少」的比較量未知文字題，再布「乙比甲多」的基準量未知文字題

- (1) 「桌上有 10 瓶綠茶，紅茶比綠茶少 6 瓶，紅茶有幾瓶？」
- (2) 理解題意，知道綠茶的瓶數及綠茶比較多，以減法算式解題。
 $10-6=4$ 紅茶有 4 瓶
- (3) 「桌上有 10 瓶綠茶，綠茶比紅茶多 6 瓶，紅茶有幾瓶？」
- (4) 協助學生做「乙比甲多」就是「甲比乙少」的語意轉換。
「綠茶比紅茶多 6 瓶」就是「紅茶比綠茶少 6 瓶」
- (5) 運用減法解題。 $10-6=4$ 紅茶有 4 瓶

新北市國小教學問題分析與教學策略

主題	<input checked="" type="checkbox"/> 數與量 <input type="checkbox"/> 幾何 <input type="checkbox"/> 代數 <input type="checkbox"/> 統計與機率		
教學年級	二年級		
提供者	詹婉華	服務學校	中正國小
社群成員	新北市國小數學輔導團		
教學問題	學生在學習乘法時，常常弄不清楚單位量與單位數，而寫出「單位數×單位量」的算式。		
問題分析	<p>學生在學習乘法時，常對「幾有幾個」、「幾的幾倍」和「乘法算式」之間的關係感到混淆，若學生不理解乘法的意義，未正確建立「倍」的概念時，在文字題解題時會忽略「單位量」、「單位數」的意義，寫出「單位數×單位量」的算式。</p> <p>學生錯誤類型(例)： 題目：桌上有 4 包糖果，每一包糖果都是 3 顆，桌上總共有幾顆糖果？ 學生容易以題目數字出現的順序，將「乘數」(4 包)及「被乘數」(4 顆)的位置混淆，寫出 $4 \times 3 = 12$ 的算式，忽略應先以一包糖果有 3 顆，以 3 為單位量計數 3 有 4 個，列出 3×4 的算式。</p>		
相關能力指標	97 課綱(分年細目)： 2-n-06 能理解乘法的意義，使用 \times 、 $=$ 做橫式紀錄與直式紀錄，並解決生活中的問題 十二年國教課綱(學習內容)： N-2-6 乘法：乘法的意義與應用。在學習乘法過程，逐步發展「倍」的概念，做為統整乘法應用情境的語言。		
教學策略	<p>學生學習乘法前，應有以 2、5、10 為單位進行幾個一數的活動並能用連加來紀錄。</p> <p>一、透過語意轉換建立「幾的幾倍」的概念</p> <p>1. 運用花片和連加讓學生「幾個幾」、「幾有幾個」連結「幾的幾倍」</p> <p>(1) 熟悉「幾個幾」 如：2 個花片一數，數了 4 次，有 1 個 2、2 個 2、3 個 2、4 個 2 加法紀錄 $2+2+2+2$ 4 個 2</p> <p>(2) 「幾個幾」轉換為「幾有幾個」並建立「幾的幾倍」的語言 從「1 個 2」就是「2 有 1 個」，也可以說是「2 的 1 倍」到「4 個 2」就是「2 有 4 個」，也可以說是「2 的 4 倍」。</p> <p>(3) 熟悉幾多一個就是幾多一倍 配合花片和加法算式紀錄。2 有 4 個再多 1 個，就是 2 有 5 個，是 2 的 5 倍。 $2+2+2+2+2$ 從「2 有 5 個再多 1 個，就是 2 有 6 個，是 2 的 6 倍」…… 「2 有 9 個再多 1 個，就是 2 有 10 個，是 2 的 10 倍」。</p>		

(4)進行以3個花片、4個花片為計數單位的「幾有幾個」及「幾的幾倍」活動。

2.從「幾的幾倍」轉換為乘法紀錄，理解乘法的意義

(1)可以利用加法算式讓學生說出幾有幾個是幾的幾倍

如： $3+3+3+3=12$

3有4個是12 3的4倍是12

(2)乘法紀錄

$3+3+3+3=12$ 3要寫4次，可以用「 $3\times 4=12$ 」表示

3代表3個一數，4代表3寫了4次

「 3×4 」表示3有4個，3的4倍

「 $3\times 4=12$ 」表示3的4倍是12

二、透過圖像表徵建立「單位量」與「單位數」的心象，並連結乘法算式

1.運用圖像表徵了解「單位量」與「單位數」的意義

如：桌上有4包糖果，每一包糖果都是3個，桌上總共有幾個糖果？

(1)先畫出1包糖果的個數，並確認糖果的個數



(2)再畫出4包糖果，確認畫了幾包



$3+3+3+3=12$ 表示1包有3個，有4包

(3)以「1包4個，有3包」的錯誤圖像，釐清題目中單位量及單位數的意義



$4+4+4=12$ 圖像表示1包有4個，有3包，與題目的「一包有3個，有4包」不同。

2.由「單位量」與「單位數」的心象，連結乘法算式

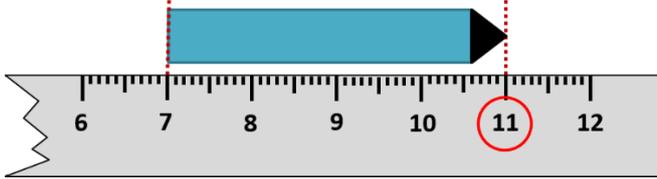
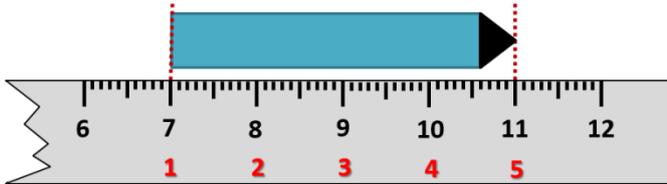
如：桌上有4包糖果，每一包糖果都是3顆，桌上總共有幾顆糖果？

學生可產生心象為下圖：



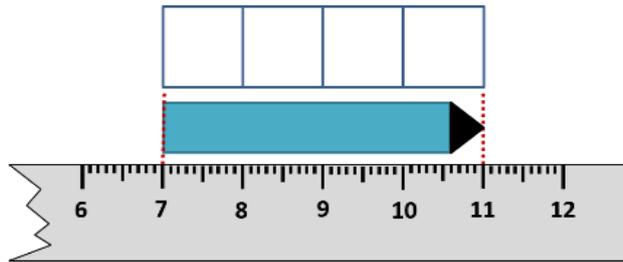
以乘法紀錄「 $3\times 4=12$ 」，3表示1包有3個，4代表買了4包，12代表糖果的總數。

新北市國小教學問題分析與教學策略

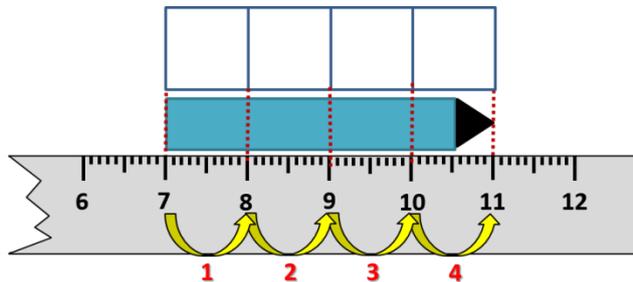
主題	<input checked="" type="checkbox"/> 數與量 <input type="checkbox"/> 幾何 <input type="checkbox"/> 代數 <input type="checkbox"/> 統計與機率		
教學年級	二年級		
提供者	鄭惠娟	服務學校	頂溪國小
社群成員	新北市國小數學輔導團		
教學問題	<p>學生在學習長度單元使用工具尺測量長度時，若測量物的起始點不在尺面刻度的0時，學生在判斷測量物的長度時容易因為迷思而產生錯誤。</p>		
問題分析	<p>學生常見錯誤類型有以下兩類：</p> <p>一、直接以測量終點的刻度當作物體的長度： 測量的起始點非為0時，學生只看到終點的刻度為11(如下圖0)，誤以為鉛筆的長度是11公分。表示學生不理解尺面上刻度的意義，11指的是從起點0開始累計了11個1公分的長度，而下圖鉛筆測量起始點的尺面刻度並非0。</p>  <p>二、將刻度量與長度量混淆： 學生誤將起始點刻度視為1，從1開始點數至終點刻度即為物體的長度。例：學生把鉛筆起點的刻度7公分處當成1開始點數至11公分處為5(如下圖)，故誤以為鉛筆長度是5公分。表示學生不理解尺面刻度的意義，測量時的起始點應視為0，尺面上的刻度多1，表示和起始點0的距離增加1公分。</p> 		
相關能力指標	<p>97 課綱(分年細目)： 2-n-15 能認識長度單位「公分」、「公尺」及其關係，並能做相關的實測、估測與同單位的計算。</p> <p>十二年國教課綱(學習內容)： N-1-7 理解長度及其常用單位，並做實測、估測與計算。</p>		
教學策略	<p>學生在學習使用公分尺時，教師應協助學生連結累積個別單位測量的舊經驗：「和幾個小白積木一樣長？」因此，尺面的刻度代表1公分的個別單位的累積，教師不能只強調起點從0開始，終點刻度就是物體的長度，容易造成學生的錯誤迷思。教師可嘗試以下兩個教學策略幫助學生理解尺面刻度的意義：</p>		

一、透過具體物的操作和比較，讓學生察覺長度量和尺面刻度的關係

(一)請學生用小白積木排列出物體的長度(複製長度)。



(二)用公分尺測量鉛筆(小白積木)的長度，並引導學生1公分1公分點數並在圖上畫記符號。



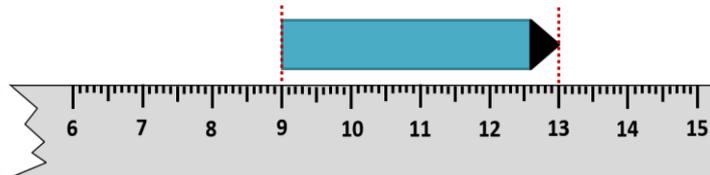
(三)歸納&澄清迷思：讓學生察覺尺面上任2個連續的數字刻度之間的長度都和1個小白積木的邊長相同，都是1公分。因此7-11公分之間是排了4個小白積木的長度，也就是4公分。

二、透過實際操作，讓學生發現測量時不同起點，終點亦不相同的認知衝突，以破除只看終點刻度的迷思

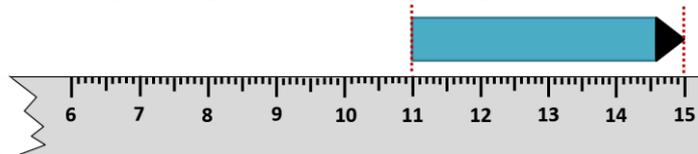
(一)同長度，終點刻度不同的認知衝突：

1. 請學生用尺測量同一枝鉛筆，但每次測量時起始點需不相同，請學生紀錄每次的測量結果。

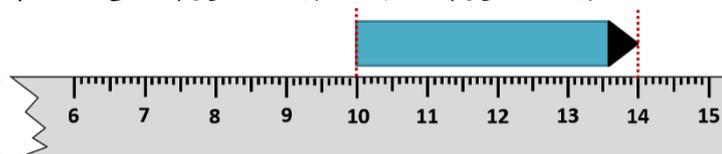
例一：起點刻度9公分，終點刻度13公分。



例二：起點刻度11公分，終點刻度15公分。



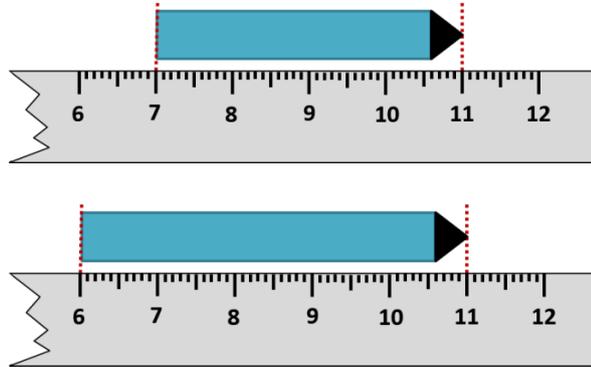
例三：起點刻度10公分，終點刻度14公分。



2. 討論&澄清迷思：引導學生察覺測量時不能只看終點刻度來判斷長度，而要觀察起點到終點間累積了幾個個別單位(1公分)。讓學生在操作中發現規律，雖然起點和終點刻度不同，但差數皆相同，此差數即為鉛筆的長度。

