

# 新北市 106 學年度國小數學檢測非選擇題學生解題分析及教學建議報告

## 一、試題內容及評閱規準：

分年細目	5-a-01 能在具體情境中，理解乘法對加法的分配律，並運用於簡化計算。		知識向度	程序執行
評量內涵	理解乘法對加法的分配律，並運用於簡化計算。		認知層次	理解
試題內容	<p>老師出了一題「<math>8008 \times 125</math>」計算題：</p> <p>小美寫的算式是「<math>8008 \times 125 = 8000 \times 125 + 8 \times 125</math>」，  小英寫的算式是「<math>8008 \times 125 = 8008 \times 100 + 8008 \times 25</math>」。</p> <p>用簡化計算的想法，請你判斷誰的想法是正確的？寫下你的想法。</p>			
評閱規準	類別	評閱說明	評閱舉隅	
	2A	認為二個算式都能簡化計算，以乘法分配律來說明	因為 8008 可分為 8000 和 8、125 可分為 100 和 25，所以 $8008 \times 125$ 可以變為 $8000 \times 125 + 8 \times 125$ ，或 $8008 \times 100 + 8008 \times 25$ ，所以二個算式都正確。	
			因為 $8000 \times 125 + 8 \times 125 = (8000 + 8) \times 125 = 8008 \times 125$ ， $8008 \times 100 + 8008 \times 25 = 8008 \times (100 + 25) = 8008 \times 125$ 所以二個算式都正確。	
	2B	認為二個算式都能簡化計算，並以計算結果一樣來說明	算出 $8008 \times 125 = 1001000$ 、 $8000 \times 125 + 8 \times 125 = 1001000$ 、 $8008 \times 100 + 8008 \times 25 = 1001000$ ，所以二個算式都正確。	
	2X	答題及說明皆正確，但不屬於 2A 或 2B		
	1A	認為二個算式都能簡化計算，但只說明二個算式「答案一樣」	認為二個算式都正確，但只以答案一樣來說明。	
	1B	認為二個算式都能簡化計算，只說明其中一個算式	認為二個算式都正確，但只說明小美或小英的算式正確，或只算出其中一個算式。	
	1C	認為二個算式都能簡化計算，但說明不完整或理由不正確	認為二個算式都正確，但學生理由敘寫不完整，或理由明顯有誤	
	1D	認為二個算式都能簡化計算，但未說明理由	認為二個算式都正確，但未說明理由	

評閱規準	1E	只認為其中一個算式能簡化計算，並正確說明或算出算式	只正確說明小美的算式，或正確算出小美算式的答案
			只正確說明小英的算式，或正確算出小英算式的答案
	1X	認為二個算式都能簡化計算，但不屬於上述 1A、1B、1C 或 1D 類型	
	0A	只認為其中一個算式能簡化計算，認為被乘數不能分解或乘數不能分解	認為被乘數 8008 不能分為 8000 和 8 再乘以 125
			認為乘數 125 不能分為 100 和 25 再乘 8008
	0B	只認為其中一個算式能簡化計算，說明不完整或理由不正確	認為小美(或小英)正確，但是說明不完整或理由有誤
	0C	只認為其中一個算式能簡化計算，且計算錯誤	因為計算錯誤而認為小美或小英的算式正確
	0D	只認為其中一個算式能簡化計算，且未說明理由	認為小美(或小英)正確，沒有敘寫理由
	0X	其他錯誤類型，但不屬於上述類型	認為都不正確，說明理由不正確
			認為都不正確，未說明理由
	99	空白	

