

新北市數學領域核心素養導向教學活動設計表

單元名稱：擴分、約分與通分

授課年級：五年級

本節教學主題：從擴、約分理解等值分數

設計者：溫世展

節數：共三節，本節為第一節

社群成員：新北市數學輔導團

一、單元的期望學習結果

(一) 單元學習目標

1. 運用擴分和約分，進行等值分數的換算。
2. 運用擴分和約分，理解通分的意義。
3. 運用通分的方法，解決異分母分數的大小比較。

(二) 課程綱要學習重點

對應的學習表現	對應的學習內容
n-III-4：理解約分、擴分、通分的意義，並應用於異分母分數的加減。	N-5-4：用約分、擴分處理等值分數並作比較。用通分做異分母分數的加減。養成利用約分化簡分數計算習慣。

二、學生先備經驗與可能的學習困難

學生先備知識	學生可能的學習困難
<ol style="list-style-type: none">1. 理解等值分數的意義，並透過等值分數進行簡單異分母分數的大小比較。2. 認識因數、倍數、公因數和公倍數。	<ol style="list-style-type: none">1. 學生未確實瞭解等值分數的意義，因此無法瞭解為什麼用擴、約分的算則，就能找到符合題意的分數。2. 受到自然數的學習經驗，而以分子的大小比較、或分母的大小比較、或同時比較分子的大小及分母的大小來解分數大小比較問題。

三、教材分析與教學策略

(一) 等值分數教材的重要性

在國小階段，學生理解等值分數的概念，有益於後續進行分數的大小比較、異分母分數的合成、分解問題及分數倍數問題，比、比例、百分率等等內容的學習。

然而 Behr, Lesh, Post, & Silver (1983) 針對英國 11 歲兒童的訪談結果分析，發現許多學生不認為 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ 。呂玉琴(1991)的研究亦指出，在我國小五、六年級的學童身上，也發現有許多的學生

即使接受過等值分數的教學，仍然不認為 $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ 。

張英傑、周菊美(2005)指出，當學生以「要得到一個等值分數用相同的非零的數乘(或除)上方數和下方數」規則，找到已知分數的等值分數，學生可以容易的學習並使用規則，但對所找到分數的關聯沒有任何想法，只成為一種乘法的練習。

根據上述，教學者希望能夠透過此單元的教學，在進行約分、擴分的教學過程中，引導學生將擴、約分的學習，連結到等值分數概念的學習，以促進學生對於等值分數概念的理解。

(二)三個版本的五年級「擴分、約分和通分」教材之概要分析

康軒版、翰林版、南一版的「擴分、約分和通分」教材編排如下：

一、康軒版

第三單元：擴分、約分和通分--擴分、約分、通分、分數比較大小、分數數線。

二、翰林版

第六單元：擴分、約分和通分-擴分和等值分數、約分和等值分數、通分和分數的大小比較。

三、南一版

第四單元：擴分、約分和通分-擴分、約分、通分、異分母分數比較大小、繪製分數的數線。

教學者認為三個版本在教學內容順序的安排上，均先依序帶入擴分、約分和通分的教學內容，再引入分數的大小比較的教學內容。

此外，教學者根據三個版本的課本內容發現，在擴分、約分教材的情境安排上，各版本在連續量與離散量情境出現的次數差異不大。在解題策略方面，各版本相近，均在連續量情境下採「計數分割份數多寡」策略(連續量離散化)(李源順，2018)，透過再分割或重組產生更小的單位分數來比較其部分量的大小；以及在離散量情境下，採取「計數內容物數量」策略，透過合併或重組，了解子集合與集合的比例不變。

(三)預定教學策略

鍾靜(2010)指出，對於分數的發展，教學重點在於先進入單位分數，要和學生強調平分的概念，後續可用透明分數板(圓形分數板)讓學生理解等值分數的概念，再帶入約分與擴分的概念。

呂玉琴、李源順、劉曼麗、吳毓瑩(2009)亦表示，圓形的好處是部份量的弧度讓學生比較容易看到部份量和整個圓的關係；他們並指出，約分和擴分都是等值分數的呈現，約分是將很多份視為一大份的等值分數的表現，而擴分正好相反，是將一份細分成很多小份的等值分數的表現。教師在教約分、擴分時，可以連結學生的等值分數概念，而不是只是同除以一數或同乘以一數的數字運算而已。