(二) 不同長度，終點刻度相同的認知衝突：

1. 教師出示不同長度的鉛筆，測量時終點刻度都相同的結果(如下圖)。



2. 討論&澄清迷思：引導學生察覺測量時不能只看終點刻度來判斷長度，而要觀察起點到終點間累積了幾個個別單位(1公分)。

新北市國小教學問題分析與教學策略

主題	<input checked="" type="checkbox"/> 數與量 <input type="checkbox"/> 幾何 <input type="checkbox"/> 代數 <input type="checkbox"/> 統計與機率																																																																																																																																																			
教學年級	二年級																																																																																																																																																			
提供者	李廣祺 服務學校 江翠國小																																																																																																																																																			
社群成員	新北市國小數學輔導團																																																																																																																																																			
教學問題	學生在學習「如何算出兩個日期之間的天數」問題時，容易因為不理解起始日和結束日所包含的範圍，以及混用日期與日數，造成點數或計算錯誤。																																																																																																																																																			
問題分析	<p>一、不理解題意中起始日和結束日所包含的範圍 例：聖誕節的表演活動，從12月20日開始到12月25日結束，共表演幾天？</p> <p style="text-align: center;">學生只點數12/20、12/21、12/22、12/23、12/24，一共表演5天，誤以為12/25結束日不算。</p> <div style="text-align: right; border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> <table style="font-size: small; border-collapse: collapse;"> <tr><th colspan="7">December</th></tr> <tr><th>日</th><th>一</th><th>二</th><th>三</th><th>四</th><th>五</th><th>六</th></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td></tr> <tr><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td></tr> <tr><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td><td>21</td></tr> <tr><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td><td>26</td><td>27</td><td>28</td></tr> <tr><td>29</td><td>30</td><td>31</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table> </div> <p>二、跨月問題時不清楚日期範圍，而將日期當作日數來計算 例：恐龍特展從7月1日開始到8月3日結束，一共展出幾天？</p> <div style="text-align: center; margin: 10px auto;"> <table style="font-size: small; border-collapse: collapse;"> <tr><th colspan="7">July</th><th colspan="7">August</th></tr> <tr><th>日</th><th>一</th><th>二</th><th>三</th><th>四</th><th>五</th><th>六</th><th>日</th><th>一</th><th>二</th><th>三</th><th>四</th><th>五</th><th>六</th></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td></tr> <tr><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td><td>26</td><td>27</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td></tr> <tr><td>28</td><td>29</td><td>30</td><td>31</td><td></td><td></td><td></td><td>25</td><td>26</td><td>27</td><td>28</td><td>29</td><td>30</td><td>31</td></tr> </table> </div> <p style="text-align: center;">學生誤以為7月只有經過1天，8月經過3天，計算成1+3=4。</p>	December							日	一	二	三	四	五	六	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31					July							August							日	一	二	三	四	五	六	日	一	二	三	四	五	六	1	2	3	4	5	6						1	2	3	7	8	9	10	11	12	13	4	5	6	7	8	9	10	14	15	16	17	18	19	20	11	12	13	14	15	16	17	21	22	23	24	25	26	27	18	19	20	21	22	23	24	28	29	30	31				25	26	27	28	29	30	31
December																																																																																																																																																				
日	一	二	三	四	五	六																																																																																																																																														
1	2	3	4	5	6	7																																																																																																																																														
8	9	10	11	12	13	14																																																																																																																																														
15	16	17	18	19	20	21																																																																																																																																														
22	23	24	25	26	27	28																																																																																																																																														
29	30	31																																																																																																																																																		
July							August																																																																																																																																													
日	一	二	三	四	五	六	日	一	二	三	四	五	六																																																																																																																																							
1	2	3	4	5	6						1	2	3																																																																																																																																							
7	8	9	10	11	12	13	4	5	6	7	8	9	10																																																																																																																																							
14	15	16	17	18	19	20	11	12	13	14	15	16	17																																																																																																																																							
21	22	23	24	25	26	27	18	19	20	21	22	23	24																																																																																																																																							
28	29	30	31				25	26	27	28	29	30	31																																																																																																																																							
相關能力指標	<p>97 課綱(分年細目)： 2-n-13 能認識「年」、「月」、「星期」、「日」，並知道「某月有幾日」、「一星期有七天」。</p> <p>十二年國教課綱(學習內容)： N-2-14 時間：「年」、「月」、「星期」、「日」。理解所列時間單位之關係與約定。</p>																																																																																																																																																			

日期問題的教學活動宜連結學生的生活經驗，加強起始日和結束日包含範圍的澄清討論，並且透過在月曆上圈選日期，幫助學生先理解跨月日期之間所涵括的範圍，再進行計算，可避免產生將日期當作日數的錯誤。

一、連結學生生活經驗討論起始日和結束日包含範圍

關於兩日數之間的範圍，生活中會有各種容易讓人產生誤解的情況，例如畫畫比賽從5月1日開始報名到5月14日截止，有些人會認為「截止日」那天是不能報名的，又或者便利商店飲料特價活動從7月1日開始，到8月1日結束，學生可能會誤以為「結束」的那天已經沒有特價了…等狀況，然而生活中遇到的大部分情況是起始日與結束日均包含在內，目前課本中三家版本的布題也是起始日與結束日均包含在內，因此教師可先透過學生的生活經驗(如報名比賽的期限、學校美展展出的時間等)討論起始日與結束日是否包含在內，建立起起始日與結束日都算在內的共識後，再開始進行答題。

下面說明如何與學生進行題意澄清討論。

例：聖誕節的表演活動，從12月20日開始到12月25日結束，共表演幾天？



教學策略

- (一)先請學生找出哪些日期有聖誕節表演。教師可引導：「聖誕節快到了，老師看到社區的辦公室貼著一張海報，上面寫著『聖誕節的表演活動，從12月20日開始到12月25日結束』，老師想先知道哪幾天可以看到表演？」
- (二)請學生發表他們找到的所有表演日期後，教師提問：「12月20日開始的這一天有沒有表演？」以及「12月25日結束的這一天有沒有表演？」讓學生了解開始日就是表演的第一天，結束日就是表演的最後一天，當天還是可以看到表演。
- (三)請學生在月曆上將所有表演的日期圈起來或是紀錄下來，再點數一共有幾日。
- (四)請學生發表生活中遇過連續幾日進行同一活動的經驗，並說出開始日與結束日。例如清明節連假是4月4日到4月7日，所以4月4日是開始日(放假第一天)、4月7日是結束日(放假最後一天)，一共經過4天。

二、讓學生透過月曆先確認跨月日期的範圍，再進行計算

當學生學會在月曆上圈選日期或寫出日期的方式來計算日數時，就能解決同一月份中的日數問題，但是若遇到跨月的狀況時，圈選日期或寫出日期顯然太過麻煩，因此學生學習將跨兩個月的日數分別寫出來再相加。然而部分學生可能誤將開始日的日期視為第

一個月的日數(如 7/1 當作 7 月只經過了 1 天)，結束日的日期視為第二個月的日數(如 8/3 當作 8 月經過了 3 天)，再將日數相加，未注意到上述的計算方式並非完整涵括跨月日期的範圍，因此有必要多給予學生在月曆上確認跨月日期範圍的經驗，再用加法算式計算。

下面說明如何引導學生先觀察月曆，再進行計算。

例：恐龍特展從 7 月 1 日開始到 8 月 3 日結束，一共展出幾天？

July							August						
日	一	二	三	四	五	六	日	一	二	三	四	五	六
	1	2	3	4	5	6					1	2	3
7	8	9	10	11	12	13	4	5	6	7	8	9	10
14	15	16	17	18	19	20	11	12	13	14	15	16	17
21	22	23	24	25	26	27	18	19	20	21	22	23	24
28	29	30	31				25	26	27	28	29	30	31

(一)教師提問：「恐龍展的時間很長，會經過 2 個不同的月，題目說 7 月 1 日開始到 8 月 3 日結束是什麼意思呢？」(學生可能回答 7 月 1 日是展覽的第一天，8 月 3 日是展覽的最後一天)

(二)教師引導：「我們之前數有幾天都是在月曆上面圈日期，或是把日期寫出來，請你先試試看用圈選的方法，算算展覽一共有幾天呢？」(學生圈出 7/1~8/3 的日期，發現共有 34 天)

(三)教師引導：「我們現在來觀察你圈出或寫出的日期，七月一共經過幾天呢？」(學生回答 31 天)「是從幾日到幾日？」(7 月 1 日到 31 日)「那八月一共經過幾天呢？」(學生回答 3 天)「是從幾日到幾日？」(8 月 1 日到 3 日)

(四)教師引導學生可以將七月和八月兩個月的日數相加得到答案，此方法較為簡便。

備註：本單元之日期問題務必提供月曆讓學生點數，不需讓學生記憶每月的日數，也不需要求學生以後面日期減前面日期的算式來計算。

國小數學疑難問題 之有效教學策略

中年級



新北市國小教學問題分析與教學策略

主題	<input checked="" type="checkbox"/> 數與量 <input type="checkbox"/> 幾何 <input type="checkbox"/> 代數 <input type="checkbox"/> 統計與機率		
教學年級	三年級		
提供者	胡錦芳	服務學校	榮富國小
社群成員	新北市國小數學輔導團		
教學問題	如何讓學生在總數未知的除法文字情境中，了解餘數比除數小的意義。		
問題分析	<p>學生在學習除法問題時，對於餘數小於除數的概念較難掌握，尤其在被除數未知的情况下，當餘數大於除數時學生無法察覺餘數的不合理性，因此無法判斷餘數不可能為哪些數。</p> <p>例如： 媽媽將桌上的一堆糖果全部進行分裝，每4顆裝成一小包，桌上<u>不可能</u>剩下幾顆糖果？</p>		
相關能力指標	<p>97 課綱(分年細目) 3-n-05 能理解除法的意義，運用\div、$=$做橫式紀錄（包括有餘數的情況），並解決生活中的問題。</p> <p>十二年國教課綱(學習內容) N-3-4 除法：除法的意義與應用。基於N-2-9之學習，透過幾個一數的解題方法，理解如何用乘法解決除法問題。熟練十乘法的範圍的除法，做為估商的基礎。</p>		
教學策略	<p>一、透過情境及操作，引導學生察覺餘數的範圍(0、1、2、3)</p> <p>透過操作花片活動，讓學生理解餘數的循環，當桌上糖果分別是4顆、5顆、6顆、7顆、8顆、9顆時每4顆裝一包，可以裝幾包？剩下幾顆？分分看，並用算式記錄下來</p> <p>  → 桌上有4顆糖果，可裝1包，剩下0顆  → 桌上有5顆糖果，可裝1包，剩下1顆  → 桌上有6顆糖果，可裝1包，剩下2顆  → 桌上有7顆糖果，可裝1包，剩下3顆  → 桌上有8顆糖果，可裝2包，剩下0顆  → 桌上有9顆糖果，可裝2包，剩下1顆 </p>		

想想看，你發現了什麼？引導學生觀察剩下的花片出現哪些數字？教師與學生共同討論：從剩下的花片可以知道餘數出現的數字是「0、1、2、3」且具有循環的現象。

二、藉由算式察覺餘數比除數小的關係

藉由操作花片與算式的連結讓學生察覺「每4顆裝成一小包」就是除以4的意思，當除數是4的時候，餘數的範圍是「0、1、2、3」發現除數與餘數有密切的關係，且餘數都比除數小，當除數比餘數大時，還可以再裝一包。

$$\begin{array}{l} 4 \div 4 = 1 \cdots 0 \\ 5 \div 4 = 1 \cdots 1 \\ 6 \div 4 = 1 \cdots 2 \\ 7 \div 4 = 1 \cdots 3 \\ 8 \div 4 = 2 \cdots 0 \\ 9 \div 4 = 2 \cdots 1 \end{array}$$

三、加強判斷算式中的除數，推知餘數的不可能性

學生了解餘數比除數小的關係後，可設計一些算式引導學生判斷除數了解餘數的範圍，進而推知餘數不可能是多少？例如：

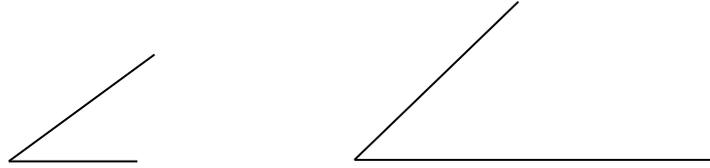
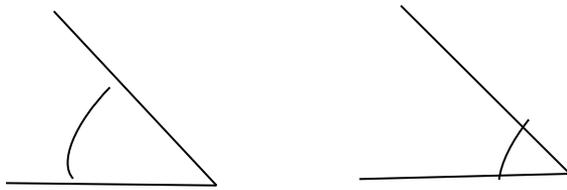
「下列算式中哪一些算式的餘數不可能是4？」

(甲) $\square \div 4$ (乙) $\square \div 5$ (丙) $\square \div 3$ (丁) $\square \div 6$

當學生無法判斷時，可先討論餘數的範圍，以(甲)選項為例： $\square \div 4$ 除數是4，餘數可能的範圍是0、1、2、3，所以不可能是4，再藉由餘數比除數小的概念，以此類推只要觀察「除數」即可知道「餘數」的不可能性。最後，回歸本題情境，當桌上的糖果總數未知時，可判斷每4顆裝一包，除數是4，所以餘數不可能大於4以上。

教師透過操作與算式、算式與題意之間相互連結，幫助學生解除法問題中餘數的範圍與不可能性。

新北市國小教學問題分析與教學策略

主題	<input checked="" type="checkbox"/> 數與量 <input type="checkbox"/> 幾何 <input type="checkbox"/> 代數 <input type="checkbox"/> 統計與機率		
教學年級	三年級		
提供者	江珮瑤	服務學校	板橋國小
社群成員	新北市國小數學輔導團		
教學問題	<p>學生在學習「角」這個單元時，由於是第一次接觸「角」，因此在進行「角的大小比較」時，常常會受直觀或視覺圖形上的影響，而產生各種迷思。</p>		
問題分析	<p>一、角的保留概念受到角的「開口方向」影響</p> <p>因角的開口方向不同，而產生誤判，尤其在直角的狀態下若斜擺，則認為非直角。生活中的直角，大多是由水平線和鉛直線相交而成，對於其他方向的呈現則較少，因此學生常無法找出斜擺的直角。</p>  <p>二、角的大小比較受到角的「邊長」及「標示弧長」影響</p> <p>(一)受角的「邊長」影響：認為角的邊長越長，角度越大。</p>  <p>(二)受角的「標示弧長」影響：因標示角的弧長越長，則認為角度越大。部分孩子也會受弧長所圍成內部區域的影響，認為內部區域的面積越大則角度越大！</p> 		
相關能力指標	<p>97 課綱(分年細目)： 3-S-04 能認識角，並比較角的大小(3-n-17)。</p> <p>十二年國教課綱(學習內容)： S-3-1 角度(同 N-3-13)：以具體操作為主。初步認識、直接比較與間接比較。認識直角。</p>		
教學策略	<p>一、透過描繪同一個角，察覺角的大小不受「邊長」、「開口方向」及「標示弧長」的影響</p> <p>(一)選定三角板中的其中一個角，讓學生自行複製出好幾個角，在</p>		