## 二、評閱結果：

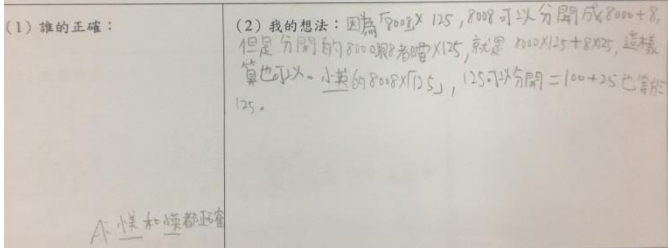
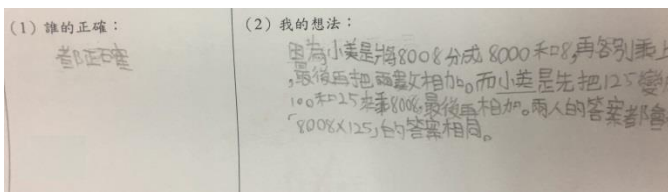
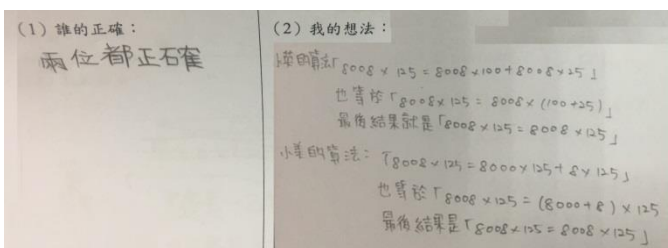
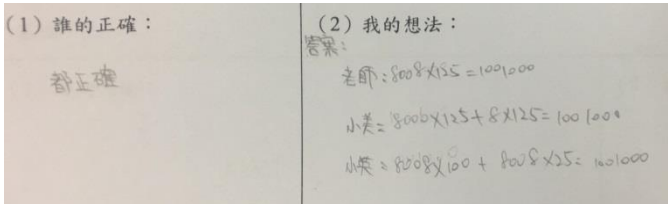
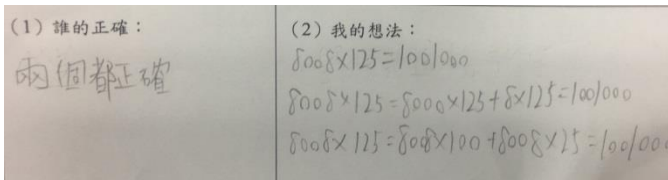
### (一)本題學生作答情形

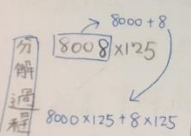

類型	2			1						0						合計
	2A	2B	2X	1A	1B	1C	1D	1E	1X	0A	0B	0C	0D	0X	99	367 人
人數	18	16	7	9	1	21	5	108	1	12	106	9	20	32	2	
百分比 (%)	4.9	4.4	1.9	2.5	0.3	5.7	1.4	29.4	0.3	3.3	28.8	2.5	5.4	8.7	0.5	
人數	41			140						186						
百分比 (%)	11.2%			39.6%						49.2%						

依上表可看出近五成的學生得分為 0 分，約四成的學生得 1 分，只有一成的學生得 2 分。得分 2 分的學生佔 11.2%，其中近半數的學生由乘法對加法分配律的性質來說明；另也有近半數學生則以計算的結果相同來說明，二者都能正確回答問題。得 1 分的學生佔 39.6%，其中大部分的學生雖然只認為【小美】或【小英】的算式正確，

但卻能用乘法對加法的分配律或計算出結果來說明；少數學生雖然能回答【小美、小英二人都正確】，但無法將理由說清楚。至於得 0 分的學生佔 49.2%，其中半數以上的學生只回答【小美】或【小英】的算式正確，但說明不完整或說明不清楚；少數的學生未說明理由，甚至認為小美、小英的算式都不正確。

## (二) 學生答題類型分析

得分	類型	解題範例(學生作答照片)	解題類型分析
2	2A		認為二個算式都正確，以算式中 8000 可分為 8000 + 8 各乘以 125，及 125 可分為 100 + 25 各乘 8008 來說明。
			認為二個算式都正確，以算式中 8000 可分為 8000 + 8 各乘以 125，及 125 可分為 100 + 25 各乘 8008 的和，與 8008 x 125 的答案相同。
			認為二個算式都正確，以算式合併的歷程說明「 $8008 \times 125 = 8000 \times 125 + 8 \times 125$ 」、「 $8008 \times 125 = 8008 \times 100 + 8008 \times 25$ 」。
	2B		認為二個算式都正確，分別計算出 $8008 \times 125$ 、 $8000 \times 125 + 8 \times 125$ 、 $8008 \times 100 + 8008 \times 25$ 的答案、並以答案相同來說明。
			