李源順(2018)指出，在約分和擴分的過程中，會在原來的兩個單位量中，再出現另一個單位量，亦即單位轉換，這是學生很容易弄錯的地方。

教學者本次教學方式為小組討論教學，根據上述內容，教學者本次進行擴、約分的教學時，將會充分運用圓形分數板，並提供各組多達七種單位分數($\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{5}$ 、 $\frac{1}{6}$ 、 $\frac{1}{8}$ 、 $\frac{1}{9}$ 、 $\frac{1}{12}$)的圓形分數板，以提供學生多元思考各種解題策略的機會，並在學生產出多樣答案的過程中，引導學生觀察這些等值分數的分子和分子、分母和分母之間有何關係，促進學生對於擴、約分概念的理解。並於教學過程中，適時提醒學生注意擴、約分後都要轉換為另一個單位。

另外本次教學活動設計呈現的教學問題依序為：「小明的媽媽每個禮拜四都會固定加班到晚上9:00，下班後都會買一個大披薩給全家人當作是禮拜五回家時的備用點心。因為小明都是第一個回到家的人，所以星期五下午放學後，小明通常都會是家裡第一個吃披薩的人。這禮拜五剛好期中考結束，小明邀請同學一起到家裡玩，這時候大家都肚子餓了，小明突然想到冰箱裡有媽媽前一天買的大披薩，就趕緊打開冰箱想要將披薩微波，可是小明打開冰箱後，竟然發現大披薩被吃掉了一部份，只剩下 $\frac{2}{3}$ 個披薩。小明心想：還好剩下的披薩夠吃，否則就糗大了，所以他很想知道，到底是誰先吃掉了一部份的披薩。目前只知道有兩個線索：

1.小明的家人有爸爸、媽媽。

2.吃掉的披薩，可能被切成桌上各種圓形分數板的樣子。

請各組同學幫小明想想看，到底是誰吃掉了披薩？吃掉了多少披薩呢？盡量找出所有可能的答案，並說說看你是怎麼想的，說明的越詳細越好。」以及「小玲的媽媽買了一個披薩，小玲下課回到家先吃了其中一部份披薩，最後剩下 $\frac{3}{5}$ 個披薩，請問小玲吃了多少盒披薩？請用各組桌上所有的

圓形分數板，找出所有可能的答案。」，最後再提問「誰吃了比較多的披薩？」。數字設計為 $\frac{3}{5}$ 、 $\frac{2}{3}$ 的原因如下：

由於學生學過自然數的大小比較，因此解分數大小比較問題時，部分學生會受到自然數的學習經驗，而以分子的大小比較、或分母的大小比較、或同時比較分子的大小及分母的大小來解題。例如部分學生會以分子 $3>2$ 而認為 $\frac{3}{5}>\frac{2}{3}$ ；也有學生會以分母 $5>3$ ，而認為 $\frac{3}{5}>\frac{2}{3}$ ；另外還有學生會使用分子 $3>2$ 且分母 $5>3$ ，而認為 $\frac{3}{5}>\frac{2}{3}$ 。以本次教學者提出的問題來說，無論採用哪一種解法，都將獲得錯誤的答案。

學生在探究答案的過程中，會使用數塊不同的單位分數填滿，教學者將引導學生透過多樣不同答案(等值分數)的產出與比較，以及觀察這些等值分數的分子和分子、分母和分母之間有何關係，發現擴、約分的數學意義與算則。

四、各節次學習活動設計

節次	學習目標	活動目標	評量方式
1 (本次授課)	擴、約分(一)	1-1 檢驗學生是否具有單位分數與等分概念。 1-2 理解擴、約分的意義。	實際操作 討論發表 解題紀錄
2	擴、約分(二)	2-1 發展擴分的算則。 2-2 發展約分的算則。	實際操作 討論發表 解題紀錄
3	通分和異分母分數的大小比較	3-1 通分：利用擴分和約分的算則，把不同分母的分數化成相同分母的分數。 3-2 找到兩個分母的最小公倍數，將兩個分母擴分成最小公倍數的分母，再比較。	實際操作 討論發表 解題紀錄