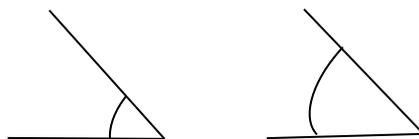
重複複製的過程中，學生描繪角的邊長、開口方向盡量不同，再請學生觀察比較角是否一樣大。

以直角為例：

1. 請學生描下三角板上的直角；
2. 請學生旋轉三角板的直角，再描下同一個角，並標記直角標示；
3. 請學生比較這些不同開口方向的直角、不同邊長的直角，說說它們是否仍相同是直角。



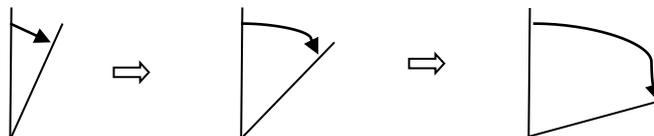
(二)選定三角板中的 30 度角(或 60 度角)，請學生描繪兩個 30 度角(或 60 度角)，並標記弧長，再利用目前兩個相同大小的角，請學生比較兩角的大小。學生對角的認識模糊，因此會受標記弧長的長短或所圍成的內部區域影響。請老師再回到「角的大小取決於角的張開程度」以動態的方式再次向學生說明。



二、透過動態操作活動發現角的大小與角的張開程度有關

角的大小比較其實是以角的張開程度大小而定，因此教學時應透過動態表徵方式表徵角的張開程度，如此，較不會受角的邊長、弧長、內部區域面積影響。

教師在教學時，可以運用扣條或者是竹籤，透過如下動態的操作模式模擬角的開合狀態，藉此讓學生理解角的大小與角的張開程度有關。



此外，教師還可提供多類型的角，讓學生判斷，藉此評量學生是否理解此概念。角 a、角 b(如下圖)分別呈現大邊小角及小邊大角，若學生已具備「角的大小與角的張開程度有關」時，則學生可不受邊長影響而能直觀判斷角 b 大於角 a。



同理，學生亦能比較角 c 與角 d 的大小(如下圖)。角 c 呈現大弧小角，角 d 則呈現小弧大角，藉由角 c、角 d 大小比較的過程中，可幫助學生不再受標記弧長的影響。



三、無法直觀判斷角的張開程度時，透過複製疊合來比較角的大小

當學生能正確理解概念，掌握角的大小取決於角的張開程度時，便能不再受角的邊長、標記弧長或內部範圍的影響而做出正確的判斷。但若無法以直觀判別時，則需藉由複製疊合的過程來比較角的大小。

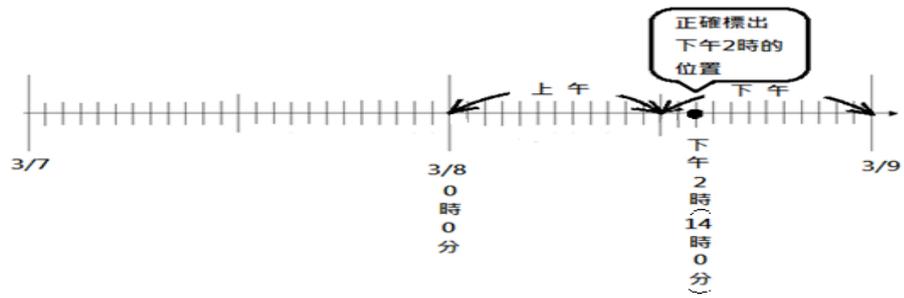
角 e 與角 f 無法直接判斷(如下圖)，須利用描圖紙描下其中一個角，再與另一個角的頂點對齊後直接疊合，進行大小比較。



新北市國小教學問題分析與教學策略

主題	<input checked="" type="checkbox"/> 數與量 <input type="checkbox"/> 幾何 <input type="checkbox"/> 代數 <input type="checkbox"/> 統計與機率
教學年級	三/四年級
提供者	王麗如 服務學校 義學國小
社群成員	新北市國小數學輔導團
教學問題	<p>關於「某個時刻經過多少時間量會到哪個時刻？」或「兩個時刻間經過多少時間量」的問題，其解題過程中有關時間量(包含日期與時刻)的意義以及表徵方式，都是一般學生較不易聯想，也較難以理解的概念，是學習困難的課題。尤其涉及時間量(包含日期與時刻)跨午或跨日的情境中，較未跨午或跨日的情境更是為複雜。</p>
問題分析	<p>在某個未知時刻經過一個特定的時間量會到某已知的時刻的計算問題，如涉及時間量(包含日期與時刻)跨日的情境，學生常常不理解題意，無法判斷前後時間，不知道是要「加」還是「減」所困擾，衍生以猜測方式解題的現象，又加上「時間」和「時刻」的概念混淆，以致解題錯誤。</p> <p>◆舉例題目：</p> <p>媽媽想要製作夢幻吐司當做3月8日下午2時好友聚會的點心，已知製作時間從發酵到製作完成總共要花18時，問媽媽最晚要在幾月幾日幾時開始製作？</p> <p>以下以本題提出三類常見的錯誤類型：</p> <p>一、學生無法理解題意，不能判斷前後時間</p> <p>學生誤將結束點的時刻(3月8日下午2時)當成起始點，直接加上經過的時間18時(時間量)，算出32時，再將時間換算成3月9日上午8時。</p> $\begin{aligned} & \text{下午2時} + 18\text{時} \\ &= 14\text{時} + 18\text{時} \\ &= 32\text{時} \\ & 32\text{時} - 24\text{時} = 8\text{時} \qquad \text{答：3月9日上午8時。} \end{aligned}$ <p>二、「12時制」與「24時制」的混淆</p> <p>學生誤將下午2時直接當成2時。先算出3月8日2時，是指從3月8日0時0分已經經過2個1小時，而整個發酵到製作完成需18個1小時，所以，再往前一日回推剩下所需的16個1小時時間量。因此，得到3月7日8時的錯誤答案。</p> $\begin{aligned} & 18\text{時} - 2\text{時} = 16\text{時} \\ & 24\text{時} - 16\text{時} = 8\text{時} \qquad \text{答：3月7日8時。} \end{aligned}$ <p>三、時間量和時刻的概念混淆</p> <p>學生誤將經過的時間18時(時間量)當作18時(時刻)，然後換算成下午6時(時刻)，再直接將大的數字減去小的數字，即用下午6時減去下午2時。因此，得到3月8日下午4時的錯誤答案。</p>

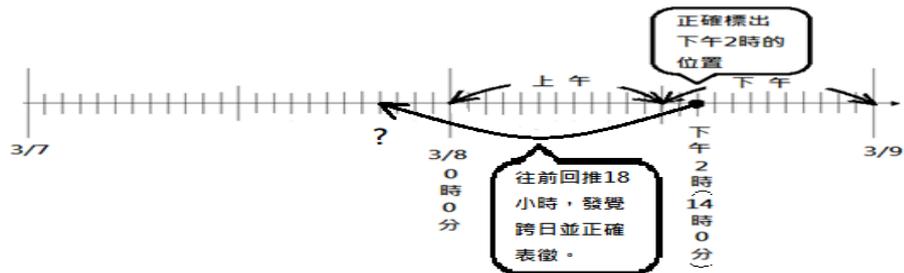
	<p>下午 2 時=14 時 18 時-14 時=4 時</p> <p>答：3 月 8 日下午 4 時。</p>
<p>相關能力指標</p>	<p>97 課綱(分年細目)：</p> <p>3-n-13 能認識時間單位「日」、「時」、「分」、「秒」及其間的關係，並做同單位時間量及時、分複名數的加減計算（不進、退位）。</p> <p>4-n-13 能解決複名數的時間量的計算問題。</p> <p>十二年國教課綱(學習內容)：</p> <p>N-3-17 時間：「日」、「時」、「分」、「秒」。實測、量感、估測與計算。時間單位的換算。認識時間加減問題的類型。</p> <p>N-4-13 解題：日常生活的時間加減問題。跨時、跨午、跨日、24 小時制。含時間單位換算。</p>
<p>教學策略</p>	<p>一、利用圖示表徵並澄清題意</p> <p>老師透過時間軸的線段，標示出 3 月 8 日下午 2 時，透過題目「媽媽想要製作夢幻吐司當做 3 月 8 日下午 2 時好友聚會的點心」確認 3 月 8 日下午 2 時是起始的時刻、還是結束的時刻，引導學生了解下午 2 時是一個結束的時刻。接著，再透過題目「製作時間從發酵到製作完成總共要花 18 時」了解須從結束時刻往前回推 18 小時，才能算出起始的時刻，請學生利用線段圖標示出結束時刻 3 月 8 日下午 2 時，並在圖上表徵出往前回推 18 小時（如圖一），以圖示表徵的方式澄清題意。</p> <div data-bbox="571 1227 1214 1451" data-label="Diagram"> </div> <p>圖一 利用時間線段圖表徵題意</p> <p>二、利用「時間線段圖」理解 12 時制和 24 時制的關聯，以及跨日的表徵</p> <p>老師發下「時間線段圖」，說明時間線段圖上最長的刻度代表一天的開始，分別是 3 月 7 日 0 時 0 分、3 月 8 日 0 時 0 分和 3 月 9 日 0 時 0 分，再讓學生利用時間線段圖確認一天有 24 時，也就是有 24 個 1 小時，因此推得線段圖上的每 1 格代表 1 個小時。再請學生標示出 3 月 8 日下午 2 時（如圖二），了解下午 2 時就是從 3 月 8 日 0 時 0 分開始，經過了 14 個 1 小時，因此，在 24 時制所指的「14 時」，也就是在 12 時制的「下午 2 時」。</p>



圖二 學生正確標示出 3 月 8 日下午 2 時

確認下午 2 時的在線段圖上的標示後，根據題意往前回推 18 小時，因此，學生便能夠利用時間線段圖往前點數 18 個 1 小時，從線段圖上知道起始的時刻要從 3 月 8 日 0 時 0 分再前回推 4 小時（如圖三）。

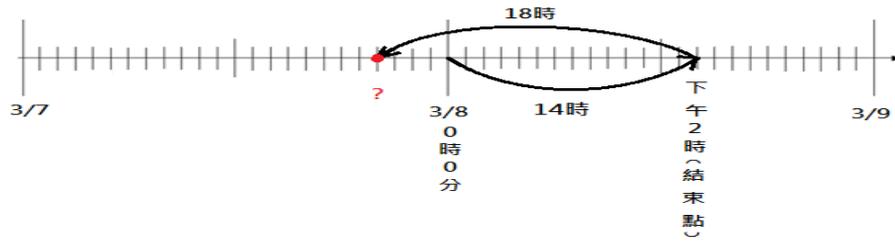
此部分需注意到，為了讓學生能了解時間的連續性，至少要發下連續 2 天的時間線段圖，引導學生能在「時間線段圖」上標示出 3 月 8 日下午 2 時這個時刻，以及往前 18 小時之表徵。



圖三 在圖上表徵出「往前數 18 小時」，並察覺起始點的位置

三、利用時間線段圖了解時刻與時間量的意義，並進行解題

- (一) 學生依題意在「時間線段圖」上標示出 3 月 8 日下午 2 時（時刻）。學生能透過「時間線段圖」知道 3 月 8 日凌晨 0 時到 3 月 8 日下午 2 時，已經過了 14 個 1 小時，理解 3 月 8 日下午 2 時這個時刻的意義，知道時刻如何轉換成時間量。
- (二) 因為發酵到製作完成只要 18 時（指經過的時間量），所以從結束點往左點數 18 個小時（時間量），即為代表最晚開始製作的時刻，並以「？」標示代表點位（時刻）。
- (三) 學生能知道 3 月 8 日下午 2 時這個時刻的意義後，而依題意須往前推 18 小時，因此，再從 3 月 7 日 24 時回推 4 時，也就是往前數 4 個 1 小時就能求解出 3 月 7 日 20 時的正確答案。



下午 2 時=14 時

18 時-14 時=4 時

24 時-4 時=20 時

答：3 月 7 日 20 時。

因此，透過利用「時間線段圖」的表徵方式，可以先理解不同時刻的先後位置與距離關係，可避免發生起始點與結束點時刻混淆、12 時制和 24 時制換算的混淆，也能了解時刻與時間量的意義，再來進行解題。