1	1A	<div>(1) 誰的正確： 小美、小英</div> <div>(2) 我的想法： 他們兩個的算式算出來的答案和老師計算題的答案是一樣的。</div>	雖然認為二個算式都正確，但只以「答案一樣」來說明。																								
	1B	<div>(1) 誰的正確： 小美、小英</div> <div>(2) 我的想法： (例)  <math display="block">\begin{array}{r} 8000 \times 125 + 8 \times 125 \\ 11 \qquad 11 \\ 8008 \times 125 = 8000 \times 125 + 8 \times 125 \end{array}</math>  可以分成兩個算式再相加 答案會相同 </div>	雖然認為二個算式都正確，但只舉例說明 $8008 \times 125 = 8000 \times 125 + 8 \times 125$ 。																								
	1C	<div>(1) 誰的正確： 都正確</div> <div>(2) 我的想法： 因為小美是先算8000後算8；而小英是先乘100再乘25。</div>	雖然認為二個算式都正確，但只說明「先算8000後算8」、「先乘100再乘25」。																								
		<div>(1) 誰的正確： 兩個都對</div> <div>(2) 我的想法：  <math>8008 \times 125</math> 可以分開算 所以兩個都對。 </div>	雖然認為二個算式都正確，但以「 $8008 \times 125$ 可以分開算」來說明。																								
	1E	<div>(1) 誰的正確： 小美的想法正確。   </div> <div>(2) 我的想法： 因為小美寫「<math>8000 \times 125 + 8 \times 125</math>」，把 <math>8008 \times 125</math> 分解成8000先乘以125加上8乘以125，代表說8000和8各有125個。</div>	認為小美的算式正確，並以「 $8008 \times 125$ 分解成 $8000 \times 125 + 8 \times 125$ ，代表8000和8各有125個」來說明。																								
		<div>(1) 誰的正確： 小美的算式是正確的</div> <div>(2) 我的想法：  <math>8008 = 8000 + 8</math>  小美：<math>8008 \times 125 = 8000 \times 125 + 8 \times 125</math> </div>	認為小美的算式正確，並以「 $8008 = 8000 + 8$ ， $8008 \times 125 = 8000 \times 125 + 8 \times 125$ 」說明。																								
		<div>(1) 誰的正確： 小英</div> <div>(2) 我的想法： 因為 <math>8008 \times 125 = 1001000</math>，<math>8008 \times 100 + 8008 \times 25 = 800800 + 200600 = 1001400</math> </div>	認為小英的算式正確，並算出「 $8008 \times 125 = 1001000$ ， $8008 \times 100 + 8008 \times 25 = 1001000$ 」。																								
		<div>(1) 誰的正確：小美   </div> <div>(2) 我的想法：因為她把8008變成8000和8  所以 <math>8000 \times 125 + 8 \times 125</math> 是 <math>= 8008 \times 125</math>。  <math>8008 \times 125 = 1001000</math>    <math>8 \times 125 = 1000</math>    <math>1001000 + 1000 = 1002000</math>  <math>8000 \times 125 = 1000000</math>    <math>1000000 + 1000 = 1001000</math>   <table border="1"> <tr> <td>算式</td> <td>8000</td> <td>8</td> <td>8008</td> </tr> <tr> <td></td> <td><math>\times 125</math></td> <td><math>\times 125</math></td> <td><math>\times 125</math></td> </tr> <tr> <td></td> <td>40000</td> <td>8</td> <td>40040</td> </tr> <tr> <td></td> <td>16000</td> <td><math>\times 25</math></td> <td>16016</td> </tr> <tr> <td></td> <td>8000</td> <td>1000</td> <td>8008</td> </tr> <tr> <td></td> <td>1000000</td> <td></td> <td>1001000</td> </tr> </table> </div>	算式	8000	8	8008		$\times 125$	$\times 125$	$\times 125$		40000	8	40040		16000	$\times 25$	16016		8000	1000	8008		1000000		1001000	認為小美的算式正確，並算出「 $8008 \times 125 = 1001000$ ， $8000 \times 125 + 8 \times 125 = 1001000$ 」。
算式	8000	8	8008																								
	$\times 125$	$\times 125$	$\times 125$																								
	40000	8	40040																								
	16000	$\times 25$	16016																								
	8000	1000	8008																								
	1000000		1001000																								