		3-3 將兩個分母約分成相同的分母的分數，再比較。	
--	--	---------------------------	--

五、第 1 節課的學習活動

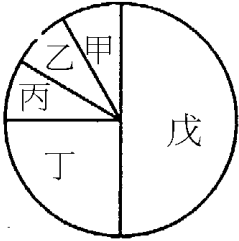
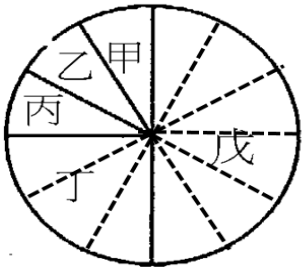
(一)學習的主要概念與活動

活動目標的主要概念	對應的學習活動
1-1 檢測學生的單位分數與等分概念。	1-1-1 先透過分數概念問題，檢驗學生是否具有單位分數與等分概念。
1-2 理解擴、約分的意義。	1-2-1 教師布題，讓學生分組討論產出各種解題策略。 1-2-2 學生呈現並發表解題策略，教師引導學生比較與觀察這些解題策略(不同等值分數)的分子和分子、分母和分母之間有何關係，進而發現擴、約分的意義。 1-2-3 教師總結。

(二)素養導向的課程與教學

素養導向教學設計要點		與本節課活動內容的關聯說明
轉	<ul style="list-style-type: none"> ■ T1 情境問題轉化 ■ T2 新舊經驗銜接 ■ T3 數學概念聯結 	<p>T1: 透過生活情境問題，思考運用單位分數、等分概念、等值分數表達想法的需求。</p> <p>T2: 從學生單位分數、等分概念的舊經驗，引入運用各種單位分數的組合，透過擴、約分深入理解等值分數的意義。</p> <p>T3: 透過等值分數的分子和分子、分母和分母之間的關係，促進學生對於擴、約分概念的理解。</p>
做	<ul style="list-style-type: none"> ■ D1 概念操作理解 ■ D2 解題策略探究 ■ D3 數學語言溝通 	<p>D1: 透過不同單位分數的圓形分數板，表徵、觀察與說明擴、約分與等值分數的連結。</p> <p>D2: 利用七種單位分數的圓形分數板，探究多元解題策略。</p> <p>D3: 利用圓形分數板，說明與發表所找到解題策略的依據。</p>
得	<ul style="list-style-type: none"> ■ G1 思考能力提升 ■ G2 解題態度培養 ■ G3 共同學習增能 	<p>G1: 透過不斷重組不同單位分數的過程，提升學生數學思考的能力。</p> <p>G2: 體驗與願意嘗試窮盡所有可能解題策略。</p> <p>G3: 透過小組共同討論、探究與發表各種不同解題策略，讓學生能欣賞並分享各種不同解題策略，以及感受獨特解題策略之數學創造力表現。</p>

(三)學習活動的設計

學習活動	教學流程與主要布題	學生可能反應 教學策略介入與評量	時間	對應素養導向教學設計要點 (轉 T、做 D、得 G)
<p>1-1-1</p> <p>1-2-1</p>	<p>導入活動</p> <p>由舊經驗引入「尋找單位分數」與「等分」的需求。</p> <p>教師布題：</p> <p>教學者展示下圖，並詢問學生：「溫老師班上有個同學說甲佔這個圓的五分之一，請問這位同學的說法對不對？為什麼？」。</p>  <p>教師可以提問：「為什麼甲佔了全部的 $\frac{1}{5}$？5 是指圓形圖的哪裡？1 又是指圓形圖的哪裡？」，「這個分成幾塊？有等分嗎？」，引導學生連結之前剛開始學習分數時的等分概念。接著<u>引導學生能將戊、丁分割如下圖</u>，並從中發現甲佔了整個圓的 $\frac{1}{12}$。</p> 	<p>學生迷思概念說明</p> <p>回答「對」的學生是缺乏等分的概念，以為這個圓被分成 5 份，但不管這 5 份是否一樣大小，而認為甲佔這個圓的 $\frac{1}{5}$。</p>	5 分	<p>T2 新舊經驗銜接：從學生單位分數、等分概念的舊經驗，引入運用各種單位分數的組合。</p>