新北市國小教學問題分析與教學策略

主題	<input type="checkbox"/> 數與量 <input type="checkbox"/> 幾何 <input checked="" type="checkbox"/> 代數 <input type="checkbox"/> 統計與機率				
教學年級	四年級				
提供者	<table style="width: 100%; border: none;"> <tr> <td style="width: 50%; text-align: center;">馬恬舒</td> <td style="width: 50%; text-align: center;">服務學校</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="text-align: center;">昌平國小</td> </tr> </table>	馬恬舒	服務學校		昌平國小
馬恬舒	服務學校				
	昌平國小				
社群成員	新北市國小數學輔導團				
教學問題	<p>學生學習將二步驟問題記錄成併式時，當第一個算式的結果是第二個算式的被加數或被減數時，學生能順利列成併式，如：</p> $\begin{array}{l} 120+70=190 \\ 190+60=250 \end{array} \quad \Rightarrow \quad 120+70+60=250$ <p>但當第一個算式的結果要做為第二個算式的減數時，學生往往產生困難，如：</p> $\begin{array}{l} 120+70=190 \\ 500-190=310 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{正確列式為：} 500-(120+70) \\ \text{學生錯誤列式：} 120+70-500 \end{array}$				
問題分析	<p>二年級引入兩步驟問題時，是將各步驟分開記錄，教學重點在於引導學童多元的解題思考；至三年級學習併式時，要在加減兩步驟的具體情境問題中，將兩個算式併為一個算式，做為日後學習代數的前置經驗。</p> <p>三年級要學習將兩步驟問題列成併式，有連加、連減及加減混合類型的題目。在解決連加及加減混合問題時，學生可依個人想法記錄「先算什麼」及「再算什麼」，並依序以併式記錄。</p> <p>三年級引入併式的問題情境，皆是先算出第一個算式的答案，再利用算出來的結果進行加或減的運算。在此種問題情境下學習併式，學生容易認為在前列出的算式後，再加上運算符號及數字，便完成併式，此時學生在併式的學習不會產生困難。以「小美買了120元的餅乾、70元的豆花和60元的汽水，共花了多少元？」為例，學生可以根據題意列出二步驟的算式，如下：</p> $\begin{array}{l} 120+70=190 \\ 190+60=250 \end{array}$ <p>學生在二年級已學習到連加算式，能夠將上述二式寫成併式「$120+70+60=250$」，因為只需在原先第一個算式「$120+70$」後面再加上運算符號及數字(+60)，對學生而言並不困難。</p> <p>但是當遇到連減問題，先算出連減二數之和的學生，卻不知如何記錄成併式，或在逐次減項時產生問題。例如：「小薇帶了300元，買了110元的鉛筆盒和90元的筆記本，她還剩下多少元？」當學生先算總花費「$110+90$」元，要用300元減去總花費之時，常出現如下的錯誤併式：</p> $\begin{array}{l} 300-110+90 \\ =200-300 \\ =100 \end{array}$				

	<p style="text-align: center;">或是</p> $110+90-300$ $=300-200$ $=100$ <p>在《國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域》規劃於三年級初步學習加減二步驟併式，但不處理括號問題；但在連減情境中，學生在未學括號、卻想先算出總花費的情形下，經常會列出如「300-110+90」及「110+90-300」的併式，學生列出的併式不符合四則運算的由左而右計算規則，造成教師教學上的困擾。《十二年國民基本教育課程綱要數學領域》將併式移至四年級，並包含四則運算規則，教師可在併式教學時，一併進行括號之約定。</p>
<p style="text-align: center;">相關 能力指標</p>	<p>97 課綱(分年細目)</p> <p>3-n-03 能用併式記錄加減兩步驟的問題。</p> <p>4-n-04 能在具體情境中，解決兩步驟問題，並學習併式的記法與計算。</p> <p>十二年國教課綱(學習內容)</p> <p>R-4-1 兩步驟問題併式：併式是代數學習的重要基礎。含四則混合計算的約定(由左往右算、先乘除後加減、括號先算)。學習逐次減項計算。</p> <p>補充說明：</p> <p>N-4-3 解題：兩步驟應用問題(乘除，連除)由於除法有等分除和包含除兩種類型，應注意題型的多元性。可和併式一起進行(R-4-1)。必須複習與補充三年級兩步驟問題之併式。</p>
<p style="text-align: center;">教學策略</p>	<p>一、利用替換策略引入併式</p> <p>以布題：「<u>小薇</u>買了 80 元的鉛筆盒、70 元的筆記本和 300 元的書，她總共花了多少元？」為例，在澄清問題、了解題意後，要求學生列式解題，並請學生說明算式代表的意思。</p> <div style="display: flex; align-items: center; margin-top: 20px;"> <div style="margin-right: 20px;"> $80+70=150$ $150+300=450$ </div> <div style="border: 2px solid blue; border-radius: 15px; padding: 10px; width: fit-content;"> <p>鉛筆盒和筆記本總共花了 150 元，再加上買書花了 300 元，買三樣物品共花了 450 元。</p> </div> </div> <p>教師需針對二個算式進行提問，要求學生分別回答二個算式上各數字代表的意義，並將焦點放在第二個算式，提問：「150+300=450」中的 150 是從哪裡來的？讓學生從算式中察覺 150 是 80+70 所算出來的答案，教師製作 $80+70$ 的詞牌，將詞牌放在算式「150+300=450」的 150 上(用 $80+70$ 詞牌覆蓋住 150)，並說明將 150+300=450 中的 150 用 $80+70$ 來表示，因此第二個算式 150+300=450 就成為 $80+70+300 = 450$，如下所示：</p>

$$\boxed{150}+300=450$$



$$\boxed{80+70} + 300 = 450$$

再比較「 $\boxed{150}+300=450$ 」和「 $\boxed{80+70}+300=450$ 」二算式的異同，讓學生了解算式中的 150 就是由 $80+70$ 算出來的，因此將 $\boxed{150}$ 替換成 $\boxed{80+70}$ ，將二個算式合併列式成為併式。

二、先約定「先算的算式要用括號表示」，再視题目的運算省略括號

以上述情境為例，讓學生觀察並討論 $80+70+300=450$ 一式中，何者先算、何者後算，引導學生回顧原先的二步驟列式，是先算 $80+70$ ，並說明在數學上約定以()表示先算的算式，故將 $80+70+300=450$ 寫成 $(80+70)+300=450$ 。再利用連減情境布題討論不同解題方式如何進行併式，以布題「阿宏帶 500 元去超市買了 125 元的蘋果和 75 元的空心菜，他還剩下多少元？」為例，學生有以下二種可能的解題類型：

(一)先算出買蘋果剩下多少錢，再扣掉買空心菜的錢：

$$500-125=375$$

$$375-75=300$$

依照上述「替換」的策略及「先算的算式要括號」的約定，學生可以知道第二式的 375 是由 $500-125$ 算出來的，進而列出 $(500-125)-75$ 的併式，而後逐次減項進行解題。

(二)先算出買蘋果和空心菜共花多少錢，再算出剩下多少錢：

$$125+75=200$$

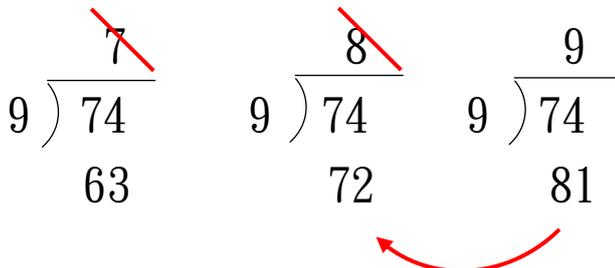
$$375-200=300$$

依照上述替換的策略及先算要括號的約定，學生可以知道第二式的 200 是由 $125+75$ 算出來的，並列出 $375-(125+75)$ 的併式，而後逐次減項進行解題。

當學生具備足夠的經驗，能將二步驟的算式順利列出帶有括號的併式後，教師再引導學生思考併式中括號的省略，如上述二式： $(500-125)-75$ 和 $375-(125+75)$ ，當括號在前面時，由於四則運算有由左向右算的規則，括號的存在與否並不影響算式的意義及結果，因此可將括號省略；但當括號在後面時，省略括號將會造成算式意義上的改變，因此不可省略。

新北市國小教學問題分析與教學策略

主題	<input checked="" type="checkbox"/> 數與量 <input type="checkbox"/> 幾何 <input type="checkbox"/> 代數 <input type="checkbox"/> 統計與機率
教學年級	四年級
提供者	馬恬舒 服務學校 昌平國小
社群成員	新北市國小數學輔導團
教學問題	<p>當除數為一位數、被除數為二位數時，學生往往用九九乘法背誦的方式解決，缺乏估商的經驗；致使當除數為二位數以上時，學生無法利用估商的策略進行除法的直式計算。</p>
問題分析	<p>除數為二位數的等分除情境除法直式算則中，學生能利用從高位先算的策略，逐步從高位檢視是否夠除並換成更小單位，卻在估商時產生困難，不容易估出答案。</p> <p>錯誤類型(例)： 題目：655 顆饅頭要平分放到 21 個袋子裡，每一袋最多可裝幾顆？</p> $655 \div 21 = (\quad) \cdots (\quad)$ <p style="text-align: center;">百十個</p> $\begin{array}{r} 21 \overline{) 655} \end{array}$ <p>學生能夠以多單位系統的概念來描述 655 是 6 個百、5 個十和 5 個一，亦能從高位做解題思考：6 個百不夠分給 21 個袋子，因此要把 6 個百要換成 60 個十，和原先的 5 個十合起來共是 65 個十。但是在計算 $65 \div 21$ 時，卻無法利用估商方式解題，反而依序一一進行 21 的倍數計算，先算 21×1，再算 21×2，最後計算 21×3，找到最適合的解。</p> <p>抑或是學生已學會估數，將 65 估為 70(或 60)，將 21 估為 20，算出 70 大約是 20 的 3 倍，知道商大約是 3，卻誤寫了錯誤的乘積，如：</p> $\begin{array}{r} \text{百十個} \\ 3 \\ 21 \overline{) 655} \\ \underline{60} \end{array}$
相關能力指標	97 課綱(分年細目)： 4-n-03 能熟練較大位數的乘除直式計算

	<p>十二年國教課綱(學習內容)： N-4-2 較大位數之乘除計算：處理乘數與除數為多位數之乘除直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。</p>
<p>教學策略</p>	<p>一、利用非整除之情境布題，了解除數為一位數的估商(商亦為一位數)</p> <p>在進行「被除數為二位數、除數為一位數」的除法計算時，為使學生學習估商的歷程，需用非整除的情境布題。如：「有 74 顆糖果要平分放到 9 個袋子裡，每一袋要裝幾顆？」學生在解決 $74 \div 9$ 的計算時，需要歷經調整商數的過程，如：$9 \times 7 = 63$，發現積還不夠大，便繼續往上乘，找到 $9 \times 8 = 72$，發現還有餘數，便再往上乘算 $9 \times 9 = 81$，此時的積比被除數大，於是再回顧前一項 $9 \times 8 = 72$，找到最接近而沒超過被除數的算式，經由調整商數來進行估商的學習。</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>二、利用包含除情境布題，了解除數為二位數的估商</p> <p>當除數為一位數時，不論是等分除或包含除的情境，學生都能用所熟背的九九乘法數字解題；但當除數為二位數時，學生無法用九九乘法直接找到答案，因此需將問題情境轉化為「<u>被除數是除數的幾倍</u>」進行思考後解題，故在初步學習除數為二位時，建議以包含除的問題情境引入，讓學生自然地「<u>以除數當作 1 倍，除數的幾倍會接近被除數</u>」來學習除數為二位數的估商，之後再引至直式算則時，不論包含除情境或是等分除情境，學生都能運用「<u>被除數是除數的幾倍</u>」的概念進行直式計算，以下說明<u>直式算則</u>的教學策略。</p> <p>(一)以多單位系統從高位做解題思考：</p> <p>例：655 顆饅頭要平分放到 21 個袋子裡，每一袋最多可裝幾顆？</p> <p>需將 655 轉換為多單位系統來思考，即 655 是 6 個百、5 個十以及 5 個一合起來的。因此，6 個百不夠平分給 21 個袋子，因此要把 6 個百要換成 60 個十，和原先的 5 個十合起來共是 65 個十；再引導學生思考 65 個十要平分成 21 袋，在直式計算上也就是思考 <u>65 是 21 的幾倍</u>，得知 65 大約是 21 的 3 倍，意即每一袋先分得 3 個十，故將 3 記錄在十位。以此類推，剩餘 2 個十不夠平分給 21 袋，故將 2 個十換成 20 個一，和原先的 5 個一合起來共是 25 個一，再思考 <u>25 是 21 的幾倍</u>，得到 1 倍，將 1 記錄在個位。</p>

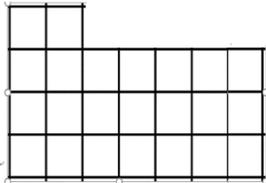
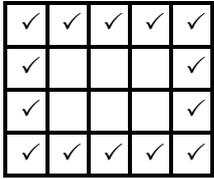
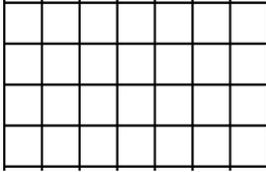
$$\begin{array}{r}
 \text{百十個} \\
 3 \\
 \hline
 21 \overline{)655} \\
 \underline{63} \\

 \end{array}$$

(二)熟練並利用十十乘法估商：

學生在解決「65是21的幾倍」時，因為除數是二位數，不易估算，故引導學生思考21接近20，可先將21想成20，再將此題轉化為思考「65大約是20的幾倍」進行估商；再進一步引導學生也可將65想成接近60（或70），那麼本題就是思考「60是20的幾倍」，故學生理解此時只需思考20的幾倍是60，亦即思考2個十的幾倍是6個十，也就是思考2的幾倍是6，因此得知可用3倍進行估商。