0	0A	<div> <div>(1) 誰的正確： 小美</div> <div>(2) 我的想法： 因為小美的算式只是把被乘數分開算，一樣可以算出答案，而小英把乘數分開，答案就會不一樣。</div> </div> <div> <div>(1) 誰的正確： 小美</div> <div>(2) 我的想法： 因為小美是把被乘數分成兩塊來算，而小英是把乘數分成兩塊來算(這樣錯)所以小美是正確的。</div> </div>	認為小美的算式正確，以「乘數分開答案就會不一樣」、「乘數分開是錯的」來說明。
	0B	<div> <div>(1) 誰的正確： 小美</div> <div>(2) 我的想法： 小美是算 8000 個 125 加 8 個 125 小英是算 100 個 8008 加 25 個 8008 題目是要算 8008 個 125，所以是小美對。</div> </div>	認為小美的算式正確，認為「題目要算 8008 個 125，小英算的是 100 個 8008 加 25 個 8008」。
		<div> <div>(1) 誰的正確： 小美。</div> <div>(2) 我的想法： 因為簡化計算是將字尾不是 0 或 5 的數拆成 0，所以要將 8008 拆成 8000 + 8。</div> </div>	認為小美的算式正確，以「簡化計算要不是 0 或 5 的才可以拆」來說明。
		<div> <div>(1) 誰的正確：小美</div> <div>(2) 我的想法：因為如果像小英的做法會再把 8008 乘一次，而小美的做法並不會影響答案，所以我選小美的算式。</div> </div>	認為小美的算式正確，以「小英的算法 8008 會再乘一次」來說明。
	0C	<div> <div>(1) 誰的正確： 小美</div> <div>(2) 我的想法： 2008 x 125 = 1001000 小美：8000 x 125 + 8 x 125 = 1001000 小英：8008 x 100 + 8008 x 25 = 857000 因為小英的算式算出的數跟老師出的題答案不同，小美的算出來答案相同，因此小美的答案正確。</div> </div>	算出 $8008 \times 125 = 1001000$ 、 $8000 \times 125 + 8 \times 125 = 1001000$ ，但誤算 $8008 \times 100 + 8008 \times 25 = 857000$ ，而認為只有小美正確
		<div> <div>(1) 誰的正確： 小英</div> <div>(2) 我的想法： 8008 x 125 = 1001000 小英： 8000 x 125 + 8 x 125 = 200000 + 1000 = 2001000 8008 x 100 + 8008 x 25 = 800800 + 200200 = 1001000 1001000 = 1001000 1001000 &gt; 2001000</div> </div>	算出 $8008 \times 125 = 1001000$ 、 $8008 \times 100 + 8008 \times 25 = 1001000$ ，但誤算 $8000 \times 125 + 8 \times 125 = 201000$ ，而認為只有小英正確
		<div> <div>(1) 誰的正確： 小美</div> <div>(2) 我的想法：</div> </div>	認為小英的算式正確，但未寫理由。
	0D	<div> <div>(1) 誰的正確：小英</div> <div>(2) 我的想法：我覺得小英的想法是對的。因為</div> </div>	認為小英的算式正確，但未寫理由。



	0X	(1) 誰的正確： 都不正確	(2) 我的想法： 因為不能把算式隨便分開來，而且 答案完全不一樣	認為都不正確，因為算是 不能分開，而且答案完全 不一樣。
--	----	-------------------	---	------------------------------------

## 1. 學生多元解題類型：

從學生獲得 2 分的作答類型中，可以發現這些學生雖然都寫出「小美和小英的算式是正確的」，然而有的學生能夠不計算出答案，以乘法對加法的分配律來說明原因；有的學生卻是由計算出老師出的計算題「 $8008 \times 125$ 」、小美算式「 $8008 \times 125 = 8000 \times 125 + 8 \times 125$ 」，小英算式「 $8008 \times 125 = 8008 \times 100 + 8008 \times 25$ 」的答案，再由算出的答案都是「1001000」來說明，這些學生雖然也可得知小美、小英的算式都正確，但可能並不理解乘法對加法的分配律。

## 2. 學生常見錯誤類型：

在學生獲得 1 分的作答類型中，大部分學生只說明或正確算出其中一個的算式，未說明另一個算式是否正確，由此可看出他們可能無法掌握另一個算式的意義，或是對乘法分配律的瞭解不足，只熟悉左分配律( $8008 \times 125 = 8000 \times 125 + 8 \times 125$ )或右分配律( $8008 \times 125 = 8008 \times 100 + 8008 \times 25$ )。

此外，還有一些學生雖然回答「二者都正確」，但說明的理由卻不夠完整，例如：有的學生只回答「答案一樣」、「答案正確」，卻未對小美、小英的算式進行說明。這些學生可能在課堂上說明數學問題的解題策略或理由時，不能用數學語言清楚且完整表達他的想法，所以當需要寫下解題策略或想法時，同樣無法清楚且完整的用文字、符號來說明自己的思考內容，或是認為這樣的表達已經很完整。

