

新北市 106 學年度國小數學檢測非選擇題學生解題分析及教學建議報告

一、試題內容及評閱規準：

分年細目	5-n-07 能用通分做簡單異分母分數的比較與加減。		知識向度	程序執行
評量內涵	能做簡單異分母的加減及比較。		認知層次	應用
試題內容	<p>「媽媽買了一個披薩，爸爸吃了$\frac{1}{3}$個，哥哥吃了$\frac{1}{4}$個，媽媽吃了$\frac{1}{6}$個，剩下的部分給姐姐吃；但姐姐沒有全部吃完，姐姐說她吃了$\frac{1}{5}$個披薩。」你認為姐姐說的合理嗎？說明你的理由。</p>			
評閱規準	類別	評閱說明	評閱舉隅	
	2A	回答姐姐說法合理，利用爸爸、媽媽和弟弟吃剩下的量與姐姐吃的量進行比較來說明判斷的理由。	計算出爸爸、媽媽和弟弟吃完剩餘的量，並把姐姐吃的量與剩餘量做比較，如以 $\frac{1}{4} > \frac{1}{5}$ (或 $\frac{15}{60} > \frac{12}{60}$) 或 $\frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ 來說明理由。	
	2B	回答姐姐說法合理，利用全家人吃的總量與1個披薩進行比較來說明判斷的理由。	計算出爸爸、媽媽、弟弟及姐姐吃的總量，再利用全家吃的總量($\frac{57}{60}$ 個)與1個披薩進行比較，如以 $\frac{57}{60} < 1$ 或 $1 - \frac{57}{60}$ 來說明理由。	
	2X	答題正確，但不屬於上述AB類型		
	1A	回答姐姐說法合理，利用爸爸、媽媽和弟弟吃剩下的量與姐姐吃的量進行比較時計算錯誤。	爸爸、媽媽和弟弟吃剩下的量計算錯誤或與姐姐吃的量進行比較時計算錯誤。	
	1B	回答姐姐說法合理，利用全家人吃的總量與1個披薩進行比較時計算錯誤。	計算全家吃的總量時錯誤。	
	1C	回答姐姐說的對，但未說明理由或理由不完整。	回答正確，但未說明理由或理由不完整。	
	0A	姐姐說法不合理或不一定或無法判斷，是因為計算錯誤導致。	正確算出爸爸、媽媽和弟弟吃完剩餘的量，但在把剩下的量與姐姐吃的量比大小時發生錯誤，所以認為姐姐說法不合理。	

	0B	姐姐說法不合理或不一定或無法判斷，把爸爸、媽媽和弟弟吃剩下的量與姐姐吃的量進行比較時計算錯誤。	計算爸爸、媽媽和弟弟吃的剩餘量或把剩餘量與姊姊吃的量相減時計算錯誤，所以認為姐姐說法不合理。。
	0C	姐姐說法不合理或不一定或無法判斷，把全家人吃的總量，再與 1 個披薩進行比較時計算錯誤。	在計算全家吃的總量時錯誤，所以認為姐姐說法不合理。
	0D	姐姐說法不合理或不一定或無法判斷，說明錯誤或不完整。	以自己的生活經驗或直覺回答。
	0E	姐姐說法不合理或不一定或無法判斷，未說明理由。	沒有說明理由。
	0X	其他錯誤類型，但不屬於上述 ABCDE 類型	未理解題意，認為姐姐應該把剩下的吃完或非以分數的加減法解題而是用分數的乘法進行解題。
	99	空白	

二、評閱結果：

(一)本題學生作答情形

類型	2			1			0							合計
	2A	2B	2X	1A	1B	1C	0A	0B	0C	0D	0E	0X	99	人
人數	48	67	3	31	13	52	10	2	15	96	11	5	14	367
百分比(%)	40%	57%	3%	32%	14%	54%	7%	1%	10%	63%	7%	3%	9%	100%
人數	118			96			153							
百分比(%)	32%			26%			42%							