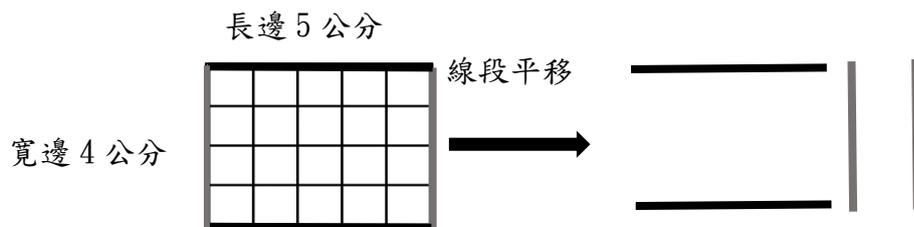
新北市國小教學問題分析與教學策略

主題	<input type="checkbox"/> 數與量 <input checked="" type="checkbox"/> 幾何 <input type="checkbox"/> 代數 <input type="checkbox"/> 統計與機率
教學年級	四年級
提供者	李佳容 服務學校 碧華國小
社群成員	新北市國小數學輔導團
教學問題	一、將周長與面積所指的部分混淆，不清楚周長指哪裡？面積在哪裡？ 二、計算長方形周長時，常用面積公式算出答案。
問題分析	<p>學生在學完面積與周長的概念後會產生互相混淆的情形，不知道周長所指的是平面圖形周界的總長度，所以常出現求周長時以點數平方公分格子(面積)來代替周長或者學生在計算長方形周長時會使用面積公式「長×寬」來計算答案。以下針對學生對周長與面積混淆的錯誤來分析：</p> <p>一、以點數格子(面積)當成周長長度</p> <p>錯誤類型 1：求圖形甲的周長是幾公分？ 以點數格子的方式算出全部有 23 格， 而回答甲圖形周長是 23 公分。</p> <div style="text-align: center;">  <p>甲</p> </div> <p>錯誤類型 2：圖形乙的周長是幾公分？ 點數外圍一圈的格子數量， 共有 14 格，而回答周長有 14 公分。</p> <div style="text-align: center;">  <p>乙</p> </div> <p>二、算周長時使用面積公式「長×寬」來計算答案</p> <p>錯誤類型 1：計算圖形丙的周長有多長？</p> <p>誤將面積公式當作周長， 算出 $7 \times 4 = 28$，而回答周長有 28 公分。</p> <div style="text-align: center;">  <p>丙</p> </div>
相關 能力指標	97 課綱(分年細目)： 4-s-09 能理解長方形和正方形的面積公式與周長公式。 十二年國教課綱(學習內容)： S-4-3 正方形與長方形的面積與周長：理解邊長與周長或面積的關係，並能理解其公式與應用。簡單複合圖形。
教學策略	學生為以點數「1平方公分」的格子當成周長以及利用面積公式計算周長，主要是因為學生不知道周長在哪裡，教學上應清楚讓學生知道「周長」

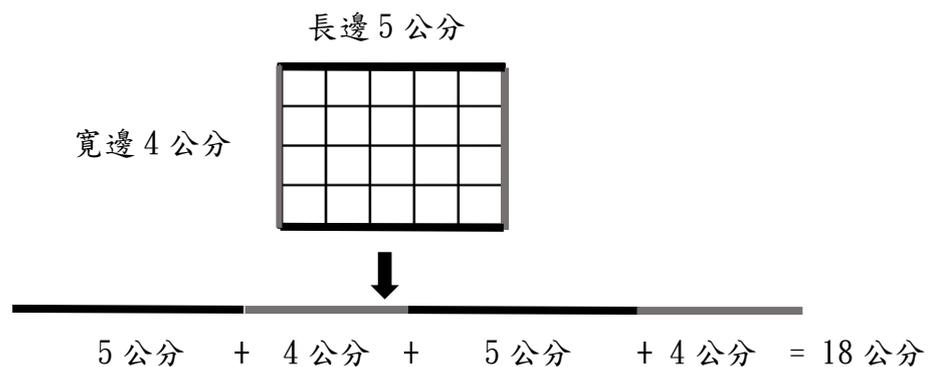
是指封閉的平面圖形「周界的總長」，確定學生知道周界在哪裡是解決周長概念不清的首要工作，再釐清把每一段周界長度相加就是「周長」。依錯誤一的圖形乙為題目，說明面積與周長混淆時的教學策略：

一、「周長」、「面積」語意上的澄清與「公分」、「平方公分」單位上的釐清

本題要強調「周長」與「面積」所指範圍是不同的，教師在說明「周長」時要用手指畫過周界線明確指出周界的部分，並說明1平方公分的正方形每一邊  是1公分。圖乙的長邊由5個1公分組成，是5公分，寬邊由4個1公分組成，是4公分，整個周界線長是由18個1公分的邊所組成，所以周長是18公分。可請學生在圖形的周界上重新用筆描繪一次並計算每一邊的長度，將周界上每一條邊的長度相加算出周長；另外，可利用繩子、扣條等教具圍出周界，平移二個長二個寬，讓學生發現周界是由「2個長+2個寬」組成的(如下圖一所示)，再將教具圍出的周界描出後拉直，使周界變成一條直線，強化周長是所有邊的長度總和(如下圖二所示)。教學上可提供「不規則的平面圖形」及常見的「幾何圖形」，讓學生描繪其周界並將各邊長度加總，確認學生周長概念。

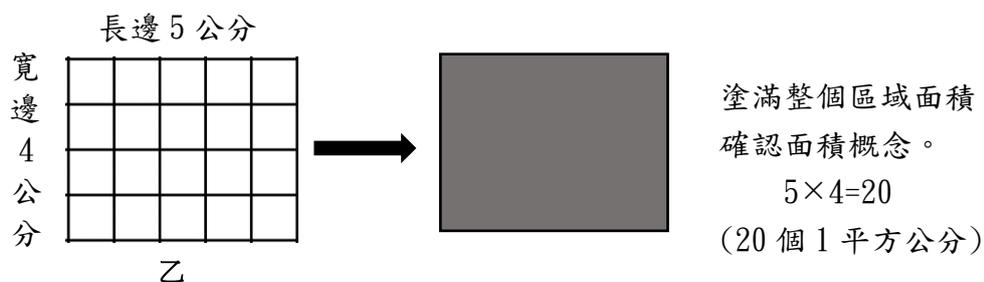


圖一：線段平移，發現周長是「2個長和2個寬」所組成的



圖二：拉直周界，強化周長概念

另一方面，長方形的「面積」是指周界內部區域大小，教師教學時要用整個手掌「擦滿」圖形內部區域範圍、並請學生用色筆「塗滿」整個面的大小，說明長方形的長邊5公分可以放下5個  (1平方公分)，寬邊4公分可以放4排5個  (1平方公分)，所以整個長方形的面積可以用「 $5 \times 4 = 20$ 」算出共有「20個1平方公分」組成的，所以面積是「20平方公分」。



二、運用周長與面積「相同數字」的圖形進行探究，加強周長與面積的理解

教師讓學生畫出周長與面積「相同數字」的圖形進行探究任務，透過探究發現數字一樣但畫出來的圖形不同、算式的意思也不同，來幫助學生釐清周長與面積的關係。

例如，讓每一位學生在平方公分紙上畫出一個周長 24 公分的長方形和一個面積 24 平方公分的長方形，並將學生不同畫法呈現在黑板上。透過全班共同討論，找出周長 24 公分的長方形有 6 種可能的畫法(1×11、2×10、3×9、4×8、5×7、6×6)，發現原來周長 24 公分的長方形有不同的形狀。接著，讓學生說明如何確認這些長方形的周長都是 24 公分，若學生能清楚說出周長是 2 個長邊的長度與 2 個寬邊的長度相加會等於 24 公分、或 1 個長邊的長度和 1 個寬邊的長度相加再乘 2 等於 24 公分，即得知學生理解周長概念。

另一方面，面積 24 平方公分的長方形，教師也應挑選不同的畫法，呈現在黑板上讓學生觀察。透過全班討論，發現面積 24 平方公分的長方形有 4 種可能的畫法(1×24、2×12、3×8、4×6)。學生透過圖像觀察發現面積 24 平方公分的長方形有不同的形狀，並可用文字或算式說明長邊有幾公分表示可以放下「幾個 1 平方公分」，寬邊表示可以放「幾排」，所以長方形面積是「長×寬=24」，共可排滿「24 個 1 平方公分」即面積為「24 平方公分」，可知學生已理解面積概念。

接著可以挑選「相同算式」的面積問題與周長問題，讓學生觀察到雖然相同算式相同答案，讓學生嘗試說明算式中每個數字代表的意思，強化學生對周長與面積概念。例如：問學生長 6 公分、寬 4 公分的長方形面積是多少？邊長 6 公分的正方形的周長是多少？學生寫出長方形面積為 $6 \times 4 = 24$ 平方公分，及正方形周長為 $6 \times 4 = 24$ 公分，此時需清楚說明 2 個算式都是 $6 \times 4 = 24$ 時，其中的數字 6、4 和 24 所代表的意思。若學生能正確說明，如此即可確認學生周長與面積概念清楚。

但需注意的是，教師在進行評量時需謹慎考慮數字，例如邊長 4 公分的正方形，其周長與面積算法都是 $4 \times 4 = 16$ ，因教師無法從算式中得知學生的是運用周長或是面積的概念解題，亦無法判斷學生是否真的了解周長與面積概念，命題時應避免使用造成解讀混淆的相同數字。

國小數學疑難問題 之有效教學策略

高年級



新北市國小教學問題分析與教學策略

主題	<input checked="" type="checkbox"/> 數與量 <input type="checkbox"/> 幾何 <input type="checkbox"/> 代數 <input type="checkbox"/> 統計與機率
教學年級	五年級
提供者	林心怡 服務學校 昌平國小
社群成員	新北市國小數學輔導團
教學問題	<p>一、學生在進行小數乘法直式算則時，容易受小數加減直式算則中小數點對齊干擾，不理解被乘數與乘數靠右對齊的原因。</p> <p>二、學生在進行小數乘法直式計算過程中，對於小數點的位置為何移動、如何移動以及計算出來的積之小數點位置的意義難以理解，也是在算則中學生較不易理解的程序知識。</p>
問題分析	<p>一、學生在紀錄小數乘法直式算則時，受加法直式算則影響以位值對齊，乘後的數字不知要對齊哪一位？學生不理解小數乘法直式算則的紀錄格式。</p> <p>學生錯誤類型（例1）：</p> $ \begin{array}{r} 13.45 \times 6.7 = \\ 13.45 \\ \times 6.7 \\ \hline \end{array} $ <p>二、學生在計算小數乘法直式算則時，受到加法直式算則影響，當被乘數與乘數小數位數一樣多時，會直接將小數點放下來，不理解乘法中積的小數點位置意義。</p> <p>學生錯誤類型（例2）：</p> $ \begin{array}{r} 3.5 \times 2.4 = \\ 3.5 \\ \times 2.4 \\ \hline 245 \\ 70 \\ \hline 945 \end{array} $ <p style="text-align: center;">本文將針對乘數為小數的直式乘法算則中，學生常出現的錯誤類型進行教學建議。</p>
相關能力指標	<p>97 課綱(分年細目)：</p> <p>5-n-11 能用直式處理乘數是小數的計算，並解決生活中的問題。</p> <p>十二年國教課綱(學習內容)：</p> <p>N-5-8 小數的乘法：整數乘以小數、小數乘以小數的意義。乘數為小數的直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。處理乘積一定比被乘數大的錯誤類型。</p> <p>(備註：先連結「乘以 0.1」和「乘以 0.01」的意義和乘法直式計算的經驗再做推廣。小數乘法直式計算的方法和整數類似，但須留意小數點記法和小數加減時記法不同。)</p>

為有效讓學生理解小數的乘法直式算則中的程序，建議可透過「單位量轉換的關係」或「轉換為分數乘法的程序」讓學生理解。

一、利用「單位量轉換」的策略理解

為有效讓學生理解小數的乘法直式算則，可利用「單位量轉換」的關係，讓學生理解小數的乘法直式算則中的程序概念。以下針對如何使用「單位量轉換」的方式處理學生典型的兩個錯誤類型，進行教學策略說明：

學生錯誤類型：

(例1)學生受加法直式算則影響，在記錄 13.45×6.7 時依位值對齊小數點，乘後的數字不知該對齊哪一位？

$$\begin{array}{r} 13.45 \times 6.7 = \\ 13.45 \\ \times 6.7 \\ \hline \end{array}$$

(例2)學生受到加法直式算則影響，當被乘數與乘數小數位數一樣多時，會直接將小數點放下來作為最後乘完的結果。

$$3.5 \times 2.7 = 94.5$$

$$\begin{array}{r} 3.5 \\ \times 2.7 \\ \hline 245 \\ 70 \\ \hline 94.5 \end{array}$$

教學策略

◎教學重點：以上兩個錯誤類型是同一種概念的教學，建議可透過單位量轉換的方式，連結並推廣小數乘法直式計算直式記法對位和整數乘法算則相同，並理解被乘數及乘數的小數點位置與積的小數點位置之關係。(教學示例如下)

(例1)

$$\begin{array}{r} 13.45 \times 6.7 = \\ 13.45 \rightarrow 1345 \text{ 個 } 0.01 \\ \times 6.7 \rightarrow 67 \text{ 個 } 0.1 \text{ 倍} \\ \hline 1345 \\ \times 67 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 0.01 \text{ 的 } 0.1 \text{ 倍} \\ = 0.001 \\ \text{連結分數算則} \\ \frac{1}{100} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{1000} \end{array}$$

(例2)

$$\begin{array}{r} 3.5 \times 2.7 = \\ 3.5 \rightarrow 35 \text{ 個 } 0.1 \\ \times 2.7 \rightarrow 27 \text{ 個 } 0.1 \text{ 倍} \\ \hline 35 \\ \times 27 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 0.1 \text{ 的 } 0.1 \text{ 倍} \\ = 0.01 \\ \text{連結分數算則} \\ \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100} \end{array}$$