1-2-2	<p>開展活動</p> <p>教師以故事情境鼓勵學生思考解題策略。</p> <p>故事</p> <p>小明的媽媽每個禮拜四都會<u>固定加班到晚上 9:00</u>，下班後都會買一個大披薩給全家人當作是禮拜五回家時的備用點心。因為小明都是第一個回到家的人，所以星期五下午放學後，小明通常都會是家裡第一個吃披薩的人。</p> <p>這禮拜五剛好期中考結束，小明邀請同學一起到家裡玩，這時候大家都肚子餓了，他突然想到冰箱裡有媽媽前一天買的大披薩，就趕緊打開冰箱想要將披薩微波，可是打開冰箱後，竟然發現大披薩被吃掉了一部份，只剩下$\frac{2}{3}$個披薩。</p> <p>小明心想：還好剩下的披薩夠吃，否則就糗大了，所以他很想知道，到底是誰先吃掉了一部分的披薩。</p> <p>目前只知道有兩個線索：</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 小明的家人有爸爸、媽媽。 2. 吃掉的披薩，可能被切成桌上七種圓形分數板的樣子。 <p>請各組同學幫小明想想看，到底是誰吃掉了披薩？吃掉了多少披薩呢？盡量找出所有可能的答案，並說說看你如何找到答案，說明的越詳細越好。</p> <p>教師藉由上述情境讓學生進行分組討論可能答案，並讓學生發表所找到的各種解題策略。</p> <p>學生可能產生三種解題路徑，教學者分別舉例說明可能的教學過程如下：</p>	<p>學生能夠產出各種解題策略。</p> <p>教師提供各組七種單位分數($\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{5}$、$\frac{1}{6}$、$\frac{1}{8}$、$\frac{1}{9}$、$\frac{1}{12}$)的圓形分數板進行解題探究。</p>	15 分	<p>T1 情境問題轉化透過生活情境問題，思考運用單位分數、等分概念、等值分數表達想法的需求。</p> <p>T2 新舊經驗銜接：從學生單位分數、等分概念的舊經驗，引入運用各種單位分數的組合，透過擴、約分深入理解等值分數的意義。</p> <p>D2 解題策略探究：利用七種單位分數的圓形分數板，探究多元解題策略。</p> <p>G1 思考能力提升：透過不斷重組不同單位分數，提升學生數學思考的能力。</p> <p>G2 解題態度培養：體驗與願意嘗試窮盡所有可能解題策略。</p> <p>G3 共同學習增能：透過小組共同討論、探究與發表各種不同解題策略，讓學生能欣賞並分享各種不同解題策略</p>
-------	--	--	------	---

◆ 發表解題路徑 I 的過程

教師提問以引導學生發現 $\frac{1}{3}$ 與 $\frac{2}{6}$ 之間存

在 $\frac{1}{3} = \frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{2}{6}$ 的關係。

教師引導學生利用圓形分數板說明

$\frac{1}{3} = \frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{2}{6}$ 的分子分母均乘以 2 的
數學意義(擴分是將一份細分成很多小份的等值分數的表現)。

◆ 發表解題路徑 II 的過程

教師提問以引導學生發現 $\frac{1}{3}$ 與 $\frac{3}{9}$ 之間

存在 $\frac{3}{9} = \frac{3 \div 3}{9 \div 3} = \frac{1}{3}$ 的關係。

教師引導學生利用圓形分數板說明

$\frac{3}{9} = \frac{3 \div 3}{9 \div 3} = \frac{1}{3}$ 的分子分母均除以 3 的
數學意義(約分是將很多份視為一大份
的等值分數的表現)。

解題路徑 I：

學生依序產出 $\frac{1}{3}$ 個，

$$\left\lceil \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right\rceil \text{個} (= \frac{2}{6} \text{個}),$$
$$\left\lceil \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12} \right) + \frac{1}{12} \right\rceil \text{ 個,}$$

「 $\frac{1}{4} + \frac{1}{12}$ 」個，

$$\left\lceil \frac{1}{9} + \frac{2}{9} \right\rceil \text{個} \left(= \frac{3}{9} \text{個} \right),$$