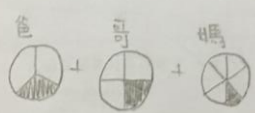
依上表可以看出近四成學生得分 0 分，得 2 分和 1 分的學生則各約三成。得分 2 分的學生中大多數會計算出全部人吃掉的總量，再與全部 1 進行比較來說明；其他學生則是算出爸爸、媽媽和弟弟吃剩的剩餘量與姐姐吃的量進行比較來說明，顯示他們能利用通分進行異分母分數的加減計算及比較大小。1 分的學生中錯誤類型可分為二類，一是不能利用通分進行簡單異分母分數的加減計算及比較大小(或計算錯誤)；二

是不理解題目中「姐姐沒有全部吃完」的意思，而認為「姐姐應該要把剩下的全部吃完」。得 0 分的學生中有約半數以上是以自己的生活經驗或直覺來回答，少數的學生則是無法利用通分進行異分母分數的加減計算，其中部分錯記或誤用口訣「分子加分子，分母加分母」、「分子乘分子，分母乘分母」進行異分母分數的加減計算，也有不會進行異分母分數的大小比較的情形，如誤以為 $\frac{1}{5}$ 的分母比 $\frac{1}{4}$ 的分母大，所以 $\frac{1}{5} > \frac{1}{4}$ 。

(二) 學生答題類型分析

得分	類型	解題範例(學生作答照片)	解題類型分析
2	2A		爸爸、媽媽和弟弟吃完後剩下 $\frac{15}{60}$ 個(或 $\frac{1}{4}$ 個)，再與姐姐吃的 $\frac{1}{5}$ 個(或 $\frac{12}{60}$ 個)比較，因為 $\frac{1}{4} > \frac{1}{5}$ (或 $\frac{15}{60} > \frac{12}{60}$)，所以姐姐說的對。
	2B		計算出全家吃的總量為 $\frac{57}{60}$ 個，因為 $\frac{57}{60} < 1$ ，所以姐姐說的對。
	2X		將全家人各自吃的量扣除還有剩下，所以姐姐說的對；或利用圓心角進行解題。

		<div data-bbox="331 107 1002 353"> <p>(1) 姐姐說的是否合理？ 合理</p> <p>(2) 我的理由： 一個披薩 = 360° $360^\circ \times \frac{1}{4} = 90^\circ$ $360^\circ \times \frac{1}{4} = 90^\circ$ $360^\circ \times \frac{1}{6} = 60^\circ$ $360^\circ \times \frac{1}{5} = 72^\circ$ $90^\circ + 90^\circ + 60^\circ + 72^\circ = 312^\circ$ $312^\circ < 360^\circ$</p> </div>	
1	1A	<div data-bbox="319 392 997 526"> <p>(1) 姐姐說的是否合理？ 是</p> <p>(2) 我的理由：剩下的部分給姐姐吃， 剩下的是 $\frac{3}{10}$ 個，姐姐只吃了 $\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = \frac{3}{10} > \frac{2}{10}$</p> </div>	回答姐姐說的對，但將扣除爸爸、媽媽和弟弟吃完後剩餘的量計算錯誤。
	1B	<div data-bbox="319 537 989 817"> <p>(1) 姐姐說的是否合理？ 是</p> <p>(2) 我的理由： 爸爸、哥哥、媽媽三個人的份量加起來的份量已經超過一半的份量，姐姐又吃了 $\frac{1}{5}$，所以剩的份量大約還有 $\frac{1}{2}$ 個披薩</p> </div>	回答姐姐說的對，但計算全家吃的總量時錯誤(算式錯誤)。
	1C	<div data-bbox="319 862 989 1064"> <p>(1) 姐姐說的是否合理？ 是</p> <p>(2) 我的理由： 猜的</p> </div>	回答姐姐說的對，但未說明理由。
0	0A	<div data-bbox="319 1086 989 1332"> <p>(1) 姐姐說的是否合理？ 不合理</p> <p>(2) 我的理由： 因為 $\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{6}$ 可以通分成 $\frac{4}{12}$、$\frac{3}{12}$、$\frac{2}{12}$， 合共是 $\frac{9}{12}$ 還有一些沒有吃完，$\frac{3}{12}$ 還 可以通 $\frac{21}{60}$，$\frac{1}{5}$ 通成 $\frac{12}{60}$，$\frac{21}{60} - \frac{12}{60} = \frac{9}{60}$ 不能在 約回 12 所以不合理</p> </div> <div data-bbox="319 1344 989 1590"> <p>(1) 姐姐說的是否合理？ 不合理</p> <p>(2) 我的理由： $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{9}{12}$ $1 - \frac{9}{12} = \frac{3}{12}$ $\frac{3}{12} - \frac{1}{5} = 0$</p> </div>	回答姐姐說的不合理，雖然正確算出扣除爸爸、媽媽和弟弟吃剩的量，但卻在與姐姐吃的量比較時發生錯誤或無法比較 $\frac{1}{4}$ 和 $\frac{1}{5}$ 的大小。
	0B	<div data-bbox="319 1624 1013 2072"> <p>作答欄： 5 3 4 6</p> <p>(1) 姐姐說的是否合理？ 不合理</p> <p>(2) 我的理由：因為爸爸、媽媽吃完剩下 $\frac{1}{4}$ 個， 所以姐姐言說的太不合理</p> </div>	回答姐姐說的不合理，卻把爸爸、媽媽和弟弟吃完後的剩餘量計算錯誤。