透過單位量轉換的關係，讓學生將小數直式乘法與整數直式乘法做連結，只要算出整數部分【1345×67】及【35×27】的結果即可，最後只要確認整數乘出來的結果是幾個0.001或0.01，再依最後整數相乘完的結果加上小數點，即為最後答案。所以小數的直式乘法是以整數的直式乘法對齊方式進行。

另外，在處理「0.01的0.1倍」及「0.1的0.1倍」時應適時與分數乘法做連結，讓學生從分數乘法分母的變化中，自己察覺出「二位小數乘以一位小數，結果會是三位小數」及「一位小數乘以一位小數，結果會是二位小數」的結果，進而得到「二位乘以一位可由2+1=3得到是三位小數」及「一位乘以一位可由1+1=2得到是二位小數」的程序性結果，非由教師告知而失去讓學生察覺歸納的機會。

$$13.45 \times 6.7 = 1345 \times 67 \times 0.001$$

$$= 90115 \times 0.001 = 90.115$$

$$\begin{array}{r} 13.45 \\ \times 6.7 \\ \hline 9415 \\ 8070 \\ \hline 90.115 \end{array}$$

$$3.5 \times 2.7 = 35 \times 27 \times 0.01$$

$$= 945 \times 0.01 = 9.45$$

$$\begin{array}{r} 3.5 \\ \times 2.7 \\ \hline 245 \\ 70 \\ \hline 9.45 \end{array}$$

二、利用「轉換為分數乘法算則」的策略理解

分數的乘法算則是學生在計算小數乘法的舊經驗，所以也可以透過分數的乘法算則程序讓學生理解小數乘法直式計算直式記法對位和整數乘法算則相同，並理解被乘數及乘數的小數點位置與積的小數點位置之關係。(此部分仍以前述錯誤類型進行教學示例說明如下)

$$(例1) \quad 13.45 \times 6.7 = \frac{1345}{100} \times \frac{67}{10} = \frac{1345 \times 67}{1000}$$

$$\begin{array}{r} 13.45 \\ \times 6.7 \\ \hline 9415 \\ 8070 \\ \hline 90.115 \end{array}$$

$$(例2) \quad 3.5 \times 2.7 = \frac{35}{\textcircled{10}} \times \frac{27}{\textcircled{10}} = \frac{35 \times 27}{\textcircled{100}}$$

$$\begin{array}{r} 3.5 \\ \times 2.7 \\ \hline 245 \\ 70 \\ \hline 9.45 \end{array}$$

當小數轉換成分數形式後進行【分母乘以分母、分子乘以分子】的分數乘法算則，學生可以從算則程序中察覺分子部分即為將原小數相乘視為整數乘法的結果，而分母部分則可看出「二位小數乘以一位小數，結果會是三位小數」及「一位小數乘以一位小數，結果會是二位小數」的結果，進而得到「二位乘以一位可由 $2+1=3$ 得到是三位小數」及「一位乘以一位可由 $1+1=2$ 得到是二位小數」的程序性結果。

綜上所述，在小數的直式乘法算則中，【單位量轉換】是非常重要的思考方式。學生能用【單位量轉換】的方式來理解小數的直式乘法算則與整數運算的連結性，以及小數點位移的規則意義，即可掌握小數乘法的運算規則，此【單位量轉換】的方式更有助於延伸至後續理解分數除法、小數除法等運算程序的理解。另外，在學生對分數乘法的舊經驗基礎上，讓學生察覺分數乘法算則的程序與小數乘法算則小數點位置的關係，亦有助於學生理解小數乘法的運算規則。

新北市國小教學問題分析與教學策略

主題	<input checked="" type="checkbox"/> 數與量 <input type="checkbox"/> 幾何 <input type="checkbox"/> 代數 <input type="checkbox"/> 統計與機率			
教學年級	五年級			
提供者	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 33%; text-align: center;">溫世展</td> <td style="width: 33%; text-align: center;">服務學校</td> <td style="width: 33%; text-align: center;">安和國小</td> </tr> </table>	溫世展	服務學校	安和國小
溫世展	服務學校	安和國小		
社群成員	新北市國小數學輔導團			
教學問題	<p>一、學生對於分數概念之一：「部分/整體」的理解不清楚。</p> <p>二、學童認為「乘積一定比被乘數大」的迷思概念有待澄清。</p> <p>三、學童僅背誦計算規則(分子乘以分子、分母乘以分母)，而未瞭解其數學意義。</p>			
問題分析	<p>一、錯誤類型(例1)：$3 \times \frac{3}{4} = \frac{9}{12}$</p> <p>在學童計算整數乘以分數的問題中，會產生「整數同乘以分母和分子」的錯誤類型，因為學生所學「分子乘以分子，分母乘以分母」不足以解決問題，為了解決所面對的情境「整數乘以分數」，學童乃主動建構出錯誤的算則「整數同乘以分母和分子」。</p> <p>二、錯誤類型(例2)：$\frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$</p> <p>學生受到「同分母分數加法」，以及「整數乘法的計算結果一定比被乘數大」，這樣的學習經驗所影響，在學習「分數的乘法」時產生迷思，因此教師要透過適當的教學策略打破「乘積一定比被乘數大」的迷思。</p> <p>由上可知，學生於進行分數乘以分數的計算時，幾乎都能夠很流利地運用「分子乘以分子、分母乘以分母」的計算規則找出答案，但是並非真正理解計算規則的意涵。當教師希望學生能夠以圖形表徵呈現答案的由來時，學生並無法清楚說明理由。</p>			
相關能力指標	<p>97 課綱(分年細目)：</p> <p>5-n-08 能理解分數乘法的意義，並熟練其計算，解決生活中的問題。</p> <p>十二年國教課綱(學習內容)：</p> <p>N-5-5 分數的乘法：整數乘以分數、分數乘以分數的意義。知道用約分簡化乘法計算。處理乘積一定比被乘數大的錯誤類型。透過分數計算的公式，知道乘法交換律在分數也成立。</p>			
教學策略	<p>四則運算的概念性知識(conceptual knowledge)，不應只是讓學生熟練計算技巧或事實，還需發展學生的運算感(operation sense)，例如在解「小明在摘蘋果，小明的袋子中原來有7個蘋果，後來又摘了一些蘋果，回家時發現袋子裡面共有11個蘋果，請問小明後來又摘了幾個蘋果？」這個問題時，教師可透過討論，引導學生看出「$7+4=11$」與「$11-7=4$」這兩個式子具有相同的解題想法，以及培養學生對題意的感覺與瞭解。如此方可促進學生對四則運算有整體的瞭解，以協助學生能夠有效運用這些運算於其他情境中。</p>			

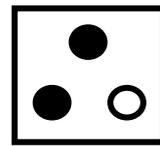
根據上述，教師要引導學生能以三種數學語言互相轉換，包括模型(a model，通常是圖形表徵)、文字題及等式。當教師提供其中一個語言表達某一四則運算後，教師應引導學生以另外兩種語言表達，呈現它們之間的相同關係。下面以例題說明建議的教學策略：

例題：伯父有一塊田地，他用 $\frac{2}{3}$ 塊田地種水果，種水果的田地中有 $\frac{3}{5}$ 是種梨子，請問伯父用多少塊田地種梨子？

教學策略建議如下：

一、澄清題意

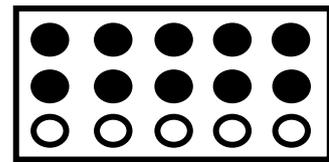
在要求學生列出 $\frac{2}{3} \times \frac{3}{5}$ 這個算式前，教師要先引導學生理解題意所呈現的是哪一個量的分數倍，亦即所要找的答案是「 $\frac{2}{3}$ 的 $\frac{3}{5}$ 倍」。



圖一

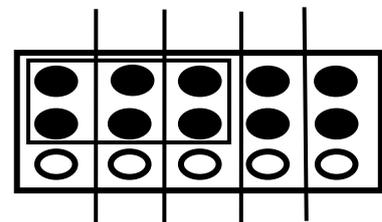
二、多元表徵解題

引導學生透過圖形表徵思考算則的運算意義。以此題來說，教師可先以圖一表示 $\frac{2}{3}$ 塊田地，當學生要將 $\frac{2}{3}$ 塊田地分成 5 等份，再取其 3 等份時，引導學生將圖一改畫成圖二，製造出 5 等份。(可以提示學生：「3 個圓圈無法切割分成 5 等份時，要怎麼辦呢?」)



圖二

此時，學生就能夠發現 15 個圓圈(一塊田地)的 $\frac{2}{3}$ 是 10 個黑色圓圈(種水果)，而 10 個黑色圓圈的 $\frac{1}{5}$ 是 2 個黑色圓圈($\frac{2}{3}$ 的 $\frac{1}{5}$ 倍)，也就是 10 個黑色圓圈的 $\frac{3}{5}$ ，是 3 個 $\frac{1}{5}$ ， $\frac{1}{5}$ 的 3 倍，也就是 6 個黑色圓圈(種梨子)。



圖三

三、比較不同型態的答案

學生可能會表示 $\frac{2}{3} \times \frac{3}{5}$ 的答案是 $\frac{6}{15}$ ，或者是 $\frac{2}{5}$ 。

答案為 $\frac{2}{5}$ 的原因，如圖三所示，因為學生會將每 3 個圓圈(2 個黑色圓圈+1 個白色圓圈)看成 1 份，則 15 個圓圈可以看成 5 份圓圈，紅色框框裡有 6 個黑色圓圈，也就是 2 份圓圈數，所以 $\frac{6}{15}$ 也可以看成是 5 份中的 2 份，所以是 $\frac{2}{5}$ 。

上述教學策略的重點為：教師需引導學生澄清分數倍的意義，並透過圖形表徵思考，以及不同型態答案的比較，進行不同單位分數的轉化($\frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{15} \rightarrow \frac{1}{5}$)與集聚。

新北市國小教學問題分析與教學策略

主題	<input checked="" type="checkbox"/> 數與量 <input type="checkbox"/> 幾何 <input type="checkbox"/> 代數 <input type="checkbox"/> 統計與機率
教學年級	五年級
提供者	周恒奇 服務學校 光復國小
社群成員	新北市國小數學輔導團
教學問題	小數乘法中，處理學生認為積一定比被乘數大(即乘完結果一定變大)的迷思概念錯誤類型。
問題分析	<p>二年級時，整數乘法的啟蒙情境來自於累加相同的個物(被乘數)，是加法的上位概念，也就是加法累積為全體的概念，因此當乘數愈大時，累積的全體(積)會愈大，此時「積會大於被乘數」。</p> <p>數學概念的學習時常需要進行概念的推廣，乘法概念也可以說是加法概念的推廣，分數和小數也是從整數中推廣出來，當乘法概念從自然數推廣到交換律、結合律時仍成立，但自然數的乘法會愈乘愈大的性質推廣到分數和小數的乘法時卻變了，當乘數為真分數或純小數時，就變成愈乘愈小。</p> <p>「乘法會愈乘愈大」和「積一定比被乘數大」的認知，在乘數為純小數時，會讓學生出現「$1.5 \times 0.5 > 1.5$」的錯誤。</p>
相關能力指標	97 課綱(分年細目)： 5-n-11 能用直式處理乘數是小數的計算，並解決生活中的問題。 十二年國教課綱(學習內容)： N-5-8 小數的乘法：整數乘以小數、小數乘以小數的意義。乘數為小數的直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。處理乘積一定比被乘數大的錯誤類型。

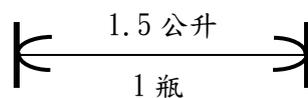
一. 利用情境布題，配合線段圖讓學生理解「乘數為純小數」的意義

在進行「乘數為純小數」的乘法問題「 $1.5 \times 0.5 \square 1.5$ 」時，可先透過情境布題，以下以例題說明教學策略：

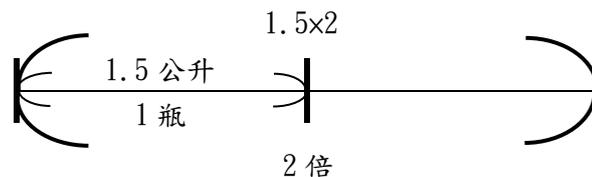
例題：

一瓶可樂是 1.5 公升，1 瓶是幾公升？2 瓶是幾公升？0.5 瓶可樂是幾公升？

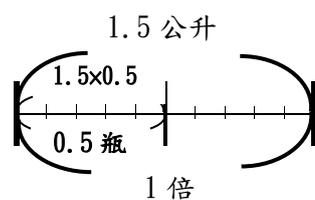
本題情境中是以「1.5」公升為單位量，情境中的「1 瓶」為單位數，此時乘數為「1」，積就是「1 個 1.5 公升」，此時會產生算式「 $1.5 \times 1 = 1.5$ 」，它的線段圖如下圖：



情境中的「2 瓶」為單位數，即乘數為「2」，它的線段圖是以單位量「1.5」公升為主，向外累 2 個單位量「1.5」公升，積就是「2 個 1.5」公升，此時會產生算式「 $1.5 \times 2 > 1.5$ 」，如下圖：



情境中的「0.5 瓶」為單位數，即乘數為「0.5」，它的線段圖是先將單位量「1.5」公升向內十等份為更小的單位量，再累這個小單位量，如下圖，此時會產生算式「 $1.5 \times 0.5 < 1.5$ 」。