以及「 $\frac{1}{12} + \frac{3}{12}$ 」個 (= $\frac{4}{12}$ 個)等多元答案。

解題路徑 II：

學生依序產出 $\frac{1}{3}$ 個，

 $\left\lceil \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \right\rceil$ 個，
$$\left\lceil \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right\rceil \text{ 個 } (= \frac{2}{6} \text{ 個}),$$
$$\left\lceil \frac{1}{9} + \frac{2}{9} \right\rceil \text{ 個 } (= \frac{3}{9} \text{ 個}),$$

以及「 $\frac{1}{12} + \frac{3}{12}$ 」個(= $\frac{4}{12}$ 個)等多元答案。

以及感受獨特解題策略之數學創造力表現。

D3 利用圓形分數板，說明與發表所找到解題策略的依據。

T3 數學語言溝通：透過等值分數的分子和分子、分母和分母之間的關係，促進學生對於擴、約分概念的理解。

D1 概念操作理解：透過不同單位分數的圓形分數板，表徵、觀察與說明擴、約分與等值分數的連結。

15 分

	<p>◆ 發表解題路徑 III 的過程</p> <p>(一)教師提問以引導學生發現$\frac{1}{3}$與$\frac{2}{6}$之間存在 $\frac{1}{3} = \frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{2}{6}$ 的關係。</p> <p>教師引導學生利用圓形分數板說明$\frac{1}{3} = \frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{2}{6}$ 的分子分母均乘以 2 的數學意義(擴分是將一份細分成很多小份的等值分數的表現)。</p> <p>(二)教師提問以引導學生發現$\frac{1}{3}$與$\frac{4}{12}$之間存在 $\frac{4}{12} = \frac{4 \div 4}{12 \div 4} = \frac{1}{3}$ 的關係。</p> <p>教師引導學生利用圓形分數板說明$\frac{4}{12} = \frac{4 \div 4}{12 \div 4} = \frac{1}{3}$ 的分子分母均除以 4 的數學意義(約分是將很多份視為一大份的等值分數的表現)。</p>	<p>解題路徑 III：</p> <p>學生產出$\frac{1}{3}$個、$\frac{2}{6}$個、$\frac{3}{9}$個、$\frac{4}{12}$個；</p> <p>以及「$\frac{1}{6} + \frac{1}{6}$」個、 「$\frac{1}{6} + \frac{2}{12}$」個、 「$\frac{2}{12} + \frac{2}{12}$」個、 「$\frac{1}{12} + \frac{3}{12}$」個、 「$\frac{1}{12} + \frac{1}{4}$」個， 「$\frac{1}{9} + \frac{2}{9}$」個等多元答案。</p> <p>P.S.：</p> <p>1. 解題路徑 III 是極少部份提前學習的學生可能產出的解題路徑。</p> <p>2. 教學時要留意學生排出「$\frac{1}{5} + \frac{1}{8}$」，因為與$\frac{1}{3}$相差只有$\frac{1}{120}$，非常接近。</p>		
1-2-3	<p>教師總結：</p> <p>1. 擴分是將一份細分成很多小份的等值分數的表現。</p> <p>2. 約分是將很多份視為一大份的等值分數的表現。</p>	此時教師的話語，需連結學生的等值分數概念，不應只是要求學生進行「同除以一數」或「同乘以一數」的數字運算而已。	5 分	總結統整本節課學習重點

參考文獻

呂玉琴(1991)。國小學生的分數概念： $1/2$ VS. $2/4$ 。國民教育，第 31 卷 11,12 期，10-15。

呂玉琴、李源順、劉曼麗、吳毓瑩(2009)。國小分數與小數的教學、學習與評量。台北：五南。

李源順(2018)。數學這樣教：國小數學感教育。台北：五南。

張英傑、周菊美/譯（2005）。中小學數學科教材教法。台北：五南。

鍾靜(2010)。問題導向學習與數學教師專業成長。臺北市：國立臺北教育大學。

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver E. (1983). Rational Number Concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), Acquisition of Mathematics Concepts and Processes, (pp. 91-125). New York: Academic Press.