	0C	<div> <div> (1) 姐姐說的是否合理？ 否 </div> <div> (2) 我的理由： $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ $\frac{2}{12} + \frac{1}{6} = \frac{2}{12} + \frac{2}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ </div> </div>	回答姐姐說的不合理，因為計算全家吃的總量時錯誤。
	0D	<div> <div> (1) 姐姐說的是否合理？ 下 </div> <div> (2) 我的理由： 媽 = $\frac{1}{3}$ 爸 = $\frac{1}{4}$ 哥 = $\frac{1}{6}$ 他們都有吃完 那姐姐就不可 能吃那麼少了 </div> </div> <div> <div> (1) 姐姐說的是否合理？ 不合理 </div> <div> (2) 我的理由： 因為姐姐說她沒有吃完，所以她應該吃得比剩下來的少，而且$\frac{1}{3}$個披薩已超過剩下的量了。 </div> </div> <div> <div> (1) 姐姐說的是否合理？ 不合理 </div> <div> (2) 我的理由： 有可能姐姐都把全部吃完了。 </div> </div>	以自己的生活經驗或直覺回答。
	0E	<div> <div> (1) 姐姐說的是否合理？ 不知道 </div> <div> (2) 我的理由： 沒理由 </div> </div>	沒有說明理由。
	0X	<div> <div> (1) 姐姐說的是否合理？ 合理 </div> <div> (2) 我的理由：因為$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{9}{12}$ $\frac{12}{12} - \frac{9}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ $\frac{1}{4} \neq \frac{1}{5}$ </div> </div> <div> <div> (1) 姐姐說的是否合理？ 合理 </div> <div> (2) 我的理由：因為算出來的答案還有$\frac{3}{12}$個。 </div> </div> <div> <div> (1) 姐姐說的是否合理？ 否 </div> <div> (2) 我的理由：  $\frac{1}{3} = \frac{8}{24} + \frac{1}{4} = \frac{6}{24} + \frac{1}{6} = \frac{11}{24}$ $\frac{1}{5} = \frac{18}{90}$ $\frac{11}{24} \neq \frac{18}{90}$ </div> </div>	<p>(1) 未能理解題意，認為姐姐應吃完剩下的披薩。</p> <p>(2) 比較對象錯誤，把姐姐吃的量與其他人吃的總量進行比較。</p> <p>(3) 利用分數乘法解題。</p> <p>(4) 認為分母沒有公倍數。</p>

		<div> <div> (1) 姐姐說的是否合理？ 否 </div> <div> (2) 我的理由： $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$ $\frac{1}{12} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{360}$ </div> </div> <div> <div>作答欄：</div> <div> (1) 姐姐說的是否合理？ 不合適 </div> <div> (2) 我的理由： 因為 $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}$ 都找不到共同的倍數(分母) </div> </div>	
--	--	--	--