透過以上三個線段圖引導學生發現，在以被乘數為單位量時，會有以下幾種規律：第一種：乘數愈大積愈大。第二種：當乘數大於 1，是以被乘數(單位量)向外累數，因此會產生「積 > 被乘數」；當乘數小於 1，是以被乘數(單位量)向再等份，因此會產生「積 < 被乘數」。

教學策略

二. 抽離情境，從觀察算式中「乘數」的變化，發現「被乘數」和「積」的大小關係

第二階段的布題開始抽離情境，純粹以算式呈現，在黑板板書由上而下依序列出，並將乘法算式中的每個數對齊，如下：

$$\begin{array}{l} 1.5 \times 2 = 3 \\ 1.5 \times 1.1 = 1.65 \\ 1.5 \times 1 = 1.5 \\ 1.5 \times 0.9 = 1.35 \\ 1.5 \times 0.5 = 0.75 \end{array}$$

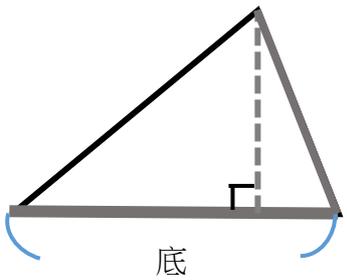
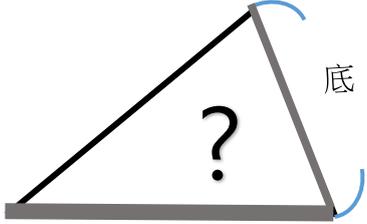
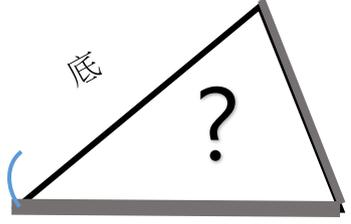
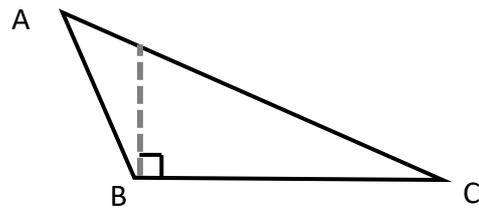
先請學生觀察以上五個算式中「被乘數」、「乘數」和「積」的數字變化，教師再進行以下四個提問：

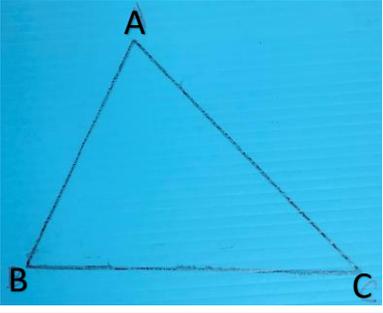
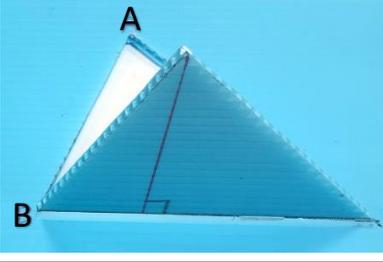
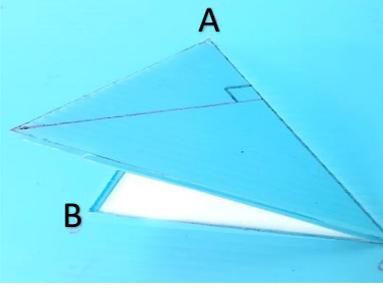
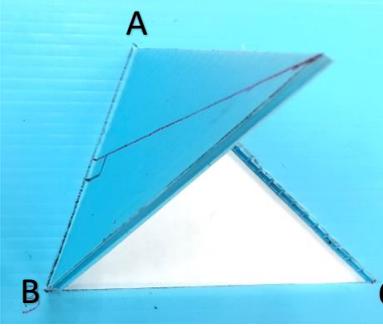
- (一) 第一個提問：當「被乘數」不變時，「積」一定比「被乘數」大嗎？目的在引導學生發現「積也有可能比被乘數小」
- (二) 第二個提問：當「被乘數」不變時，乘法數式中哪一數的改變會影響「被乘數」和「積」的大小關係？目的在引導學生察覺「乘數」是影響關鍵。
- (三) 第三個提問：以前的乘法會愈乘愈大，為何「 1.5×0.9 」和「 1.5×0.5 」的積會比被乘數小？目的在引導學生發現當「乘數 <1 」時就不會愈乘愈大，且「積 $<$ 被乘數」。
- (四) 第四個提問：何時「積 $>$ 被乘數」？何時「積 $=$ 被乘數」？何時「積 $<$ 被乘數」？目的在引導學生發現「乘數 >1 」、「乘數 $=1$ 」、「乘數 <1 」。

接下來請學生說明從以上的提問中得到的想法，教師進行檢核和確認，最後師生共同歸納出以下三點：

乘數 >1 ，積 $>$ 被乘數
乘數 $=1$ ，積 $=$ 被乘數
乘數 <1 ，積 $<$ 被乘數

新北市國小教學問題分析與教學策略

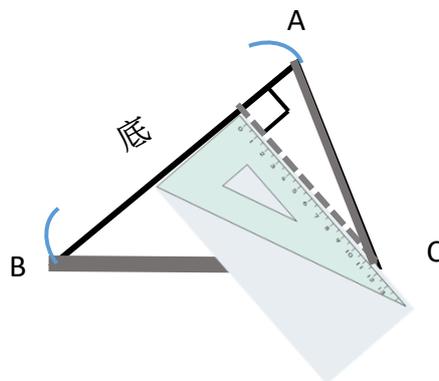
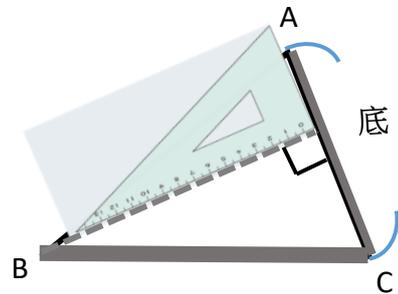
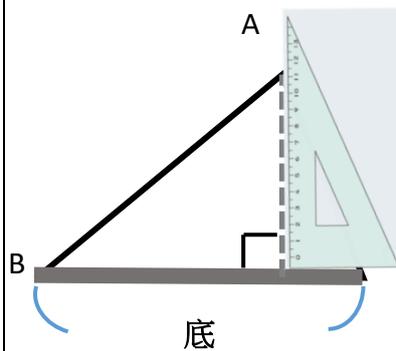
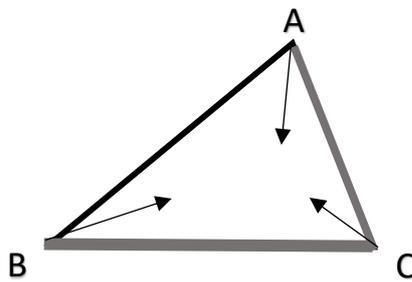
主題	<input type="checkbox"/> 數與量 <input checked="" type="checkbox"/> 幾何 <input type="checkbox"/> 代數 <input type="checkbox"/> 統計與機率		
教學年級	五年級		
提供者	吳偉全	服務學校	自強國小
社群成員	新北市國小數學輔導團		
教學問題	<p>在計算三角形的面積時，學生能說出高的定義但未能理解高的意義，因而無法找出正確的高。</p>		
問題分析	<p>學生在計算三角形的面積時，常常會有以下的迷思或錯誤情況發生：</p> <p>一、認為三角形的高僅有一條，且是以圖形下方的邊為底 學生認為所找出來垂直於底邊的線段是此三角形唯一的高，然而當老師將圖形的底邊進行更動時，學生則無法辨認何者三角形的底，因而無法找出三角形的高。</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;">   </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center; margin-top: 20px;">  </div> <p>二、誤以為的高一定都在三角形的內部 以下圖鈍角三角形 ABC 為例，學生在尋找圖形的高時，很容易以直觀的經驗認為位在圖形下方的邊為底邊(如邊 BC 和邊 GF)，認為三角形的高即是頂點 B 和邊 AC 間最近的距離或連線，因而在圖形內找高，出現如下圖的可能錯誤類型：</p> <div style="text-align: center; margin-top: 20px;">  </div>		
相關	97 課綱(分年細目) 5-n-18 能運用切割重組，理解三角形，平行四邊形與梯形的面積		

能力指標	公式。(同 5-s-05) 十二年國教課綱(學習內容) S-5-2 三角形與四邊形的面積：操作活動與推理。利用切割重組， 建立面積公式，並能應用。		
教學策略	以下針對學生典型的錯誤類型進行教學策略說明：		
	一、透過平面圖形立體化的操作，強化高的定義		
	教師準備一張海報紙，在紙上繪出三個相同的三角形，依序將同一個三角形的任二邊進行切割，再分別以三個邊為底邊。將平面的三角形圖形立起來使其能直立於桌面，接著請學生進行觀察以三角形任一個邊為底邊時，探討高在哪裡。這時學生會發現：每一種直立情形（貼近桌面的邊是底邊），高都只有一條。		
			
			以 BC 邊為底邊
		以 AC 邊為底邊	
		以 AB 邊為底邊	

二、確認頂點與對邊的關係，並利用三角板畫出垂直線，找出正確的高

教學重點：在觀察與理解高的定義後，可配合立體的圖形與平面圖形，強化頂點與對邊的相對關係，請學生找出各個頂點與對應邊的高，進而加深對高的認知。

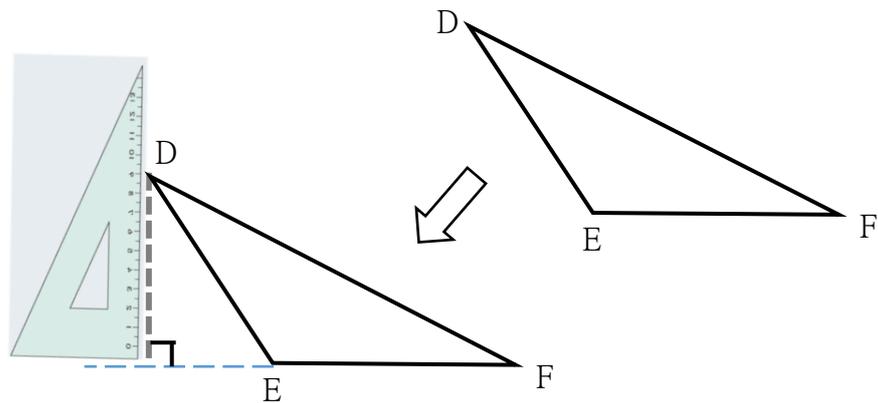
實際操作：教師利用三角形圖卡，詢問學生：『三角形的頂點A的對邊是哪一個邊？』請學生指出頂點A和對邊BC這兩個部分確認這二者的對應關係。相同的做法，請學生依序找出其他兩組頂點和對邊的對應關係，再學生使用直角三角板，畫出通過頂點且垂直於底邊的線，即是以這個邊為底邊的高。



三、透過繪製延長底邊的輔助線，解決高在三角形外部的問題

教學重點：學生在確認頂點與底邊的對應關係後，指導學生利用直角三角板畫出正確的高。

實際操作：以下圖三角形 DEF 為例，請學生畫出以邊 EF 為底邊的高，學生會發現無法在圖形內畫出高，此時老師可指導學生將底邊延長，繪製出輔助線，再從頂點畫一條垂直輔助線的線段，即是以邊 EF 為底邊的高。



備註

學生在計算「平行四邊形」的面積時，所遭遇到的迷思會與計算「三角形」面積時所遇到雷同，教師可以參照上述的教學策略，來引導學生進行解題。

新北市國小教學問題分析與教學策略

主題	<input type="checkbox"/> 數與量 <input type="checkbox"/> 幾何 <input checked="" type="checkbox"/> 代數 <input type="checkbox"/> 統計與機率		
教學年級	五年級		
提供者	溫世展	服務學校	安和國小
社群成員	新北市國小數學輔導團		
教學問題	<p>一、學童僅背誦$a \div b \div c = a \div (b \times c)$的計算規則，而未瞭解去括號前後的數學意義。</p> <p>二、學童可以透過計算後的答案知道$a \div b \div c$與$a \div (b \times c)$這兩個算式的結果相同，但無法轉換成相對應的情境。</p>		
問題分析	<p>一、學生通常會出現的錯誤解法為$24 \div 6 \div 2 = 24 \div (6 \div 2)$或者是$24 \div (6 \times 2) = 24 \div 6 \times 2$。以上均顯示學生未瞭解去括號前後的數學意義，且未背誦$a \div b \div c = a \div (b \times c)$的計算規則時，則無法正確計算。</p> <p>二、教師通常直接宣告此計算規則，學生也能夠程序性地運用計算規則找到$a \div b \div c = a \div (b \times c)$的計算題答案，或者是以比較兩邊算式的結果確認答案。但是當教師希望學生能夠以相對應的情境，說明這兩個算式的答案為何相同時，學生並無法清楚說明原因，也不會解應用問題。因此教師應由情境帶入，讓學生理解不是兩邊答案相同，算式就相同，而是兩個算式在同一問題情境下亦能成立。</p>		
相關能力指標	<p>97 課綱(分年細目)：</p> <p>5-a-02 能在具體情境中，理解先乘再除與先除再乘的結果相同，也理解連除兩數相當於除以此兩數之積。在具體操作下，發現計算過程中連除兩數的結果與除以兩數之積的結果相同。(限整數)</p> <p>十二年國教課綱(學習內容)：</p> <p>R-5-2 四則計算規律 (II)：乘除混合計算。將計算規律應用於簡化混合計算。乘除混合：含「連除兩數等於除以兩數之積」；不做$a \div (b \div c)$之去括號。必須呈現以下原則的範例：將應用問題轉化成算式後，再利用計算規律調整算式進行計算解題（其中調整後的算式已無法以原情境來解釋）。</p>		
教學策略	<p>四則運算的概念性知識(conceptual knowledge)，不應只是讓學生熟練計算技巧或事實，還需發展學生的運算感(operation sense)，例如在解「小明在摘蘋果，小明的袋子中原來有7個蘋果，後來又摘了一些蘋果，回家時發現袋子裡面共有11個蘋果，請問小明後來又摘了幾個蘋果？」這個文字題時，教師可透過討論，引導學生看出「$7+4=11$」與「$11-7=4$」這兩個式子是相同的，以及培養學生對題意的感覺與瞭解。如此可促進學生對四則運算規則的意涵更加理解，並能協助學生有效運用這些運算於其他情境中。</p> <p>根據上述，教師要引導學生能以三種數學語言互相轉換，包括模型(a model，通常是圖形表徵)，文字題，等式。當教師提供其中一個語言表達某一四則運算後，教師應引導學生以另外兩種語言表達，呈現它們之間的相同關係。</p>		