至於獲得 0 分的作答類型中，最多的錯誤類型為不清楚乘法對加法分配律的意義，他們有的只能接受 8008 可以分為 8000 和 8 再分別乘以 125，卻認為 125 不能分為 100 和 25 再乘 8000，也就是被乘數可分解但乘數不能分解；有的則認為乘數可分解但被乘數不能分解。這些學生可能因為學習的經驗不足，所以只能接受右分配律或左分配律，無法正確了解分配律的意義。另外，也有部分學生將三個算式都算出答案，但因計算的錯誤，而認為小美和小英只有一個算式是正確的，這些學生同樣不清楚乘法對加法分配律的意義。

## 三、評量內涵及本題的教學建議：

當學生能理解乘法對加法的分配律，就能知道「 $8008 \times 125 = 8000 \times 125 + 8 \times 125$ 」、「 $8008 \times 125 = 8008 \times 100 + 8008 \times 25$ 」都是能簡化「 $8008 \times 125$ 」計算的算式，且學生知道

$8 \times 125 = 1000$ ，就能將計算題「 $8008 \times 125$ 」運用乘法對加法的左分配律寫出「 $8008 \times 125 = 8000 \times 125 + 8 \times 125$ 」，或學生知道整數 $\times 100$ 不須計算可直接在該整數後加2個0，就能將計算題「 $8008 \times 125$ 」運用乘法對加法的右分配律寫出「 $8008 \times 125 = 8008 \times 100 + 8008 \times 25$ 」。

## 1. 透過相同題目不同解題策略，理解乘法對加法的分配律：

(1) 以「橡皮擦一個18元，老師先買了7個，再買了3個，共花多少元？」為例，透過下面這兩種算法，幫助學生理解乘法對加法的分配律。

算法一：先算第一次花的錢 $18 \times 7 = 126$ ，再算第二次花的錢 $18 \times 3 = 54$ ，總共花的錢 $126 + 54 = 180$ ，三個算式可以用併式「 $18 \times 7 + 18 \times 3 = 180$ 」來記錄。

算法二：先算購買的個數 $7 + 3 = 10$ ，再算總共花的錢 $18 \times 10 = 180$ ，二個算式可以用併式「 $18 \times (7 + 3) = 180$ 」來記錄。

討論算式中各數字及運算的意義並比較這兩種算法，可以得到「 $18 \times 7 + 18 \times 3 = 18 \times (7 + 3)$ 」、「 $18 \times 7 + 18 \times 3 = 18 \times 10$ 」及「 $18 \times 10 = 18 \times 7 + 18 \times 3$ 」。

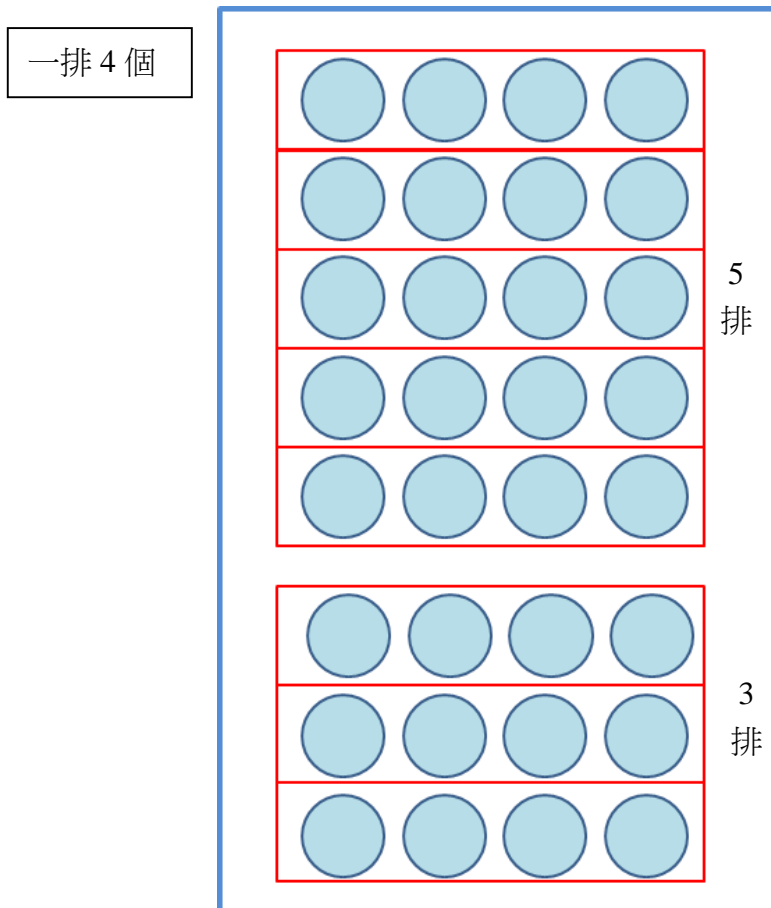
(2) 以較大的數字布題，如「一箱蘋果120個，老闆昨天買了100箱蘋果，今天又買了25箱蘋果，老闆共買了多少個蘋果？」為例，讓學生先討論可以有哪些算法，再經由共同討論得到「 $120 \times 100 + 120 \times 25 = 120 \times (100 + 25)$ 」、「 $120 \times 100 + 120 \times 25 = 120 \times 125$ 」及「 $120 \times 125 = 120 \times 100 + 120 \times 25$ 」。