1. 學生多元解題類型：

從學生獲得 2 分的作答類型中，可以發現大多數學生是利用算出全部人吃掉的總量與 1 個披薩進行比較，或計算出爸爸、媽媽和弟弟三人吃剩的剩餘量與姐姐吃的量進行比較來說明理由，少數的學生則是以全部人吃完還有剩下來說明理由。

2. 學生常見錯誤類型：

在獲得 0 分的學生中，半數以上是以直覺或經驗來說明理由。其餘的錯誤與獲得 1 分的學生錯誤一樣，當中有約半數的學生是屬於計算錯誤的情形，可能的原因是類比整數加法的舊經驗，直接將「分子加分子，分母加分母」錯誤計算，或因為不會通分(找等值分數)所造成的錯誤；部份學生則是無法掌握題目中「姐姐沒有全部吃完」的意思，誤以為姐姐必須要吃完剩下的才合理；還有少數的學生可能受整數大小比較的舊經驗，認為「數字大的數就比較大」，誤以為 $\frac{1}{5}$ 比 $\frac{1}{4}$ 大的情形。

三、評量內涵及本題的教學建議：

本題為連續量情境下的簡單異分母分數加減計算及大小比較的生活情境題，從學生的迷思概念來看，大多數的學生對於要把三個以上異分母分數進行加減計算產生了困難，可能跟學生少有機會做三個異分母分數加減計算的學習經驗有關；另一個值得注意的則是有少數學生有誤以為 $\frac{1}{5}$ 比 $\frac{1}{4}$ 大的情形。因此，就本題的評量重點為簡單異分母分數的加減計算與大小比較來看，教師進行教學時，應讓學生理解通分的意涵，促使學生能活用通分去進行簡單異分母分數的加減計算與大小比較，提升學生簡單異分母分數的加減計算與大小比較的能力。所以給教師的教學建議是：

1. 活用通分找等值分數

等值分數是學習異分母分數比較大小及分數加減計算的先備知識，通分則是找等值分數的重要方法。透過通分(找等值分數)，把二個不同分母的分數轉換成相同分母的分數，就可進行大小比較或加減計算。為避免學生誤用整數比大小舊經驗「數字大的數就比較大」及分數乘法口訣「分子乘分子，分母乘分母」，應善用簡單的生活情境問題讓學生進行異分母分數的大小比較。例如 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{3}$ ，先找出一個2和3的公倍數6，再把 $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ 、 $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ ，因為 $\frac{3}{6} > \frac{2}{6}$ ，所以 $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ ；或是實際以圓形分數板來表徵 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{3}$ ，讓學生察覺在同一總量的情況中，同樣為單位分數，當等分數越多時，取得其中一份的量則會愈小。透過此例引導學生了解通分的過程及方法、理解異分母分數的大小比較的方式，並澄清學生「 $\frac{1}{5}$ 比 $\frac{1}{4}$ 大」的迷思概念，也可以強化學生異分母分數加減的計算的能力。

從本題學生的表現，發現多數學生缺乏善用所學知識的能力；以本題為例要如何引導學生從二個異分母分數的加減計算到三個異分母分數的加減計算呢？這需要教師在教學中能多提供學生更進一步練習及學習思考的機會，幫助學生累積更多的學習的經驗，提升運用知識的能力。另外，教師在布題時要注意分數的分母不宜過大，也可以安排分母有倍數關係的分數(如 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{4}$)，讓學生可以察覺分母關係簡化通分，學習更有效率的計算方法，提升計算能力。