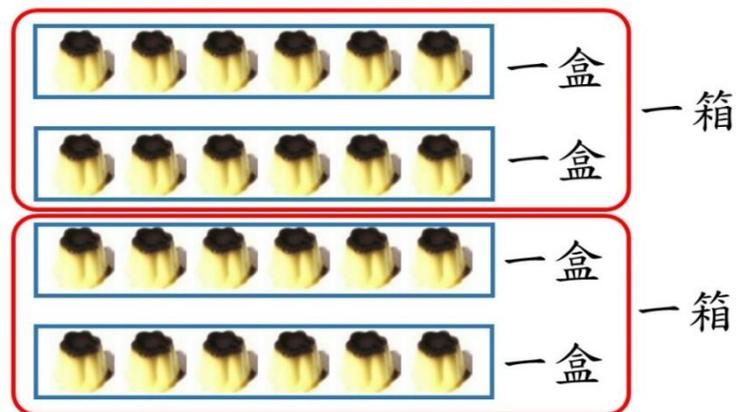
下面以例題說明建議的教學策略：

例題：有 24 個布丁，每 6 個布丁裝 1 盒，每 2 盒裝一箱，請問可裝成幾箱？把問題用一個算式記下來。小明的算式記成： $24 \div 6 \div 2 = (\quad)$ 。小王的算式記成： $24 \div (6 \times 2) = (\quad)$ 。請問這兩個算式都可以嗎？

教學策略建議如下：

一、強調單位量的不同

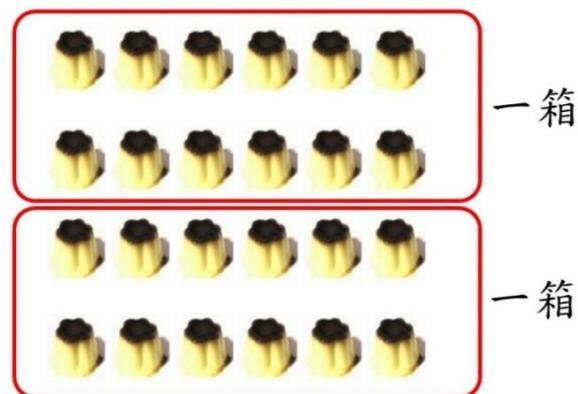
教師引導學生每 6 個布丁圈起來，並表示 $24 \div 6 \div 2$ 的 $24 \div 6$ 是分成 4 盒，然後引導學生理解，接續除以 2 的意思為，將 4 盒布丁，2 盒 2 盒裝一箱，最後分成 2 箱，即 $24 \div 6 \div 2 = (2)$ 。(如圖一)



圖一

二、透過圖形表徵引導學生理解單位量的轉換

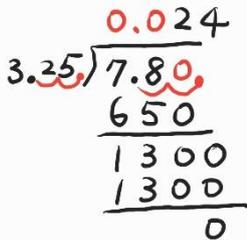
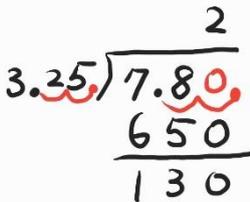
接著教師引導學生將 2 盒，每盒各 6 個布丁，一共 12 個布丁圈起來，引導學生理解 (6×2) 為 12 個布丁裝一箱， $24 \div (6 \times 2) = (2)$ ，表示 24 個布丁共裝成 2 箱。(如圖二)

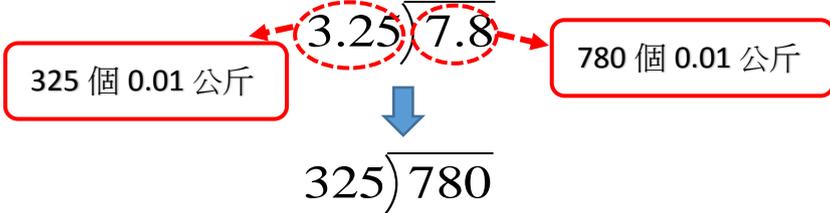
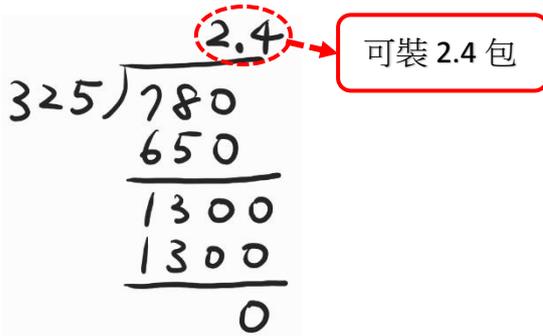


圖二

上述教學策略的重點為：教師需引導學生透過不同單位量、詞(個、盒、箱)的敘述，以及文字題與圖形表徵的轉換，理解在不同語意情境中，「 $24 \div 6 \div 2$ 」以及「 $24 \div (6 \times 2)$ 」這兩個算式是相同的。

新北市國小教學問題分析與教學策略

主題	<input checked="" type="checkbox"/> 數與量 <input type="checkbox"/> 幾何 <input type="checkbox"/> 代數 <input type="checkbox"/> 統計與機率
教學年級	六年級
提供者	林心怡 服務學校 昌平國小
社群成員	新北市國小數學輔導團
教學問題	<p>一、學生不易理解小數除法直式算則中，被除數與除數同時移動小數點的意義。</p> <p>二、學生在進行小數除法直式計算時，對於計算出來的商及餘數之小數點位置的意義難以理解，也是在算則中學生較不易理解的程序知識。</p>
問題分析	<p>一、學生在計算小數除法直式算則時，不理解被除數與除數同時移動小數點的意義，計算後的商不知如何對齊小數點的位置。</p> <p>學生錯誤類型（例 1）： 學生先移動被除數及除數小數點後進行計算，計算完成後的商受到原被除數的小數點位置而對齊，商的小數點位置標示錯誤。 題目：有 7.8 公斤的米，每 3.25 公斤裝一包，可以裝成多少包？ $7.8 \div 3.25 = 0.024$</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p style="text-align: right;">答：可以裝成 0.024 包</p> <p>二、學生在計算小數除法直式算則時，不理解餘數的意義，計算後的餘數不知如何對齊小數點的位置。</p> <p>學生錯誤類型（例 2）： 學生在計算小數除法算則時，學生不理解當被除數及除數進行單位量轉換後餘數的單位量也需轉換，所以會將單位量轉換為整數計算後的餘數當作最後餘數的結果。 題目：有 7.8 公斤的米，每 3.25 公斤裝一包，最多可以裝成多少包？還剩下多少公斤？ $7.8 \div 3.25 = 2 \cdots 130$</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p style="text-align: right;">答：可裝成 2 包，還剩下 130 公斤</p>

	<p>本文將針對除數為小數的直式除法算則中，學生常出現的錯誤類型進行教學建議。</p>
<p>相關能力指標</p>	<p>97 課綱(分年細目)： 6-n-06 能用直式處理小數除法的計算，並解決生活中的問題。 十二年國教課綱(學習內容) N-6-4 小數的除法：整數除以小數、小數除以小數的意義。直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。處理商一定比被除數小的錯誤類型。 (備註：可不處理餘數問題，若要處理，限於具體合理的生活情境，商限定為整數，並小心在直式計算中處理餘數問題。餘數問題不評量。)</p>
<p>教學策略</p>	<p>有效讓學生理解小數的除法直式算則，建議延續小數乘法中「單位量轉換的關係」或「轉換為分數乘法的程序」讓學生理解小數的除法直式算則中的程序概念。</p> <p>一、利用「單位量轉換」的策略理解</p> <p>前述兩個錯誤類型是同一種概念的教學，建議可透過「單位量轉換」的方式，連結並推廣小數除法直式記法對位和整數除法算則相同，並理解被除數及除數轉換後的單位量與餘數單位量之關係。以下針對如何使用「單位量轉換」的方式處理學生典型的兩個錯誤類型，進行教學策略說明如下： (例 1) 題目：有 7.8 公斤的米，每 3.25 公斤裝一包，可以裝成多少包？ $7.8 \div 3.25 =$</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>透過單位量轉換將題意轉換為：「有 780 個 0.01 公斤的米，每 325 個 0.01 公斤裝一包，可以裝成多少包？」也就是轉換單位量後，可將原題視為「總共有 780 個，每 325 個裝一包，可裝成幾包？」此時算的商數只與轉換單位後的整數有關。</p> <div style="text-align: center;">  </div>

所以在計算小數的直式除法時，應延續小數乘法學習時單位量轉換的關係，讓學生將小數直式除法與整數直式除法做連結，只要算出整數部分【 $780 \div 325$ 】的結果即為最後答案。所以小數的直式除法是以前整數的直式除法運算方式進行。

(例 2):

題目：有 7.8 公斤的米，每 3.25 公斤裝一包，最多可以裝成多少包？還剩下多少公斤？

$$7.8 \div 3.25 =$$

$$325 \overline{) 780}$$

透過單位量轉換將題意轉換為：「有 780 個 0.01 公斤的米，每 325 個 0.01 公斤裝一包，最多可以裝成幾包？還剩下多少個 0.01 公斤？」也就是轉換單位量後，可將原題視為「總共有 780 個，每 325 個裝一包，最多可裝成幾包？還剩下幾個？」這裡餘數的單位已經從「公斤」換為「幾個 0.001 公斤」。

$$325 \overline{) 780}$$

$$325 \overline{) 7.80}$$

所以在計算小數的直式除法的餘數問題時，仍是透過單位量轉換的關係，讓學生算出整數除法的結果後，透過原問題情境中題意轉換後來思考餘數單位量轉換的結果，進而理解餘數的單位。並透過標示被除數及除數的原小數點位置，讓學生察覺餘數的小數點會與被除數原來小數點位置相同的程序性結果。

二、利用「轉換為同分母分數除法」的方式理解

同分母分數的除法是學生在計算小數除法的舊經驗，所以也可以透過同分母分數的除法概念讓學生理解小數除法直式記法對位和整數除法算則相同，並理解被除數及除數轉換後的單位量與餘數單位量之關係。(此部分仍以前述錯誤類型進行教學示例說明如下)

$$(例1) \quad 7.8 \div 3.25 = \frac{78}{10} \div \frac{325}{100} = \frac{780}{100} \div \frac{325}{100} = 780 \div 325 = 2.4$$

學生可從上式連結 $3.25 \overline{)7.8} \rightarrow 325 \overline{)780}$ ，察覺如何換成同分母與透過同時轉換兩個小數為整數之間的關係，並理解小數的直式除法是以整數的直式除法運算方式進行，且與整數除法的商數相同。

$$(例2) \quad 7.8 \div 3.25 = \frac{78}{10} \div \frac{325}{100} = \frac{780}{100} \div \frac{325}{100} \\ = 780 \left(\text{個} \frac{1}{100} \right) \div 325 \left(\text{個} \frac{1}{100} \right) = 2 \left(\text{包} \right) \cdots 130 \left(\text{個} \frac{1}{100} \right)$$

教師可透過先前分數除法中轉換單位處理餘數的舊經驗，提供學生理解小數除法餘數的單位。

當小數轉換成同分母分數形式後，仍須利用單位量轉換的方式轉變成整數除法算則，學生可以從單位量轉換的過程中理解整數除法與小數除法計算時商數及餘數之間的轉換關係。

綜上所述，在小數的直式除法算則中，【單位量轉換】仍是非常重要的思考方式。學生能用【單位量轉換】的方式來理解小數的直式除法算則與整數運算的連結性，以及小數點位移的規則意義，即可掌握小數除法的運算規則，此【單位量轉換】的方式更統整了之前學習小數乘法、分數除法等運算程序的理解。另外，教師也可幫助在學生在同分母分數除法的舊經驗基礎上，讓學生察覺分數除法計算與小數除法計算中商數及餘數小數點位置的關係，亦有助於學生理解小數除法的運算規則。



國小數學疑難問題之有效教學策略

出版單位: 新北市國民教育輔導團國小數學領域輔導小組

指導單位: 新北市政府教育局國民教育輔導團

主 編: 許德田

執行編輯: 吳國銘、謝秋如、方慶林、林心怡

作 者: 李筱珊、詹婉華、鄭惠娟、李廣祺、胡錦芳、江珮瑤、
王麗如、馬恬舒、李佳容、林心怡、溫世展、周恒奇、
吳偉全 (依作品順序)

封面設計: 采恒企業有限公司

電 話: (02) 8667-3566

編印單位: 新北市新店區新店國民小學

地 址: 231新北市新店區新店路2號

電 話: (02)2910-3483

出版日期: 中華民國109年2月