(3) 討論「 $120 \times 125$ 是否等於 $(100 + 20) \times 125$ 」、「 $(100 + 20) \times 125$ 是否等於 $100 \times 125 + 20 \times 125$ 」

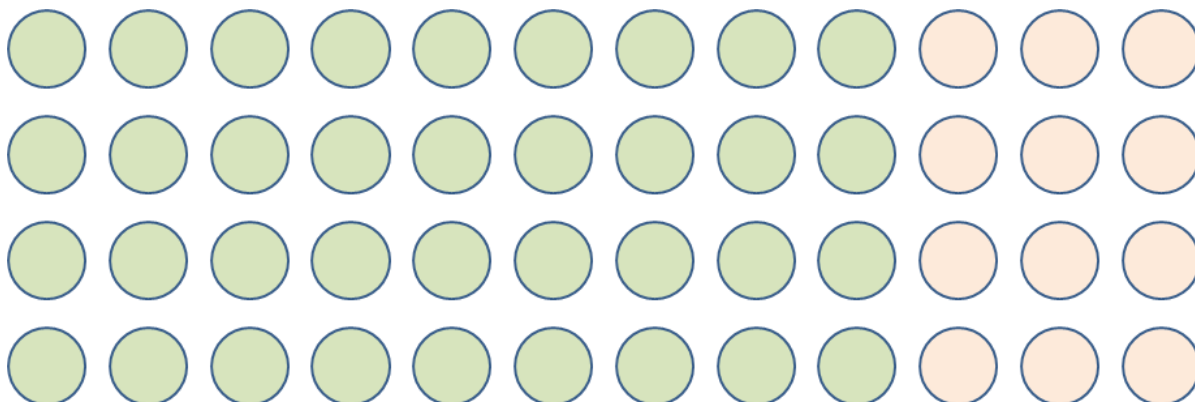
(4) 由左分配律及右分配律的算式讓學生擬題，例如以「 $125 \times 47 + 125 \times 53 = 125 \times (47 + 53)$ 」與「 $300 \times 200 + 8 \times 200 = (300 + 8) \times 200$ 」的算式，讓學生寫出符合算式意義的文字題，並討論文字題與算式的關係，並了解「 $125 \times (47 + 53) = 125 \times 47 + 125 \times 53$ 」、「 $125 \times 100 = 125 \times 47 + 125 \times 53$ 」及「 $300 \times 200 + 8 \times 200 = 308 \times 200$ 」、「 $308 \times 200 = 300 \times 200 + 8 \times 200$ 」。

## 2. 透過排列的題型，理解乘法對加法的分配律：

(1) 利用下圖讓學生理解乘法對加法的左分配律「 $(4 \times 5) + (4 \times 3) = 4 \times (5 + 3)$ 」、「 $(4 \times 5) + (4 \times 3) = 4 \times 8$ 」、「 $4 \times 8 = 4 \times 5 + 4 \times 3$ 」



(2) 利用下圖讓學生理解乘法對加法的右分配律「 $(10 \times 4) + (3 \times 4) = (10 + 3) \times 4$ 」、  
「 $(10 \times 4) + (3 \times 4) = 13 \times 4$ 」、「 $13 \times 4 = 10 \times 4 + 3 \times 4$ 」。



(3) 利用「一排 15 個有 12 排」的圖示讓學生先用算式表示，討論乘法對加法的分配律