以本題為例，「爸爸吃了 $\frac{1}{3}$ 個，哥哥吃了 $\frac{1}{4}$ 個，媽媽吃了 $\frac{1}{6}$ 個，姐姐吃了 $\frac{1}{5}$ 個披薩。」題目中雖然有四個分數，但數字的設計乃是經過考量，為避免學生在通分時可能會因為分母數字過大而難以透過通分找到等值分數，所以採用分母數字較小的單位分數 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{6}$ 和 $\frac{1}{5}$ ，學生是能透過兩個異分母分數的通分經驗解決本題三個異分母分數的通分。但就學生的表現來看，仍然約有三成左右的學生無法進行三個異分母分數的加減法計算(如 $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$ 、 $1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6}$)；可能是學生在學習異分母分數的加減計算時，通常是2個簡單異分母分數的加減計算，所以遇到3個簡單異分母分數的加減計算時就不知所措，顯示學生在學習數學計算時常常只是學到了方法或技巧，卻不瞭解為何要這樣做。因此，教師在進行各種計算教學時應利用生活情境問題進行教學，避免直接教學和講授計算方法，僵化學生的學習，不會活用所學知識。教師可讓學生透過討論，了解不同的解題思維及計算方法，強化計算的能力。以下就本題的 $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$ 的計算為例，介紹「通分」的方法：

(1) 利用分母數字間的倍數關係簡化通分的過程

觀察 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{6}$ ，發現 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{6}$ 的分母有倍數關係，就可以將 $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ ，再進行 $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$ ，接著將 $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$ 、 $\frac{3}{6} = \frac{6}{12}$ ，再進行 $\frac{3}{6} + \frac{1}{4} = \frac{6}{12} + \frac{3}{12} = \frac{9}{12}$ 。

(2) 透過分母相乘找到公倍數進行通分

利用分母相乘找到分母的公倍數的方法，如下：

① 兩兩通分找公倍數：

例1、利用 $3 \times 4 = 12$ ，找到3和4的公倍數12，進行 $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$ 的計

算；再將 $12 \times 6 = 72$ ，找到12和6的公倍數72，接著完成 $\frac{7}{12} + \frac{1}{6} = \frac{42}{72} +$

$\frac{12}{72} = \frac{54}{72}$ 的計算。

例2、利用 $4 \times 6 = 24$ ，找到4和6的公倍數24，進行 $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{6}{24} + \frac{4}{24} = \frac{10}{24}$ 的計

算；再將 $24 \times 3 = 72$ ，找到24和3的公倍數72，接著完成的計算。

教師可透過(1)的方法，引導學生能察覺12是6的倍數(24是3的倍數)，就可以簡化 $\frac{7}{12} + \frac{1}{6} = \frac{7}{12} + \frac{2}{12} = \frac{9}{12}$ ($\frac{10}{24} + \frac{1}{3} = \frac{10}{24} + \frac{8}{24} = \frac{18}{24}$)的計算過程，是較有效率的做法。

② 全部分母相乘找公倍數

利用 $3 \times 4 \times 6 = 72$ ，算出他們的公倍數72，接著算出 $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{24}{72} + \frac{12}{72} + \frac{18}{72} = \frac{54}{72}$ 。

但當分母數字過大時，此法很容易造成學生在計算上的負擔及算錯的可能性，所以不宜讓學生直接背誦此方法；教師可以讓學生從討論及練習中去理解通分的過程及技巧，讓學生能活用通分並強化分數計算的能力。

2. 加強「姐姐沒有全部吃完，姐姐說她吃了 $\frac{1}{5}$ 個披薩。姐姐說的合理嗎？」語意的理解

本題為簡單異分母分數的加減計算與生活經驗結合的判斷問題，是將有關分數的生活情境與常見的生活事件加以結合，讓學生透過計算的結果進行合理性判

斷的問題。目的是希望學生不只是會做計算，也能利用計算所得的結果對常見的生活事件做出正確的判斷，也可以了解學生是否具備將數學知識運用於生活之中的能力。

由於本題並非單純的計算問題，而是需要利用計算結果再依題目要求進行合理性判斷的問題，是學生不熟悉的複合式問題。有學生認為姐姐必須將剩下的全部吃完，也有學生把姐姐吃的量與其他家人吃的總量進行比較，顯示有部分學生對本題的重要判斷線索：「姐姐沒有全部吃完」是不能理解的。所以，教師可在進行一般的情境問題解題教學時，適時結合與學生生活經驗有相關的生活事件，讓學生除了進行例行性的解題計算活動外，也可以運用此題情境中計算所得的數據對相關的生活事件做合理性判斷的練習，以強化學生活用數學於生活中的能力。